

Universidade do Vale do Paraíba

LEANDRO NUNES DOS SANTOS

**IDENTIFICAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE PONTOS
SINGULARES EM NOVAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA
EQUAÇÃO ESPECÍFICA DE GRAD-SHAFRANOV**

São José dos Campos - SP

2022

LEANDRO NUNES DOS SANTOS

**IDENTIFICAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE PONTOS
SINGULARES EM NOVAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA
EQUAÇÃO ESPECÍFICA DE GRAD-SHAFRANOV**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Universidade do Vale do Paraíba, como complementação dos créditos necessários para obtenção do título de Doutor em Física e Astronomia.

Orientador: Prof. Dr. Arian Ojeda González
Coorientador: Prof. Dr. Victor De La Luz

São José dos Campos - SP

2022

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE DIVULGAÇÃO DA OBRA

Ficha catalográfica

Nunes dos Santos, Leandro

Identificação e Caracterização de Pontos Singulares em novas soluções analíticas da Equação Específica de Grad-Shafranov / Leandro Nunes dos Santos; orientador, Prof. Dr. Arian Ojeda González; co-orientador Prof. Dr. Victor De La Luz. - São José dos Campos, SP, 2022.

1 CD-ROM, 134 p.

Tese (Doutorado) - Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos, Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia.

Inclui referências

1. Física e Astronomia. 2. Equação de Grad-Shafranov. 3. Pontos Neutros e Singulares. 4. Método de Génot. 5. Velocidade de Alfvén. I. Ojeda González, Prof. Dr. Arian, orient. II. De La Luz, Prof. Dr. Victor, co-orient. III. Universidade do Vale do Paraíba, Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia. IV. Título.

Eu, Leandro Nunes dos Santos, autor(a) da obra acima referenciada:

Autorizo a divulgação total ou parcial da obra impressa, digital ou fixada em outro tipo de mídia, bem como, a sua reprodução total ou parcial, devendo o usuário da reprodução atribuir os créditos ao autor da obra, citando a fonte.

Declaro, para todos os fins e efeitos de direito, que o Trabalho foi elaborado respeitando os princípios da moral e da ética e não violou qualquer direito de propriedade intelectual sob pena de responder civil, criminal, ética e profissionalmente por meus atos.

São José dos Campos, 21 de Março de 2022.



Autor(a) da Obra

LEANDRO NUNES DOS SANTOS

“IDENTIFICAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE PONTOS SINGULARES EM NOVAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO ESPECÍFICA DE GRAD-SHAFRANOV.”

Tese aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor, do Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia, do Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento da Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos, SP, pela seguinte banca examinadora:

PROF. DR. SERGIO PILLING GUAPYASSU DE OLIVEIRA - UNIVAP _____ 

PROF. DR. ARIAN OJEDA GONZÁLEZ - UNIVAP _____ 

PROF. DR. VICTOR HUGO DE LA LUZ RODRIGUEZ – UNAM/México _____ 

PROF. DR. VITOR MOURA CARDOSO E SILVA SOUZA - INPE _____ *Vitor Moura Cardoso e Silva Souza*

PROF.^a DR.^a MARIA VIRGINIA ALVES - INPE _____ *Maria Virginia Alves*

PROF. DR. RODRIGO ANDRÉS MIRANDA CERDA - UNB _____ 

PROF. DR. CAIUS LUCIUS SELHORST – UNICID _____ *Caius Lucius Selhorst*

Prof.^a Dr.^a Lúcia Vieira

Diretora do IP&D – Univap

São José dos Campos, 07 de março 2022.

Para meus pais (Silvana e Lorinaldo) e para minha avó Amélia (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço ao programa de pós-graduação, PPGFA, pela estrutura e pela bolsa nos primeiros meses, à CAPES pela bolsa durante o restante do doutorado e à UFMS pelo afastamento concedido, motivos que tornaram possível a elaboração desta tese. Agradeço aos membros da banca, os doutores Sergio Pilling Guapyassu de Oliveira, Vitor Moura Cardoso e Silva Souza, Maria Virginia Alves, Rodrigo Andrés Miranda Cerda e Caius Lucius Selhorst, estes dois últimos acompanham o trabalho desde a qualificação. Obrigado pelos apontamentos e pelas discussões que abrilhantaram o trabalho. Em especial, agradeço ao meu orientador, Dr. Arian Ojeda González, sempre disposto a ajudar, que foi abrigo seguro e luz que guiou todo o percurso desta tese; posso afirmar que se tornou muito mais que meu orientador e “pai científico”, sendo hoje um amigo que levarei para vida. Ao meu coorientador, Dr. Victor De La Luz, agradeço pelas observações nos momentos oportunos.

Agradeço também a todos os professores, principalmente àqueles com os quais tive a sorte de fazer alguma disciplina, quais sejam: Márcio, Valdir, Alan, Lúcia, Virgínia, Tardelli e Arian. Foram estes os grandes mestres que iluminaram a minha estrada do conhecimento, aos quais agradeço pelas palavras de encorajamento e ajuda oportuna, além das conversas e companhia nos cafés e corredores. As pessoas não fazem ideia do quanto esse contato informal é importante para a pesquisa; registro aqui minha lembrança!

Um agradecimento especial a todos os meus colegas de turma; são muitos e não quero correr o risco de esquecer de ninguém, de modo que ficam aqui meus votos de sucesso para todos vocês. Podem contar comigo sempre que precisarem!

Finalmente, agradeço minha família. Obrigado, mãe e pai, por todo esforço para bancar meus estudos; não foi fácil, mas sempre tentei dar o meu melhor para que esse esforço não fosse em vão. Hoje, obtendo o maior título que a academia pode conceder a alguém, vejo que valeu a pena! Há mérito, sonho e muito esforço nisso tudo, mas o mérito não é só meu, é de vocês também. Agradeço à minha avó também, por sempre acreditar que seria possível, sempre ajudando nos momentos certos. Quando, por algum motivo, meus pais não podiam, ela se fazia presente. Infelizmente ela nos deixou antes de presenciar este momento, mas registro aqui a minha eterna gratidão. Por fim, agradeço à minha esposa, Angelina, e à minha enteada, Leandra, pelo apoio e por estarem sempre presentes, tanto nos momentos bons como naqueles de dificuldade. Hoje posso dizer que: “zerei a vida!”

Quero também registrar meu agradecimento especial ao Antônio Nilson, por me abrir os olhos para a possibilidade de um matemático fazer doutorado em Física e Astro-

nomia, por ajudar com cada detalhe e me poupar muitos aborrecimentos. Sou grato por sua amizade e a de sua família. Agradeço também ao Jean Cerqueira Berni, por ajudar a zelar pelo bom Português da tese.

“A vitória não pertence aos mais fortes, mas àqueles que a buscaram por mais tempo”.

Napoleão Bonaparte

Resumo

A presente tese de doutorado aprofunda estudos anteriores a respeito da equação de *Grad-Shafranov*, que deriva das equações básicas do Eletromagnetismo e dos conceitos da Teoria Cinética em Física de Plasma. Esta equação aparece em duas versões: *i*) uma versão mais geral, que se aplica quando a densidade de corrente é definida em função da primeira derivada do potencial vetor magnético, e que não tem solução analítica, e *ii*), que é uma versão simplificada, conhecida como equação específica de *Grad-Shafranov*, que se aplica quando a densidade de corrente se expressa como função da exponencial do potencial vetor magnético. A equação específica tem solução analítica e foi resolvida primeiramente por *Walker*, em 1915, com inúmeras aplicações à Física Espacial. Alguns dos modelos obtidos a partir da fórmula de *Walker* têm em comum a presença de pontos neutros do tipo-*X* e do tipo-*O* (ilhas magnéticas), oriundos da teoria da reconexão magnética, e pontos do tipo-*S* (*S* de singular), onde o valor máximo do campo magnético tende ao infinito. Diversas soluções foram propostas por outros autores a fim de compreender a coexistência desses pontos. Com o intuito de aprofundar essa discussão, inovou-se com seis novas soluções da equação específica de *Grad-Shafranov*, usando os modelos de *Faddev*, *Kan*, *NAVAL* e *Yoon-Lui*, aplicados à fórmula de *Walker*. Através das análises físicas desses modelos, buscamos entender o comportamento dos pontos dos tipos *X*, *O* e *S* em novas configurações topológicas do campo magnético dadas pelas novas soluções. Outro resultado importante se deve ao estudo teórico das vizinhanças dos pontos singulares: neste contexto, propomos uma metodologia para excluir as singularidades. Para isto, expandimos as equações matemáticas dos modos de onda MHD, considerando ou não a corrente de deslocamento. Desta forma, torna-se possível aproveitar essas novas soluções em modelos MHD, usando-as como condições iniciais para a resolução numérica da equação de *Grad-Shafranov*. Deixamos de sugestão para trabalhos futuros estudar aplicações imediatas destas novas soluções.

Palavras-chaves: Equação de Grad-Shafranov, pontos neutros e singulares, método de Génot, velocidade de Alfvén, ondas magneto-hidrodinâmicas.

IDENTIFICATION AND CHARACTERIZATION OF SINGULAR POINTS IN NEW ANALYTICAL SOLUTIONS OF A SPECIFIC FORM OF THE GRAD-SHAFRANOV EQUATION

Abstract

This doctoral thesis goes deeper into former studies about the *Grad-Shafranov* equation, which derives from the basic equations of the Electromagnetism and from the concepts of the Kinetic Theory in Plasma Physics. This equation appears in two versions: *i*) a more general one, which applies whenever the current density can be expressed as a function of the first derivative of the magnetic vector potential, which has no analytical solution, and *ii*), which is a simplified version, known as the specific *Grad-Shafranov* equation, which applies whenever the current density can be expressed as an exponential function of the magnetic vector potential. The specific equation has analytic solutions and was solved first by *Walker*, in 1915, with many applications to Space Physics. Some of the models obtained from *Walker*'s formula have in common the presence of neutral points of type-*X* and type-*O* (magnetic islands), coming from the theory of magnetic reconnection, and type-*S* points (*S* for singular), where the maximum intensity of the magnetic field tends to infinity. Many solutions were proposed by other authors in order to understand the coexistence of these points. With the intention of taking this discussion further, we have inovated with six new solutions of the specific *Grad-Shafranov* equation, using the models of *Faddev*, *Kan*, *NAVAL* and *Yoon-Lui*, applied to *Walker*'s formula. Through the physical analysis of these models, we make sense of the behaviour of the types *X*, *O* and *S* points in new topological configurations of the magnetic field given by the new solutions. Other important result is due to the theoretical study of singular points' neighbourhoods: in this context, we propose a method to remove singularities. To do so, we expand the mathematical equations of the MHD wave modes, considering or not the displacement current. Thus, it becomes possible availing of these new solutions to MHD models, using them as initial conditions to the numeric solutions of the *Grad-Shafranov* equation. We leave suggestion for future work to study immediate applications of these new solutions.

Keywords: Grad-Shafranov equation, neutral and singular points, Génot method, Alfvén speed, magneto-hydrodynamic waves.

Lista de ilustrações

<p>Figura 1 – (a) O campo magnético nos planos de cada lado de uma lâmina de corrente com um campo B_0 uniforme. Considerando íons positivos, a lâmina de corrente está orientada ao longo do eixo Z. (b) O campo magnético de cada lado de uma lâmina neutra. Para íons positivos a corrente sai da lâmina.</p>	36
<p>Figura 2 – Temos a ocorrência, em duas dimensões, de reconexão magnética para três intervalos de tempo distintos. Para $t < 0$ (antes da formação do ponto tipo-X e da região de difusão), temos campos magnéticos antiparalelos, para $t = 0$, ainda não temos reconexão magnética, apenas vemos a marcação da região de difusão com o ponto-X formado. As setas cinzas mostram o movimento das linhas de campo saindo em $t > 0$ da região central, com as linhas de campo já reconectadas.</p>	38
<p>Figura 3 – Segue a ilustração dos dois modelos de reconexão magnética: <i>Sweet-Parker</i> e <i>Petschek</i>. Note que a grande diferença se deve à região de difusão. A primeira, mais alongada e achatada, e a segunda mais curta e mais larga. Destacamos que ambos os modelos têm coexistência de campo nulo e topologia em X, chamado de ponto neutro tipo-X.</p>	39
<p>Figura 4 – Temos a geometria das ondas Alfvén. A velocidade de propagação se dá ao longo das linhas de campo magnético, fazendo o movimento senoidal ao longo das linhas de campo. Já o movimento do fluido e das perturbações são perpendiculares às linhas de campo.</p>	40
<p>Figura 5 – As figuras representam as linhas de campo dada pela componente y do potencial vetor magnético em (2.4), para $\bar{\alpha} = -1, 1$ (painel da esquerda) e $\bar{\alpha} = 1, 1$ (painel da direita), em uma grade retangular XZ de -1 a 1 em ambos os eixos. Estes são os dois tipos de figuras geométricas que podem aparecer nos gráficos das soluções da equação de <i>Grad-Shafranov</i>. Note também que no ponto tipo-X temos as linhas limites que são denominadas separatrizes, e essas passam pela origem do sistema.</p>	42
<p>Figura 6 – Contornos de erro constante, $(A_{\text{calc}} - A_{\text{exact}}) / \langle A \rangle$, em que $\langle A \rangle$ é a média da magnitude de A no gráfico. Contornos de erro são separados por 1%. (a) Gráfico de solução analítica de $A(x, z)$; (b) Gráfico de solução numérica de $A(x, z)$; (c) Contornos de erro constante; (d) Zoom dos contornos de erro constante,</p>	55
<p>Figura 7 – Sistema de coordenadas cartesianas mostrando as orientações relativas dos vetores \vec{k} e \vec{B}_0.</p>	68

- Figura 8 – Velocidades de fase (independentes da frequência) em função do ângulo entre k e B_0 para ondas de Alfvéns puras e para as ondas MHD rápidas e lentas quando (a) $V_A > V_s$ e (b) $V_A < V_s$ 73
- Figura 9 – Gráfico da densidade de corrente da solução de *Harris*. Observe que esta solução não tem singularidades. Trata-se, apenas, de uma lâmina de corrente separando plasmas antiparalelos. Usamos $b = 0,5$ para compor o gráfico. 78
- Figura 10 – Estes são os gráficos de densidade de corrente da solução de *Fadeev* dada pela equação (2.60) com $b = 0,5$ e $f_p = 0,5$. Esta solução (painel (a)) tem duas ilhas magnéticas, localizadas em $\pm 2\pi$, e também um ponto do tipo $-X$, na origem. A constante b , se alterada, muda a quantidade de ilhas magnéticas mostrada, tendo um efeito de afastamento, enquanto que f_p altera o formato das ilhas, deixando-as mais elípticas quando f_p está próximo de zero, ou mais circulares quando $f_p > 1$, também alterando muito a densidade de corrente das ilhas magnéticas. O painel (b) mostra a mesma solução, mudando somente a janela de visualização. 79
- Figura 11 – O painel (a) mostra o gráfico de densidade da solução de *Kan*, dada pela equação (3.12), em que usamos $b = 0,5$. O gráfico conta com quatro pontos do tipo $-X$ ($0, \pm 0,206855$) e ($0, \pm 1,2955$) e dois pontos de singularidades, localizados no eixo Z , em $(0, +\sqrt{b})$, $(0, -\sqrt{b})$. Em (b), temos uma mudança na grade para $-0,8 < Z < 0,8$ e $-0,8 < X < 0,8$. Em (c) foi refeito o painel (a) retirando, no entanto, a faixa $-1 < X < 1$, onde se encontram as singularidades. 82
- Figura 12 – Gráfico da densidade de corrente da solução *NAVAL*, dada pela equação (3.24), onde foi usado $b = 0,5$. Este parâmetro altera a quantidade de ilhas magnéticas, alterando desta forma também o período em que elas aparecem. Tem-se ilhas periódicas com período 2π , começando pela origem. Os pontos singulares estão no eixo X , intercalados com as ilhas, iniciando em π e com período 2π . Também notamos os pontos tipo $-X$ acima e abaixo do eixo X 83
- Figura 13 – Gráfico de densidade da solução *Yoon-Lui-1*, dada pela equação (3.27), que tem como característica o fato de ter somente uma ilha magnética. Usamos os parâmetros $\nu = 1$ e $\nu = 4$ para plotar estes gráficos. Nos casos ($\nu \neq 0, \nu < 1$) e ($\nu > 1$), a densidade de corrente, J_y , tem uma singularidade em $(0,0)$. Em (b), nota-se que o campo magnético tem direções opostas ao redor do ponto singular, formando assim um anel de corrente onde o campo magnético se anula. 85

- Figura 14 – Gráfico de densidade da solução *Yoon-Lui-2*, dada pela equação (3.32), usando $a = 2$. Notamos que temos duas ilhas no eixo X , localizadas nos pontos $(-\sqrt{a}, 0)$ e $(\sqrt{a}, 0)$, e entre as ilhas verificamos um ponto neutro tipo- X . No eixo Z , notamos dois pontos singulares e três pontos neutros tipo- X , um na origem e os outros dois próximos às singularidades $(0, -\sqrt{a})$ e $(0, \sqrt{a})$. Considerando $a = -2$, as ilhas passam a ser localizadas no eixo Z e as singularidades no eixo X 87
- Figura 15 – Gráfico de densidade da solução *Yoon-Lui-3*, dada pela equação 3.39. Fizemos quatro gráficos, usando como parâmetros $a = 0, 1, 0, 4, 0, 5$ e $0, 7$, respectivamente. Aqui fica bem evidente o processo de divisão da ilha magnética da solução. 89
- Figura 16 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.14). Foram usados $b = 0, 5$ e $f_p = 1$ para plotá-la. Os pontos de singularidades são $((2k+1)\pi, 0)$, em que $k \in \mathbb{Z}$ e π é dado em radianos. Esta solução tem ilhas presentes fora do eixo X , ocorrendo periodicamente, ora acima, ora abaixo do eixo X . Além disso, o sentido de rotação do campo magnético nas ilhas magnéticas (sentido horário) é oposto ao dos pontos singulares (sentido anti-horário). 95
- Figura 17 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução dada pela equação (4.19). Esta solução é a mesma da Figura 16, apenas rotacionada em 90° . Foram usados os parâmetros $b = 0, 5$ e $f_p = 1$ para plotar este gráfico. 96
- Figura 18 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.29). Foi usado $b = 0, 5$ em todas as figuras, no entanto fizemos uma variação em f_p , sendo $f_p = 0, 5, 1, 1.5$ e 4 , nas figuras de $a)$ a $d)$, respectivamente. Os pontos de singularidades estão localizados em $(\pm 2k\pi, 0)$, tal que $k \in \mathbb{Z}$ e π é dado em radianos. 99
- Figura 19 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução dada pela equação (4.35). Esta solução é a mesma da Figura 18, apenas rotacionada em 90° . Foram usados $b = 0, 5$ e $f_p = 1$ para plotar o gráfico. 100
- Figura 20 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.59). Foram usados $b = 0, 5$ e $a = 1$ para plotá-la. Os pontos de singularidades calculados para os parâmetros já mencionados são: $(0, \pm 0, 71)$ $(\pm 1, 84, 0)$ $(\pm 4, 82, 0)$. Na figura b) temos o mesmo gráfico da figura a) apenas retirando $-0.8 < X < 0.8$ para que a densidade de corrente seja corretamente calculada, já que as singularidades não estão presente. 103

Figura 21 – As figuras (a) e (b) tem uma grade quadrada de -0,7 a 0,7 e, (c) e (d) tem uma grade quadrada de -2 a 2 em ambos os eixos, respectivamente. Também fizemos uma mudança do parâmetro b : em (a) e (c) temos $b = 0,5$ e em (b) e (d) temos $b = -0,5$ 104

Figura 22 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.83). Foram usados $b = 0,5$ e $a = 1$ para plotá-la. Os pontos de singularidades calculados para os parâmetros já mencionados são $(0, \pm 0,71)$ $(\pm 0,71, 0)$ $(\pm 3, 29, 0)$. A diferença desta solução para a anterior está no não achatamento das ilhas magnéticas ao redor da origem quando próximas às singularidades $(0, \pm 0,71)$. Na figura b) temos o mesmo gráfico da figura a) apenas retirando $-0,5 < X < 0,5$ para que a densidade de corrente seja corretamente calculada, já que as singularidades não estão presente. 108

Figura 23 – Mudança de grade do gráfico da Figura 22. A figura a) tem uma grade quadrada de -2 a 2 em ambos os eixos, com o intuito de focarmos mais nas adjacências dos pontos singulares próximos da origem do sistema. Na figura b) temos $-0.6 < Z < 0.6$ e $-0.6 < X < 0.6$, além da retirada de uma faixa vertical de 0,02 de comprimento, retirando assim as singularidades próximas a origem. Já nas figuras c) e d), temos as grades, $-2 < Z < 2$ e $-3 < X < 3$ com $b = -0,5$, $b = -2$, ambos com $a = 1$, respectivamente. 109

Figura 24 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução dada pela equação (4.102). Foi usado $a = 1$ em todas as figuras, porém fizemos uma variação em ν , sendo $\nu = 1$, $\nu = 1,2$, $\nu = 1,6$ e $\nu = 2$, nas figuras de a) a d), respectivamente. Os pontos de singularidades estão localizados nos pontos $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{11}, 0)$, $(\pm\sqrt{\frac{13}{3}}, 0)$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$, nas figuras de a) a d), respectivamente. 113

Figura 25 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.118). Foi usado $a = 1$ em todas as figuras, e fizemos uma variação em ν , sendo $\nu = 1$, $1,6$, $1,8$, 2 , 3 e 4 nas figuras de a) a f), respectivamente. Os pontos de singularidades estão localizados nos pontos $(0, 0)$, $(\pm 0,48, 0)$, $(\pm 0,53, 0)$, $(\pm 0,58, 0)$, $(\pm 0,71, 0)$, $(\pm 0,77, 0)$, nas figuras de a) a f), respectivamente. 117

Figura 26 – As figuras superiores mostram as variações das velocidades de fase de cada um dos modos de onda MHD rápido (cor azul), MHD lento (cor vermelha) e puro (cor preta) em função do ângulo θ entre \vec{k} e \vec{B}_0 , para os casos (a) $v_A > v_s$ e (b) $v_A < v_s$. Os gráficos foram feitos a partir das equações (4.134) e (4.147), mas o resultado seria o mesmo mostrado na Figura 7, p. 389 de Bittencourt (2018a), construído com as equações (2.112) e (2.119). Isto ocorre porque a condição $v_A \ll c$ foi usada. O painel (c) mostra que os modos rápido e puro são sobrepostos, e a forma do gráfico não depende do valor de θ . O painel (d) mostra o modo de onda lento para três valores diferentes do ângulo θ 122

Figura 27 – Esta figura mostra os resultados para a solução de *Kan*. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um gráfico de fluxo do vetor de campo magnético, $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$, em função de X e Z de (3.12), com (4.159) e (4.160). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (isto é, fora do limite). Os últimos três painéis mostram as regiões onde $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(0, -\sqrt{0,5})$ no painel c, $(0, 0)$ no painel d e $(0, \sqrt{0,5})$ no painel e. 133

Figura 28 – Intensidade do campo magnético (figuras a e b), densidade do fluido obtido de (4.161) (figuras c e d) e a subtração entre eles (figuras e e f) plotados a partir do modelo de *Kan*. Para evitar a singularidade magnética em que $B(X, Z)$ tende ao infinito, cada figura mostra um gráfico próximo a uma singularidade nos pontos $(0, 0)$ (figuras a, c e e) e no ponto $(0, -\sqrt{0,5})$ (figuras b, d, e, e f), respectivamente. Os gráficos permitem comparar a contribuição que os valores da magnitude do campo magnético e da densidade do fluido terão ao aumentar a velocidade da fase, relacionada à velocidade de Alfvén, próxima a um ponto singular magnético. 134

Figura 29 – Resultados para a solução de *NAVAL*. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um perfil de linhas de força do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$ como uma função de X e Z de (3.24) com (4.159) e (4.160). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (ou seja, fora do limite). Os dois últimos painéis mostram as regiões em que $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(-\pi, 0)$ no painel c e $(\pi, 0)$ no painel d. 136

Figura 30 – Intensidade do campo magnético (painel a), densidade do fluido de (4.161) (painel b) e a subtração entre eles (painel c), plotados a partir do modelo de NAVAL. Para evitar a singularidade magnética em que $B(X, Z)$ tende ao infinito, cada painel mostra um gráfico próximo à singularidade no ponto $(\pi, 0)$. Perto do ponto $(-\pi, 0)$, não mostrado aqui, os gráficos são semelhantes. Os gráficos permitem comparar a contribuição que os valores da força do campo magnético e da densidade do fluido terão ao aumentar a velocidade da fase, relacionada à velocidade de Alfvén, próxima a um ponto singular magnético.	137
Figura 31 – Joseph Liouville.	153
Figura 32 – Vitali Dmitrievich Shafranov.	157
Figura 33 – Resultados para a solução 1. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um perfil de linhas de força do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$ dada pela equação (4.14). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (ou seja, fora do limite). Os dois últimos painéis mostram as regiões em que $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(-\pi, 0)$ no painel c e $(\pi, 0)$ no painel d.	167
Figura 34 – Resultados para a solução 2. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um perfil de linhas de força do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$ dada pela equação (4.29). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (ou seja, fora do limite). Os dois últimos painéis mostram as regiões em que $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(0, 0)$ no painel c, $(2\pi, 0)$ no painel d e $(-2\pi, 0)$ no painel e.	168
Figura 35 – Resultados para a solução 5. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um perfil de linhas de força do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$ dada pela equação (4.102). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (ou seja, fora do limite). Os dois últimos painéis mostram as regiões em que $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(-\sqrt{11}, 0)$ no painel c, $(\sqrt{11}, 0)$ no painel d e $(0, 0)$ no painel e.	169

Lista de tabelas

- Tabela 1 – Relação entre β_A , v_A , v_{ph} e a proporção v_A/v_{ph} em ordem decrescente, definindo limiares para os intervalos de valores com $v_A \geq c$, ondas relativísticas de Alfvén e ondas não-relativísticas de Alfvén, segundo o modelo aqui adotado. A terceira coluna apresenta os valores v_{ph} obtidos de (4.158), também por (4.148 e 4.149) considerando $\theta = 0$ e $v_A > v_S$. O valor $c = 299.792.458$ km/s é usado. Os valores escolhidos nesta tese são destacados em negrito. Os valores marcados em azul na tabela, separa os valores onde $v_A > c$ (em cima) dos valores relativísticos e não-relativísticos (em baixo). 129
- Tabela 2 – Valores da grade retangular usados para identificar a região de alta velocidade de Alfvén para cada ponto singular magnético (X_0, Z_0) na solução de *Kan* 132
- Tabela 3 – Valores da grade retangular usados para identificar a região de alta velocidade de Alfvén, para cada ponto singular magnético (X_0, Z_0) , na solução de *NAVAL*. 135

Lista de abreviaturas e siglas

CAFE	- Código newtoniano para resolução de equações MHD
CFL	- Condição de <i>Courant-Friedrichs-Lewy</i>
EDP	- Equação Diferencial Parcial
FTEs	- Eventos de transferência de fluxo
GS	- <i>Grad-Shafranov</i>
GSR	- Reconstrução de <i>Grad-Shafranov</i>
HT	- <i>deHoffman-Teller</i>
ICME	- Ejeção de massa coronal interplanetária
IMF	- Campo Magnético Interplanetário
MCs	- Nuvens magnéticas
MHD	- Magnetohidrodinâmica
MMS	- <i>Magnetospheric Multi Scale</i>
MVA	- Análise da mínima variância
NAVAL	- Nilson-Arian-Virgínia-Alan-Lucas
PIC	- <i>Electromagnetic particle in cell</i>
PVI	- Problema de Valor Inicial
TD	- Descontinuidade tangencial

Lista de símbolos

Δ	- Discriminante de uma equação de segundo grau
ϵ_0	- Permissividade do vácuo
γ	- Coeficiente de expansão adiabático
λ	- Autovalores
μ_0	- Permeabilidade magnética do vácuo
∇	- Operador Nabla ou Laplaciano
ω	- Frequência angular de oscilação da onda
$\phi(\vec{r})$	- Potencial elétrico
Ψ	- Potencial vetor normalizado
ρ_m	- Densidade do fluido
σ_0	- Condutividade do fluido
θ	- Ângulo
\vec{a}, \vec{v}	- Vetor aceleração e velocidade respectivamente
\vec{A}, \vec{A}'	- Potencial vetor magnético
\vec{B}	- Vetor campo magnético
\vec{E}	- Vetor campo elétrico
\vec{J}	- Vetor densidade de corrente
\vec{k}	- Módulo do vetor de onda
\vec{u}	- Velocidade média do fluido
A_j	- Componente j do potencial vetor magnético
B_0	- Campo magnético assintótico
B_j	- Componente j do vetor campo magnético
e, i, p	- Elétrons, Íons ou prótons e dependendo do contexto pode ser interno e externo

f_α	- Função distribuição
f_p, b	- Parâmetros ou constantes ajustáveis
J_d	- Corrente de deslocamento
k_B	- Constante de <i>Boltzmann</i>
L	- Comprimento de escala
m	- Massa do átomo no fluido
m_j	- Massa da partícula j
n	- Densidade numérica
$n_{0\alpha}$	- Densidade total da partícula α no interior da esfera de raio r
p	- Pressão cinética do plasma
P_{Total}	- Pressão total
P_t	- Pressão transversal do plasma
q_j	- Carga da partícula j
r_c	- Raio de <i>Larmor</i>
T	- Temperatura
t	- Tempo
U	- Velocidade de deriva
v_\perp	- Componente da velocidade perpendicular à direção do campo magnético
x^*, z^*	- Componente dos eixos coordenados (X^*, Z^*)
γ_A	- Fator de <i>Lorentz</i> em função da velocidade de Alfvén
$\bar{\alpha}$	- Parâmetro adimensional utilizado para definir os pontos neutros tipo O e X
\vec{r}	- Vetor posição
c	- Velocidade da luz no vácuo
f_p	- Parâmetro gráfico
$g(\zeta)$	- Função geradora onde ζ é uma variável complexa

$v_{M\gamma}$ - Velocidade magneto-acústica anisotrópico-relativística

v_{ph} - Velocidade de fase ou onda de Alfvén pura

Sumário

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Objetivo Geral	32
1.2	Objetivos Específicos	32
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	35
2.1	Conceitos Físicos Preliminares	35
2.1.1	Lâminas de Corrente	35
2.1.2	Reconexão Magnética	37
2.1.3	Ondas Alfvén	39
2.1.4	Pontos Neutros e Ponto singular	41
2.2	Equação de GS	42
2.3	Teoria Cinética para se Obter a Equação Específica de GS	45
2.4	Método de Génot para Identificar Singularidades	48
2.5	Solução Numérica da Equação de GS	50
2.6	Reconstrução de Tubos de Fluxo Utilizando a Equação de GS	55
2.7	Principais Aplicações da Equação de GS	60
2.8	Velocidade de Fase de uma Onda Magnetoacústica	65
2.8.1	Equação para a Velocidade do Fluido Negligenciando a Corrente de Deslocamento	66
2.8.2	Modos de Onda MHD Negligenciando a Corrente de Deslocamento	68
3	MÉTODO DE GÉNOT APLICADO EM MODELOS ANALÍTICOS	75
3.1	Solução de Walker	75
3.2	Solução de Harris	76
3.2.1	Uma Nova Forma de Encontrar a Solução de Harris	77
3.3	Solução de Faddev	78
3.4	Solução de Kan	79
3.5	Solução NAVAL	82
3.6	Solução de Yoon-Lui-1	83
3.7	Solução de Yoon-Lui-2	85
3.8	Solução de Yoon-Lui-3	88
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	91
4.1	Proposta de Novas Soluções Analíticas	91
4.1.1	Solução 1	92
4.1.2	Solução 2	96

4.1.3	Solução 3	100
4.1.4	Solução 4	105
4.1.5	Solução 5	109
4.1.6	Solução 6	113
4.2	Modos de Ondas MHD Considerando a Corrente de Deslocamento	118
4.3	Identificação e Caracterização de Pontos Singulares em Soluções Analíticas da Equação de GS	126
4.3.1	Pontos Singulares no Modelo de Kan	131
4.3.2	Pontos Singulares no Modelo de NAVAL	134
5	CONCLUSÕES	139
	REFERÊNCIAS	141
	APÊNDICES	151
	APÊNDICE A – CONTEXTO HISTÓRICO	153
A.1	Joseph Liouville	153
A.2	Vitali Dmitrievich Shafranov	156
	APÊNDICE B – BASE TEÓRICA MATEMÁTICA	159
	APÊNDICE C – CÓDIGOS EM PYTHON	165
	APÊNDICE D – METODOLOGIA PARA EXCLUIR SINGULARIDADES DAS NOVAS SOLUÇÕES DE GS	167
	APÊNDICE E – PRODUÇÃO CIENTÍFICA	171

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste trabalho começa enunciando as equações básicas do Eletromagnetismo os conceitos da Teoria Cinética em Física de Plasma. Sendo assim, explicitamos a lei de *Ampère-Maxwell* em sua forma diferencial,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}, \quad (1.1)$$

sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo, \vec{J} o vetor densidade de corrente, ϵ_0 a constante de permissividade do vácuo e t o tempo. Pela lei de *Ampère-Maxwell*, há duas maneiras de produzir um campo magnético (\vec{B}): *i*) por meio de carga em movimento; *ii*) por um campo elétrico (\vec{E}), variando no tempo. Para continuar com a explicação é importante definir as propriedades físicas do meio onde a lei de *Ampère-Maxwell* será utilizada bem como a geometria do problema. Este estudo é aplicado a um plasma considerado como um fluido único, de alta condutividade, imerso em um campo magnético, sem colisões e considerando que em seu interior acontecem fenômenos de baixa frequência que permitem uma aproximação magnetostática ($\partial/\partial t = 0$). Em relação à geometria do problema, utiliza-se o sistema de coordenadas cartesianas 2, 5-D, em que se analisa as variações de magnitudes físicas em um plano XZ e fora dele em apenas uma direção \vec{J} . Nesse sistema, o vetor campo magnético é definido por $\vec{B} = B_x(x, z)\hat{i} + B_y(x, z)\hat{j} + B_z(x, z)\hat{k}$, e considera-se o eixo Y invariante ($\partial/\partial y = 0$), o que permite observar todas as possíveis variações das respectivas magnitudes do plasma no plano XZ . Conseqüentemente, o vetor densidade de corrente fica definido por: $\vec{J} = J_y(x, z)\hat{j}$. A escolha do plano XZ é o adotado em diversos trabalhos da área (MANANKOVA, 2003; YOON; LUI, 2005; GÉNOT, 2005) e justifica-se pelo fato que vários dos modelos analíticos (que serão apresentados mais adiante) podem ser utilizados para fazer comparações com a magnetocauda da Terra quando se realiza um corte meridional, com X na linha Sol-Terra e Z no sentido sul magnético. Para maiores informações da invariância em um dos eixos de coordenada cartesiana ver o trabalho de Ojeda-González, Prestes e Laurindo-Sousa (2016).

Após definidas as propriedades físicas do meio e a geometria do problema, é conveniente enunciar a lei de *Gauss* do magnetismo ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$), que afirma a não existência de “monopolos” magnéticos e, como consequência, as linhas de campo magnético sempre serão curvas fechadas. Um conceito bem estabelecido em Eletromagnetismo é a definição do potencial vetor magnético \vec{A}' , que surge como consequência da identidade matemática que garante que a divergência do rotacional de um campo vetorial é zero. Porém, é possível escrever o campo magnético como $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$ e usar uma identidade vetorial na lei

de *Ampère-Maxwell*:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}') = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}') - \nabla^2 \vec{A}' = \mu_0 \left(\vec{J} + \underbrace{\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=0} \right). \quad (1.2)$$

Segundo [Ojeda-González, Prestes e Laurindo-Sousa \(2016\)](#), pelo fato de considerarmos o eixo Y invariante, o termo $\nabla \cdot \vec{A}'$ é nulo, com \vec{E} e \vec{J} paralelos ao eixo Y , e portanto:

$$-\nabla^2 \vec{A}' = \mu_0 \vec{J}. \quad (1.3)$$

Como na equação vetorial anterior trabalha-se apenas com a componente y , vamos considerar, de agora em diante, $A'_y = A_y$, sendo que:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu_0 J_y. \quad (1.4)$$

A equação (1.4) é conhecida como equação generalizada de *Ampère*.

Neste momento, se faz necessário informar ao leitor que a equação generalizada de *Ampère*, pode-se transformar em duas novas equações que serão os principais objetos de estudo deste trabalho. Estas duas novas equações são: *i*) **equação de Grad-Shafranov (GS)**¹, aplicada quando a densidade de corrente é definida em função da primeira derivada do potencial vetor magnético e que não tem solução analítica ([GRAD; RUBIN, 1956](#); [SHAFRANOV, 1966](#)); *ii*) uma forma simplificada denominada **equação específica de GS**, aplicada quando a densidade de corrente se expressa em função da exponencial do potencial vetor magnético que, neste caso, tem solução analítica ([KAN, 1973](#); [KAN, 1979](#); [YOON; LUI, 2005](#); [SONNERUP et al., 2006](#); [OJEDA-GONZÁLEZ et al., 2015](#); [HU, 2017](#); [OJEDA-GONZÁLEZ, 2018](#)).

A equação de GS citada no item (*i*) é escrita em termos das coordenadas cartesianas no plano da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu_0 \frac{d}{dA_y} \left(p(A_y) + \frac{B_y^2(A_y)}{2\mu_0} \right), \quad (1.5)$$

em que A_y é a componente y do potencial vetor magnético, p é a pressão cinética do plasma e B_y é a componente y do campo magnético ([KHRABROV; SONNERUP, 1998](#); [HAU; SONNERUP, 1999](#); [SONNERUP et al., 2006](#)). A equação (1.5) é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que não possui uma solução analítica, mas que pode ser resolvida numericamente como um problema de *Cauchy* ([SONNERUP; GUO, 1996](#); [HAU; SONNERUP, 1999](#); [HU; SONNERUP, 2001](#)).

Retomando a explicação de (1.5), é necessário ressaltar que a proposta de uma solução numérica deve ser validada, preferencialmente, por uma comparação com uma

¹ Para conhecer um pouco mais da vida e obra de Vitali Dmitrievich Shafranov ver apêndice (A.2)

solução analítica. Para isto, convém considerar simplificações na equação que possibilitem eliminar a não-linearidade. Desta maneira, pode-se obter uma solução analítica geral que adéque as condições iniciais à implementação da solução numérica. Em seguida, explicaremos o passo a passo que permitirá simplificar (1.5) a um ponto em que possa ser resolvida analiticamente.

O termo da direita em (1.5), no argumento da derivada, define a pressão transversal do plasma (P_t) (KHRABROV; SONNERUP, 1998; HAU; SONNERUP, 1999), ou seja,

$$P_t(A_y(x, z)) = p(A_y(x, z)) + \frac{B_y^2(A_y(x, z))}{2\mu_0}. \quad (1.6)$$

Existem casos muito específicos da expressão de P_t para os quais é possível obter uma solução analítica de (1.5) (KAN, 1973; ZHENG; WOOTTON; SOLANO, 1996; CARTHY, 1999; ATANASIU *et al.*, 2004)².

Apesar da não fundamentação Físico-teórica prévia, podemos lançar mão de alguma Matemática para mostrar ao leitor o porquê de a nova equação ser uma simplificação conveniente (possibilitando assim solução analítica) de (1.5). Para tanto, define-se uma outra maneira de escrever (1.6):

$$P_t = P_{t_0} e^{(-2\Psi)} \quad (1.7)$$

na qual

$$\Psi = -\frac{A_y}{LB_0} \quad (1.8)$$

define o potencial vetor magnético normalizado, B_0 é o campo magnético assintótico, L representa o comprimento de escala, e

$$P_{t_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (1.9)$$

é a pressão transversal quando $A_y = 0$ (SCHINDLER, 2006). As expressões (1.6-1.9) são substituídas em (1.5) para obter a equação específica de GS (as vezes chamada também de **forma específica ou simplificada da equação de GS**), com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = e^{-2\Psi}, \quad (1.10)$$

considerando novas variáveis que não possuem dimensões: $\frac{x}{L} = X$ e $\frac{z}{L} = Z$ (YOON; LUI, 2005).

Na formulação matemática adotada aqui, a componente da densidade de corrente, J_y , é a seguinte:

$$J_y(x, z) = \frac{B_0}{L\mu_0} e^{(-2\Psi)}. \quad (1.11)$$

O intuito desta tese é aprofundar o estudo anteriores sobre as soluções de GS e, assim propor novas soluções. O cerne é o estudo teórico das regiões vizinhas dos pontos

² Alguns deles aplicados ao Tokamak.

singulares e a caracterização destes pontos coexistindo com os tipo- X e tipo- O . Além disso, o trabalho propõe uma metodologia para excluir a singularidade magnética, que possibilita aproveitar as soluções em modelos magnetohidrodinâmicos (MHD) e criar condições iniciais para resolver numericamente a equação de GS. Até agora, isso só foi feito com soluções analíticas que não apresentam pontos singulares, como a solução de [Harris \(1962\)](#) e [Fadeev, Kvabtskhava e Komarov \(1965\)](#). No entanto, a maioria das soluções obtidas a partir da fórmula de *Walker* apresenta singularidades magnéticas ([YOON; LUI, 2005](#)). Isto leva à necessidade de estudar mais a fundo estas singularidades, ainda que seja uma área delicada para se fazer pesquisa, devido aos diversos tipos de singularidades serem um “tabu” na Física, e existir uma certa resistência da comunidade científica a aceitar esses resultados. No entanto, esses resultados podem vir a ser promissores, haja vista que podem ser encontrados em diversos modelos na Física Teórica moderna. Na própria Teoria da Relatividade Geral proposta pelo renomado cientista *Albert Einstein*, aparecem singularidades em situações realistas nas soluções das equações de Einstein ([CURIEL, 2021](#)).

1.1 Objetivo Geral

Sendo assim, o **objetivo geral** deste trabalho em um primeiro momento, é apresentar a equação específica de *Grad-Shafranov* para uma posterior revisão das soluções analíticas com singularidades, além de propor novas soluções com singularidades, fazendo a discussão física destas; em um segundo momento, é apresentado um método para excluir regiões com velocidade de Alfvén relativística ao redor de pontos singulares. Para tanto, é necessário aprofundar o estudo sobre as propriedades do plasma em uma configuração MHD ideal, assim como a velocidade de fase de ondas MHD. Conseqüentemente, em outras palavras, esta tese consiste na proposta de novas soluções analíticas e de uma metodologia para excluir singularidades que permitirá utilizar estes modelos como condições iniciais em simulações MHD.

1.2 Objetivos Específicos

De modo esquemático, tem-se os seguintes **objetivos específicos**:

1. Apresentar uma fundamentação teórica da equação de GS a equação da velocidade de um fluido magneto-condutor;
2. Discutir o método de *Génot* para identificar singularidades nas soluções analíticas;
3. Propor funções geradoras $g(\zeta)$ que possibilitem obter novas soluções analíticas com a presença de pontos singulares no domínio da solução;

4. Mostrar o passo a passo do método para calcular a velocidade de fase em casos relativísticos;
5. Apresentar uma metodologia para isolar e caracterizar as singularidades;

Esta tese está organizada em cinco capítulos. Além desta introdução, o Capítulo 2 contém a fundamentação teórica, ou estado da arte, serão apresentados também, os passos algébricos para obter a equação da velocidade de um fluido magneto-condutor de forma detalhada e seguindo um procedimento metodológico. Esta equação será obtida em um primeiro momento negligenciando a corrente de deslocamento na lei de *Ampère-Maxwell* que posteriormente será considerada separadamente. O capítulo 3 apresenta uma revisão dos principais modelos usados para obtenção dos resultados. No capítulo 4 são organizados e discutidos os resultados desta pesquisa. Consideramos também como resultado o fato de considerarmos uma direção arbitrária para o vetor de onda e para o vetor campo magnético em ambas equações da velocidade de um fluido. Assim, obteremos uma expressão para a velocidade de fase da onda. O estudo da velocidade de fase implica a existência de três modos de ondas MHD que são amplamente conhecidas na literatura (ver, por exemplo: [Belcher, Davis e Smith \(1969\)](#), [Bittencourt \(2018a\)](#)). O capítulo 5 descreve as conclusões deste trabalho e os encaminhamentos futuros. No apêndice E, temos um resumo da produção científica desenvolvida durante o doutorado, tais como apresentações em congressos e os artigos publicados. No apêndice A temos um pouco do que denominamos contexto histórico, onde contamos brevemente um pouco da vida e obra de Liouville e Shafranov. No apêndice B temos a base teórica matemática com os resultados preliminares usados na tese. Por fim, no apêndice C colocamos um pouco dos códigos feito em Python usados na tese para consulta.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo encontra-se toda a fundamentação teórica deste trabalho. Na seção 2.1 tem-se os conceitos físicos de possíveis eventos, que podem ser estudados através da equação GS. Em seguida, apresenta-se o formalismo físico-matemático de como encontrar a equação de GS. Já na seção 2.3 aborda-se, através da teoria cinética, um modo de encontrar a equação específica de GS. Em seguida, descreve-se uma forma de encontrar as singularidades através do método de *Génot*. Nas seções 2.5 e 2.6 formaliza-se os caminhos para se encontrar a solução numérica da equação de GS, e também a base para a reconstrução de um tubo de fluxo usando a equação de GS. Na seção 2.7 é apresentado de modo breve, o estado da arte de possíveis aplicações usando a equação GS. Por fim, em 2.8 lançam-se os conceitos teóricos para calcular a velocidade de fase de uma onda magnetoacústica.

2.1 Conceitos Físicos Preliminares

Esta seção será dedicada a explicar alguns conceitos físicos preliminares importantes para o entendimento dos fenômenos que podem ser estudados através das Equações de GS, que são os seguintes: lâmina de corrente, reconexão magnética e ondas de Alfvén. Também aproveitamos para explicar o significado de pontos singulares e sua tipologia.

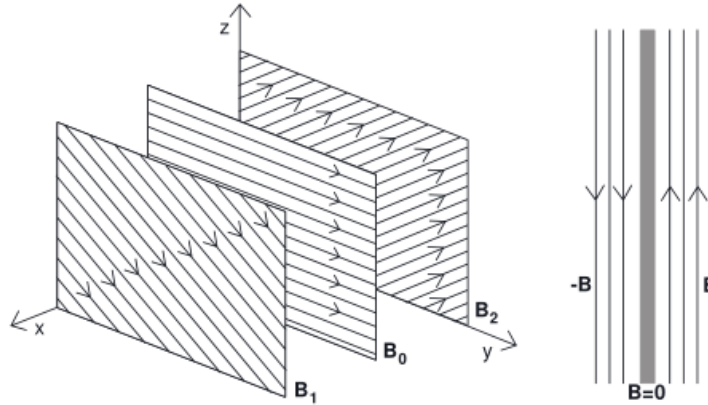
2.1.1 Lâminas de Corrente

Segundo Parnell (2000), define-se uma lâmina de corrente – do inglês, *current sheet* – como uma concentração fina e alongada de corrente em uma região entre linhas anti-paralelas de um campo magnético. Esta noção está relacionada a uma descontinuidade tangencial em um limite não propagante entre dois plasmas, ou seja, numa linha-X, quando o sistema é forçado, por exemplo, em uma evolução magnetohidrodinâmica ideal (NESS, 1965; OLIVEIRA, 2020). A formação da própria lâmina de corrente é consequência do encontro de dois ou mais regimes de plasmas com suas respectivas configurações magnéticas, podendo interagir de tal forma que os plasmas se tornem interconectados, estabelecendo, assim, uma troca de energia, massa e momento em pequena e larga escala que poderia levar às condições ideais para acontecer a reconexão magnética (GIOVANELLI, 1946; DUNGEY, 1961; SOUZA *et al.*, 2016; ZWEIBEL; YAMADA, 2016; FERREIRA *et al.*, 2017).

Quando $B = 0$, temos uma lâmina neutra. No entanto, nem todas as lâminas são neutras (ver a Figura 1). No interior de uma lâmina de corrente, o campo magnético evolui por difusão, enquanto que fora dela o campo magnético é advectivo, e assim sua

evolução é definida por MHD-ideal (PARNELL, 2000).

Figura 1 – (a) O campo magnético nos planos de cada lado de uma lâmina de corrente com um campo B_0 uniforme. Considerando íons positivos, a lâmina de corrente está orientada ao longo do eixo Z . (b) O campo magnético de cada lado de uma lâmina neutra. Para íons positivos a corrente sai da lâmina.



Fonte: Figura 10 de (PARNELL, 2000)

A lâmina de corrente na cauda magnética terrestre foi encontrada pela primeira vez por Ness (1965). Posteriormente, foi também encontrada por diversos autores em lugares como: O sol, os cometas, a heliosfera, a magnetosfera, o vento solar, o disco de acreção de galáxias entre outros (YOON; LUI, 2005; OJEDA-GONZALEZ. *et al.*, 2018). Ou seja, pode-se dizer que lâmina de corrente é uma região com aspecto de “lâmina ou chapa”, sendo que a mesma separa regiões de campo magnético opostos na cauda magnética (NESS, 1965).

Em certas condições, pode-se considerar as linhas de campo como estando “congeladas” no fluido, ou seja, quando em certo elemento de fluido o fluxo de campo magnético em um contorno fechado que se move com o plasma é constante (ALFVÉN, 1942; ALFVÉN, 1943; COSTA Jr. *et al.*, 2011; SOUZA *et al.*, 2016; CRISTALDO-OLIVEIRA *et al.*, 2020). Embora o teorema do “campo congelado” seja válido para a maioria das regiões do plasma que estudamos, existem regiões planas entre ambos os campos magnéticos distintos nas quais partículas carregadas poderiam fluir na forma de lâmina de corrente. As lâminas de corrente são regiões estreitas de grande densidade de corrente (\vec{J}). A lei de Ampère ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$) nos diz que rápidas mudanças espaciais em \vec{B} , como por exemplo entre duas regiões de campos antiparalelos, é uma assinatura necessária para formação de lâminas de corrente. Em ambos os lados da lâmina de corrente, o campo magnético é transversal à fronteira e, portanto, eles constituem uma forma de descontinuidade tangencial. Não há fluxo de velocidade através do limite que, uma vez que é estacionário, deve estar em equilíbrio de pressão total, portanto:

$$p_1 + \frac{B_1^2}{2\mu_0} = p_2 + \frac{B_2^2}{2\mu_0}, \quad (2.1)$$

em que p_1 e B_1 são a pressão de plasma e a intensidade do campo magnético de um lado da lâmina de corrente, e p_2 e B_2 são a pressão de plasma e o campo magnético do outro lado (PARNELL, 2000).

2.1.2 Reconexão Magnética

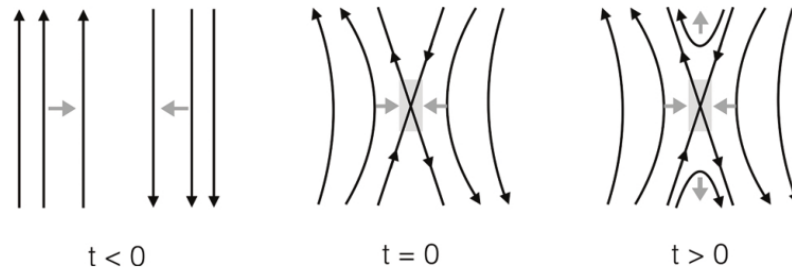
Sabemos que diversos fenômenos que acontecem no interior da magnetosfera e na atmosfera solar podem ser melhor explicados se entendermos os mecanismos da reconexão magnética entre as linhas de campo magnético (PARKER, 1957; SWEET, 1958; DUNGEY, 1961; ZWEIBEL; YAMADA, 2016; PHAN *et al.*, 2018; KOGA *et al.*, 2019). Este conceito de reconexão magnética foi introduzido por Giovanelli (1946), sendo mais tarde utilizado por Dungey (1961) para explicar a troca de energia entre o vento solar e a magnetosfera. Os fenômenos que podem estar ligados direta ou indiretamente ao mecanismo da reconexão magnética são: explosões solares – do inglês, *solar-flares*, – ejeções de massa coronal, sub-tempestades geomagnéticas, tempestades geomagnéticas e eventos de transferência de fluxo – ou simplesmente FTE – do inglês, *flux transfer events*.

No meio interplanetário, por exemplo, encontramos o fenômeno de “campo congelado”. Mas existem regiões no Universo, como por exemplo as magnetosferas planetárias e atmosferas de estrelas, onde o plasma é muito resistivo e as linhas de campos deixam de estar congeladas, criando uma região de difusão magnética onde a geometria do campo faz com que as linhas se reconectem (COWLEY, 1996). Temos também reconexões no lado diurno e noturno do campo magnético da Terra. Essas reconexões dão vazão a outros processos físicos que favorecerão o povoamento do anel de corrente equatorial e aceleram partículas na direção dos polos terrestres, provocando o surgimento das auroras (DUNGEY, 1961).

Plasmas magnetizados são comuns no universo. Eles são normalmente encontrados com seus campos magnéticos intrínsecos. Quando esses dois regimes diferentes de plasma se encontram, pode ocorrer a reconexão magnética, como observado na Figura 2. A reconexão, em outras palavras, permite que as linhas de campo sejam retorcidas, graças a alguma instabilidade ou zona de difusão. Sendo assim, as linhas de campo podem se quebrar e rearranjar rapidamente (PARKER, 1957).

Desde os primeiros estudos, o modelo de reconexão ocorre quando o campo magnético interplanetário é orientado na direção oposta ao campo geomagnético da Terra (DUNGEY, 1961). Temos aí a possibilidade, que é amplamente aceita, de tempestades magnéticas (GONZALEZ *et al.*, 1994). Além da orientação do campo magnético, sua intensidade também é muito importante para ocorrência de reconexão, pois campos intensos e de grande duração têm maior transferência de energia, e isso acaba sendo responsável por variações nos sistemas de corrente e de campo. Denominamos este efeito por atividade geomagnética (COSTAJR *et al.*, 2011).

Figura 2 – Temos a ocorrência, em duas dimensões, de reconexão magnética para três intervalos de tempo distintos. Para $t < 0$ (antes da formação do ponto tipo- X e da região de difusão), temos campos magnéticos antiparalelos, para $t = 0$, ainda não temos reconexão magnética, apenas vemos a marcação da região de difusão com o ponto- X formado. As setas cinzas mostram o movimento das linhas de campo saindo em $t > 0$ da região central, com as linhas de campo já reconectadas.



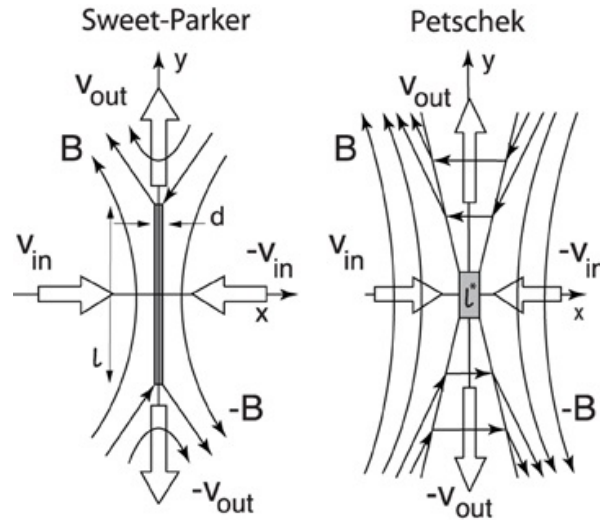
Fonte: Figura 1 de (SOUZA *et al.*, 2016)

As primeiras descobertas quanto à reconexão magnética, datam de meados da década de 70 do século XX. De lá pra cá, tivemos várias missões espaciais. A missão *Magnetospheric Multi Scale* (MMS), da NASA, que consiste em quatro naves espaciais instrumentadas de forma idêntica que voam em uma formação tetraédrica perto da magnetopausa, foi lançado em 12 de março de 2015, para responder perguntas abertas sobre a reconexão magnética na magnetosfera. Com resolução de tempo sem precedentes (da ordem de algumas dezenas de milissegundos), é possível investigar processos físicos que ocorrem em comprimentos de escala pequenos, na ordem do raio de Larmor ($r_c = m_e v_{\perp} / |q_e| B$) de elétrons (PHAN *et al.*, 2018).

Atualmente temos vários modelos teóricos de reconexão magnética. Vamos mostrar aqui dois: os de *Sweet-Parker* e de *Petschek*. Não vamos entrar em detalhes no mecanismo de funcionamento de ambos, considerados clássicos na área. Para mais detalhes, ver os trabalhos de Parker (1957), Sweet (1958). O importante é notar que a grande diferença entre eles se deve ao tamanho da região de difusão, (vide Figura 3). Isso faz com que, no primeiro modelo, o processo de reconexão seja lento, e no segundo este processo seja rápido. Os modelos analíticos que serão apresentados como resultado desta tese também terão uma configuração magnética com a presença de ponto neutro tipo- X .

Tendo em vista este cenário, a reconexão magnética que ocorre na magnetosfera terrestre é um importante fenômeno a ser considerado na ocorrência de sub-tempestades e tempestades geomagnéticas (GONZALEZ *et al.*, 1994; KLAUSNER *et al.*, 2016), que por sua vez pode interferir em nossa Tecnologia de Satélites e redes elétricas (SCHWENN, 2006). Desta forma, a equação de GS apresentada nesta tese pode ser importante e auxiliar no estudo da reconexão magnética, podendo ser usada para fazer reconstruções em

Figura 3 – Segue a ilustração dos dois modelos de reconexão magnética: *Sweet-Parker* e *Petschek*. Note que a grande diferença se deve à região de difusão. A primeira, mais alongada e achatada, e a segunda mais curta e mais larga. Destacamos que ambos os modelos têm coexistência de campo nulo e topologia em X , chamado de ponto neutro tipo- X .



Fonte: Adaptado Figura 1 de [Treumann e Baumjohann \(2013\)](#)

modelos semi-empíricos na magnetosfera e no vento solar ([HAU; SONNERUP, 1999](#); [SONNERUP; HASEGAWA; PASCHMANN, 2004](#); [SONNERUP et al., 2006](#); [ISAVNIN; KILPUA; KOSKINEN, 2011](#); [HU, 2017](#); [OJEDA-GONZÁLEZ et al., 2017a](#); [CRISTALDO-OLIVEIRA et al., 2020](#)).

2.1.3 Ondas Alfvén

Um outro conceito que será importante para dar suporte à pesquisa aqui apresentada é o estudo de ondas magnetohidrodinâmicas em plasmas, que inclui as ondas de *Alfvén* ([ALFVÉN, 1942](#); [ALFVÉN, 1943](#); [ALFVÉN, 1977](#)).

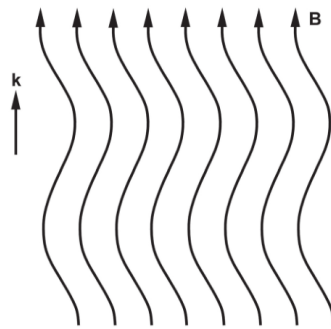
Devido à alta condutividade (baixa resistividade) do fluido magneto-condutor, diz-se que as partículas permanecem “congeladas” nas linhas de campo ([ALFVÉN, 1942](#); [ALFVÉN, 1977](#); [PARNELL, 2000](#); [JR et al., 2011](#); [SOUZA et al., 2016](#)). Esse “congelamento” possibilita o surgimento de outros tipos de ondas, que estão relacionadas com a oscilação de baixa frequência das linhas de campo, como se fossem cordas vibrando em um violão ([SCHINDLER, 2006](#)). A analogia física de considerar as linhas do campo magnético como cordas, implica que essas ondas devem ser transversais. Ou seja, o vetor de onda \vec{k} é perpendicular à sua velocidade de propagação. Por exemplo, se considerarmos um tubo de fluxo magnético, haverá uma força de tração por unidade de área de valor $T = B^2/\mu_0$, nas duas extremidades do tubo que esticam as linhas ([FERREIRA et al., 2017](#)). Além disso, devido à presença de tubos vizinhos, uma pressão isotrópica (que não

depende da direção) atua no tubo de fluxo fazendo-o oscilar transversalmente com baixa frequência. Esta oscilação transversal das linhas se move em forma de uma onda com velocidade v_A , conhecida como velocidade de Alfvén em homenagem ao cientista *Hannes O. G. Alfvén*, que as descobriu em 1942 (ALFVÉN, 1942; ALFVÉN, 1943; ALFVÉN, 1977). Estas ondas não causam compressões ou rarefações no fluido magneto-condutor (COSTA Jr. *et al.*, 2011). A expressão matemática para calcular v_A é:

$$v_A = \left(\frac{\text{força de tração por unidade de área}}{\text{densidade do fluido}} \right)^{1/2} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho_m}}, \quad (2.2)$$

em que ρ_m é a densidade do fluido. As ondas de Alfvén podem ser encontradas, por exemplo, na atmosfera solar, no vento solar, na magnetosfera terrestre, plasmas astrofísicos e produzidos em laboratórios (CRAMER, 2001; GONZÁLEZ *et al.*, 2014; PRESTES; KLAUSNER; OJEDA-GONZÁLEZ, 2017; GONZÁLEZ-AVILÉS *et al.*, 2019; JAUER *et al.*, 2019).

Figura 4 – Temos a geometria das ondas Alfvén. A velocidade de propagação se dá ao longo das linhas de campo magnético, fazendo o movimento senoidal ao longo das linhas de campo. Já o movimento do fluido e das perturbações são perpendiculares às linhas de campo.



Fonte: Figura 2 de (BITTENCOURT, 2018a)

As ondas de Alfvén, descobertas por *Hannes Alfvén* (ALFVÉN, 1942), são oscilações eletromagnéticas transversais de baixa frequência, fundamentais em plasmas magnetizados. As ondas de Alfvén são predominantes na natureza e em plasmas de laboratório. Por exemplo, muitas vezes as ondas de Alfvén são estimuladas por partículas carregadas e energizadas, produzidas durante tempestades geomagnéticas (na magnetosfera) ou aquecimento em plasmas espaciais e de fusão (na atmosfera solar). As ondas de Alfvén, manifestadas como oscilações geomagnéticas, também são frequentemente observadas na magnetosfera da Terra, devido a perturbações do vento solar. Como as ondas de Alfvén carregam perturbações eletromagnéticas e cinéticas, partículas carregadas podem trocar energia e momento com as ondas, resultando em aceleração, aquecimento e transporte

através do campo magnético (LEROY, 1983; CRAMER, 2001). Uma propriedade importante é a ausência de flutuações na densidade do fluido (ρ_m) ou pressão (p), devido à condição do congelamento nas linhas de campo (ALFVÉN, 1942).

2.1.4 Pontos Neutros e Ponto singular

Alguns pontos importantes para nossa análise aparecerão nos gráficos de soluções analíticas apresentadas mais adiante. Esses pontos são ditos pontos neutros ou nulos, e são dois os tipos, a saber tipo- X e tipo- O . Sabemos que nesses pontos temos campo magnético nulo. Esses dois tipos de pontos são importantes também, pois na vizinhança deles costumam ocorrer lâminas de corrente. Temos também o ponto tipo- S , ou singular. Neste tipo de ponto temos o campo magnético tendendo ao infinito, ou seja, é o inverso do que ocorre com os pontos tipo neutros. Tais pontos são retirados da análise gráfica, pois tratam de alguma indeterminação matemática.

Considerando $\vec{B}(x, z)$, e expandindo este campo em série de *Taylor* em torno de um ponto neutro, mantendo apenas os termos lineares, obtemos a seguinte forma:

$$\begin{cases} B_{x^*} = bx^* + 2cz^* \\ B_{z^*} = -2ax^* + dz^* \end{cases} \quad (2.3)$$

em que a, b, c e d são constantes arbitrárias (PRIEST; FORBES, 2000).

Após vários cálculos para resolver o sistema, e chamando a parte constante dessa solução de $\bar{\alpha}$, logo depois de fazer uma rotação dos eixos (X^*, Z^*) por um ângulo θ para o sistema de referência (X, Z), encontramos uma expressão para a função do potencial vetor magnético. No entanto, sabemos que as linhas de campo magnético são dadas pelo potencial vetor magnético. Este, por sua vez, tem a seguinte equação ¹:

$$1 = \frac{B_0}{2LA_y} (z^2 - \bar{\alpha}x^2) = [T \cdot m], \quad (2.4)$$

sendo L o comprimento de escala sobre o qual o campo está variando a partir do valor inicial B_0 (SOUSA, 2018).

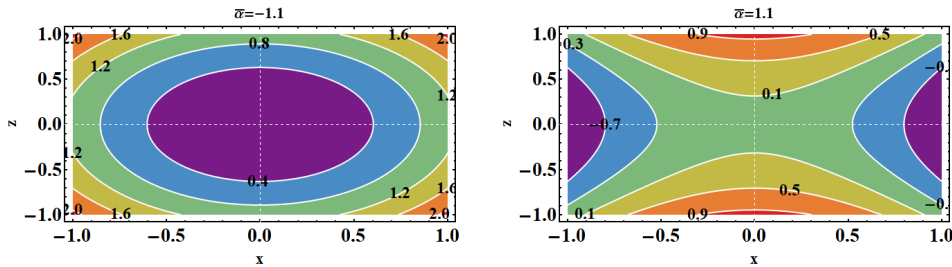
O vetor campo magnético, \vec{B} , quando relacionado com o valor do parâmetro adimensional $\bar{\alpha}$ e com a densidade de corrente J , além da lei de *Àmpere* satisfaz

$$\vec{J} = - \left(\frac{B_0}{\mu_0 L} \right) (1 - \bar{\alpha}) \hat{y}, \quad (2.5)$$

com \hat{y} saindo do plano XZ .

A equação (2.4) pode representar duas figuras geométricas dependendo do valor de $\bar{\alpha}$, no gráfico de contorno do potencial vetor magnético $A_y(X, Z)$ (fixando $B_0 = 1$ e $L = 1$), conforme Figura 5. Se $\bar{\alpha} < 0$, então temos uma elipse, ou seja, um ponto

Figura 5 – As figuras representam as linhas de campo dada pela componente y do potencial vetor magnético em (2.4), para $\bar{\alpha} = -1, 1$ (painel da esquerda) e $\bar{\alpha} = 1, 1$ (painel da direita), em uma grade retangular XZ de -1 a 1 em ambos os eixos. Estes são os dois tipos de figuras geométricas que podem aparecer nos gráficos das soluções da equação de *Grad-Shafranov*. Note também que no ponto tipo- X temos as linhas limites que são denominadas separatrizes, e essas passam pela origem do sistema.



Fonte: Adaptado Figura 2 de [Sousa \(2018\)](#)

tipo- O . Se $\bar{\alpha} > 0$, temos uma hipérbole, logo um ponto tipo- X . Seguindo o trabalho de [Sousa \(2018\)](#), temos algumas considerações importantes para a reconexão magnética e esses tipos de pontos. Destacamos a importância da existência de uma região de difusão para reconexão magnética. Desse modo, temos os seguintes casos:

1. Duas linhas de campo antiparalelas se cruzam em uma região de campo congelado (condutividade infinita), surgindo assim um ponto tipo- X , porém não temos reconexão, ou
2. Duas linhas antiparalelas se cruzam em uma região de difusão do espaço, surgindo assim um ponto tipo- X , e $J = 0$. Neste caso, as separatrizes formam um ângulo de $\theta = 45^\circ$ com o eixo X , e teremos reconexão.
3. As linhas de campo formam um ponto tipo- O , logo $J \neq 0$. No entanto, dentro da região de difusão não temos reconexão. Porém, se tivermos algum tipo de instabilidade, pode ocorrer reconexão.
4. Temos um ponto tipo- X , mesmo que $J = 0$ em suas proximidades. Neste caso teremos uma lâmina de corrente associada a cada um dos campos magnéticos em ambos os lados do ponto- X , que deve ter o mesmo sentido;

2.2 Equação de GS

Nesta seção será apresentado o desenvolvimento teórico-matemático para obter a equação de GS (1.5), tendo como base os trabalhos de [Sonnerup et al. \(2006\)](#), [Ojeda-González et al. \(2015\)](#). Na teoria MHD, em estruturas 2, 5-dimensionais e estacionárias, a

¹ Ver detalhes em [Sousa \(2018\)](#)

força de *Lorentz* deve ser equilibrada por uma força ou gradiente de pressão. Este resultado é conhecido como equilíbrio magnetostático:

$$\nabla p = \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.6)$$

em que \vec{J} é a densidade de corrente e p a pressão do plasma. Esta equação vetorial será analisada considerando como invariante o eixo Y ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$).

Uma maneira conveniente de desenvolver a análise é denotando os vetores no plano XZ por \perp . Desta forma, (2.6) é reescrita como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \hat{x} + 0\hat{y} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} = \left(\vec{J}_{\perp} + J_y \hat{y} \right) \times \left(\vec{B}_{\perp} + B_y \hat{y} \right). \quad (2.7)$$

Utilizando a propriedade distributiva no produto vetorial do termo à direita da equação (2.7) o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} = & J_y \left(\hat{y} \times \vec{B}_{\perp} \right) + \left(\vec{J}_{\perp} \times \hat{y} \right) B_y \\ & + J_y B_y (\hat{y} \times \hat{y}) + \vec{J}_{\perp} \times \vec{B}_{\perp}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

No membro direito, o primeiro e o segundo termos estão no plano XZ (ou \perp), o terceiro termo é zero e o quarto termo é um vetor paralelo ao eixo Y . No entanto, como a componente y do vetor no membro esquerdo é zero, a componente y do membro direito também deve ser zero, e portanto $\vec{J}_{\perp} \times \vec{B}_{\perp} \equiv 0$, uma vez que $\vec{J}_{\perp} \parallel \vec{B}_{\perp}$, ou seja, os portadores de carga se movimentam, pela própria inércia, alinhados às linhas de campo magnético no plano XZ . Isto faz com que o sistema seja considerado livre de força (magnética) fora do plano XZ , mas no espaço 3-D o sistema não é completamente livre de força: há uma força (∇p) no plano XZ que garante o equilíbrio com a força resultante de ambos produtos vetoriais: \vec{J}_y com \vec{B}_{\perp} e \vec{J}_{\perp} com \vec{B}_y (OJEDA G. *et al.*, 2013). A equação (2.6) finalmente se reduz a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} = J_y \left(\hat{y} \times \vec{B}_{\perp} \right) + \left(\vec{J}_{\perp} \times \hat{y} \right) B_y. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) vai se transformar na equação de GS, mas para isso teremos que expressar ambos os termos em função da componente y do vetor potencial magnético \vec{A} e fazer vários artifícios matemáticos. No primeiro momento, as expressões para $J_y \hat{y}$ e \vec{J}_{\perp} devem ser procuradas a partir da lei de *Ampère* como segue:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \left(\vec{J}_{\perp} + J_y \hat{y} \right). \quad (2.10)$$

A seguir, para simplificar os cálculos, o campo magnético será escrito como uma função do potencial vetor \vec{A} . Devido à lei de *Gauss* para o magnetismo, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, \vec{B} sempre pode ser escrito como o rotacional de um vetor, ou seja $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Isto ocorre porque $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$. Neste problema, $A_y(x, z)$ é usado, ou seja, usamos a componente y do potencial vetor \vec{A} . Portanto, o vetor campo magnético pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \nabla \times (A_y(x, z) \hat{y}) + B_y(x, z) \hat{y}, \quad (2.11)$$

com $A_y(x, z)$ diretamente relacionado ao fluxo magnético no plano XZ . Porém, as linhas de campo nesse plano são representadas por uma família de linhas de contorno fechadas $A_y(x, z) = c$ (SONNERUP *et al.*, 2006). Outra forma conveniente de escrever \vec{B} é a seguinte:

$$\vec{B} = \left(-\frac{\partial A_y(x, z)}{\partial z}; B_y(x, z); \frac{\partial A_y(x, z)}{\partial x} \right). \quad (2.12)$$

As equações (2.11) e (2.12) levam à interpretação de que \vec{B} é perpendicular ao gradiente de $A_y(x, z)$, no entanto, o produto escalar entre ambos vetores será nulo, ou seja:

$$\vec{B} \cdot \nabla A_y(x, z) = \nabla \times (A_y \hat{y}) \cdot \nabla A_y + B_y \hat{y} \cdot \nabla A_y = 0. \quad (2.13)$$

A partir do produto escalar de (2.9) e (2.11), teremos que:

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0. \quad (2.14)$$

As equações (2.13) e (2.14) implicam que A_y e p são constantes ao longo das linhas de campo magnético (OJEDA-GONZÁLEZ *et al.*, 2015).

Neste momento, convém aplicar o operador rotacional na equação (2.11) e utilizar a identidade matemática $\nabla \times (\nabla \times \vec{C}) = -\nabla^2 \vec{C} + \nabla(\nabla \cdot \vec{C})$, isto é:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times (A_y \hat{y})) + \nabla \times (B_y \hat{y}) \quad (2.15)$$

$$= -\nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla \underbrace{[\nabla \cdot (A_y \hat{y})]}_{=0} + \nabla B_y \times \hat{y}. \quad (2.16)$$

Igualando os termos da direita de (2.10) e (2.16), segue:

$$\vec{J}_\perp + J_y \hat{y} = \frac{1}{\mu_0} \nabla B_y \times \hat{y} - \frac{\nabla^2 A_y}{\mu_0} \hat{y}, \quad (2.17)$$

em que

$$\vec{J}_\perp = \frac{1}{\mu_0} \nabla B_y \times \hat{y} \quad (2.18)$$

e

$$J_y \hat{y} = -\frac{\nabla^2 A_y}{\mu_0} \hat{y}. \quad (2.19)$$

Como indicado nos parágrafos anteriores, os vetores \vec{J}_\perp e \vec{B}_\perp são paralelos, de modo que o vetor ∇B_y é perpendicular a \vec{J}_\perp e \vec{B}_\perp , respectivamente. Lembramos que ∇A_y está no plano XZ , ou seja, $\nabla A_y \perp \hat{y}$. Com a seguinte identidade vetorial, $\vec{C} \times (\vec{D} \times \vec{E}) = \vec{D}(\vec{E} \cdot \vec{C}) - \vec{E}(\vec{D} \cdot \vec{C})$, e usando a equação $\vec{E}_\perp = \nabla D \times \hat{y}$, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{y} \times \vec{B}_\perp &= \hat{y} \times (\nabla A_y \times \hat{y}) \\ &= \nabla A_y (\hat{y} \cdot \hat{y}) - \hat{y} (\nabla A_y \cdot \hat{y}) \\ &= \nabla A_y. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como $\nabla A_y \perp \hat{y}$, $\hat{y} \times \vec{B}_\perp$ é um vetor no plano XZ .

A partir de (2.18) e com a identidade vetorial $(\vec{D} \times \vec{E}) \times \vec{C} = \vec{E}(\vec{D} \cdot \vec{C}) - \vec{D}(\vec{E} \cdot \vec{C})$, obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \vec{J}_\perp \times \hat{y} B_y &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla B_y \times \hat{y}) \times \hat{y} B_y \\ &= \frac{B_y}{\mu_0} [\hat{y} (\nabla B_y \cdot \hat{y}) - \nabla B_y (\hat{y} \cdot \hat{y})] \\ &= -\frac{B_y}{\mu_0} \nabla B_y. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ainda na equação anterior, foi considerado que $\nabla B_y \perp \hat{y}$. A equação (2.21) representa um vetor no plano XZ . Fazendo a substituição de (2.19), (2.20) e (2.21) em (2.9), obtemos:

$$\nabla p = -\frac{1}{\mu_0} \{ [\nabla^2 A_y] \nabla A_y + B_y \nabla B_y \}. \quad (2.22)$$

Como os vetores ∇A_y e ∇B_y estão no plano XZ , (2.22) representa um vetor no mesmo plano. Uma vez que p e ∇B_y são constantes ao longo de uma linha de campo e devem ser apenas funções de A_y , as expressões ∇p e ∇B_y podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\nabla p = (dp/dA_y) \nabla A_y \quad (2.23)$$

e

$$\nabla B_y = (dB_y/dA_y) \nabla A_y. \quad (2.24)$$

Substituindo ambas equações em (2.22), teremos que:

$$\frac{dp}{dA_y} \nabla A_y = -\frac{1}{\mu_0} \left\{ [\nabla^2 A_y] \nabla A_y + B_y \frac{dB_y}{dA_y} \nabla A_y \right\}. \quad (2.25)$$

Multiplicado por $\frac{1}{\nabla A_y}$, a equação anterior é reescrita como:

$$\frac{\nabla^2 A_y}{\mu_0} = -\frac{dp}{dA_y} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{dB_y^2}{dA_y}. \quad (2.26)$$

Como resultado, se obtém a equação de *Grad-Shafranov* (1.5), apresentada na introdução. Na seção 2.5 se explicam as especificidades da solução numérica desta equação, já que a mesma não possui solução analítica. A seguir encontra-se uma versão mais “simples” dessa equação, onde podemos encontrar soluções analíticas.

2.3 Teoria Cinética para se Obter a Equação Específica de GS

A equação específica de GS obtida por Kan (1973), a partir da Teoria Cinética de Plasma, resolvendo o conjunto de equações de Vlasov-Maxwell, considerou uma expressão de distribuição de velocidade como uma função do fator de *Boltzmann* da estatística de

Maxwell-Boltzmann. O desenvolvimento detalhado de toda a formulação Física-teórica usando a Teoria Cinética pode ser encontrado em [Cristaldo-Oliveira et al. \(2020\)](#) (com a colaboração do autor desta tese), e cujos detalhes serão apresentados a seguir.

Para se chegar à equação específica de GS usando teoria cinética, tem-se, primeiramente, que definir uma função distribuição f_α , que nos dará as variáveis macroscópicas do plasma, isto tudo dentro de um espaço de fase, $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{d^3 r d^3 v}$. Para isso, utiliza-se N_α como sendo a quantidade de partículas da espécie ou tipo α , na posição \vec{r} , com velocidade \vec{v} no tempo t . Sendo que, $d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é o número de partículas da espécie α que está no interior de um elemento de volume $d^3 r$, com velocidade \vec{v} dentro de $d^3 v$ no instante t .

Também considera-se ausência de interações internas (choques) das partículas e que estas estejam sob uma força externa. Após todas essas considerações e fazendo uma expansão por série de Taylor em f_α (função distribuição), obtém-se a equação de *Boltzmann*:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \vec{a} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0, \quad (2.27)$$

sendo o vetor \vec{a} a aceleração da partícula e \vec{v} a sua velocidade. Observe que estamos usando a notação do operador nabla tanto para \vec{r} ,

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.28)$$

como para \vec{v} ,

$$\nabla_{\vec{v}} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial v_z}. \quad (2.29)$$

A equação (2.27) em \vec{a} pode ser reescrita em termos de forças externas e internas (força de *Lorentz*), onde \vec{F}_{total} é a soma das forças externas com as forças internas decorrentes de campos eletromagnéticos internos \vec{E}_i e \vec{B}_i , consequentes do movimento entre as partículas e que formam a força de *Lorentz*. Neste caso, a equação passa a ser chamada de equação de *Vlasov*. Segue então o sistema de equações de *Vlasov-Maxwell*:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} [\vec{F}_{ext} + q_\alpha (\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i)] \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0, \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \vec{B}_i = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} \right), \quad (2.31)$$

$$\vec{J}(x, z, t = 0) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\vec{v}} \vec{v} f_{\alpha}(x, z, \vec{v}) d^3 v, \quad (2.32)$$

$$\rho(x, z, t = 0) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\vec{v}} f_{\alpha}(x, z, \vec{v}) d^3 v. \quad (2.33)$$

Este sistema de *Vlasov-Maxwell*, (2.30)–(2.33), serve para estudar o plasma confinado em um campo magnético. Fazendo mais algumas considerações, como $F_{ext} = 0$,

$E_i = 0$ (de plasma confinado) e f_α independente do tempo, pode-se simplificar o problema considerando-o MHD ideal.

Supondo que o plasma está em equilíbrio termodinâmico, então podemos considerar que na vizinhança de qualquer ponto existe equilíbrio, e teremos uma função contínua de velocidades considerando a estatística de *Maxwell-Boltzmann* para f_α . Para obter uma expressão final de f_α temos duas considerações a fazer: *i*) os íons positivos se movimentam com uma velocidade de deriva U_i , no sentido positivo do eixo Y , e os elétrons com velocidade U_e no sentido oposto. Para manter a notação, na equação a velocidade de deriva aparecerá como U_α ; *ii*) a função de distribuição deverá depender de constantes de movimento, ou seja, Hamiltoniana e Momento Canônico. Após o cálculo da Hamiltoniana e da Lagrangeana relacionada à força de *Lorentz*, temos:

$$f_\alpha(x, z, \vec{v}) = n_{0\alpha} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T_\alpha} \right)^{3/2} e^{\left[\frac{-m_\alpha}{2k_B T_\alpha} (v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2 + v_z^2) - \frac{q_\alpha \phi - q_\alpha U_\alpha A_y}{k_B T_\alpha} \right]}, \quad (2.34)$$

em que $n_{0\alpha}$ é a densidade total de partículas no interior de uma esfera de raio r e T_α é a temperatura das partículas da espécie α .

Substituindo (2.34) em (2.32), obtém-se:

$$J_y(x, z) = \sum_\alpha n_{0\alpha} q_\alpha U_\alpha e^{\left[\frac{q_\alpha \phi - q_\alpha U_\alpha A_y}{k_B T_\alpha} \right]}. \quad (2.35)$$

Em consequência da equação generalizada de *Ampère* (1.4), tem-se:

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 \sum_\alpha n_{0\alpha} q_\alpha U_\alpha e^{\left[\frac{q_\alpha \phi - q_\alpha U_\alpha A_y}{k_B T_\alpha} \right]}. \quad (2.36)$$

O plasma, do ponto de vista macroscópico, é considerado eletricamente neutro. A expressão da densidade do plasma é:

$$\rho(x, z) = \sum_\alpha q_\alpha n_{0\alpha} e^{\left[\frac{q_\alpha \phi - q_\alpha U_\alpha A_y}{k_B T_\alpha} \right]}. \quad (2.37)$$

Porém, pela propriedade de neutralidade macroscópica do plasma, fica evidente que $\rho(x, z)$ precisará se anular. Para tanto, precisamos que $|q_i| = |q_e| = q$, $n_{0i} = n_{0e} = n_0$, $\frac{U_i}{T_i} = -\frac{U_e}{T_e}$ e a equação (2.36) transforma-se em:

$$\nabla^2 A_y = -2\mu_0 q n_0 k_B (T_i + T_e) \frac{q U_i}{2k_B T_i} e^{\left[\frac{q U_i}{k_B T_i} A_y \right]}, \quad (2.38)$$

sendo $q, U, T = [i, e]$ íons e elétrons. A equação (2.38) fica definida em função da carga elétrica (q), da velocidade de deriva (U), da temperatura (T), e da densidade de partículas (n_0).

Introduzindo duas constantes, temos:

$$B_0^2 = 2\mu_0 n_0 k_B (T_i + T_e) \quad (2.39)$$

e

$$L = \frac{2k_B T_i}{qU_i B_0}. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.39) e (2.40) na equação (2.38) encontramos:

$$\nabla^2 A_y = -\frac{B_0}{L} e^{-2\Psi},$$

sendo $\Psi = \frac{-A_y}{LB_0}$. Finalmente chegamos à equação específica de GS, dada no Capítulo 1 por (1.10), já com a notação uniformizada.

Na próxima seção apresenta-se um método mais simples de identificar a presença de singularidades nas soluções analíticas de (1.10).

2.4 Método de Génot para Identificar Singularidades

Os autores Yoon e Lui (2005) encontravam as singularidades de (1.10) analisando a função Ψ : se esta tinha alguma inconsistência matemática, ou seja, após analisar o domínio da função Ψ encontram-se as singularidades, o que dependendo da expressão pode ser muito trabalhoso e difícil. Mas Génot (2005) descobriu uma forma mais direta de encontrar as singularidades usando a função geradora $g(\zeta)$. Ele diz que a função geradora não pode ser arbitrária e deve satisfazer a seguinte condição:

$$\nabla \ln |g'(\zeta)| = 0, \quad (2.41)$$

tal que $g(\zeta)$ é uma função complexa.

Em outras palavras, Génot (2005) diz que podemos reescrever a equação:

$$e^{-2\Psi} = \frac{4|g(\zeta)'|^2}{[1 + |g(\zeta)|^2]^2}, \quad (2.42)$$

como

$$\Psi = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} \right) \quad (2.43)$$

Agora usando o teorema B.0.1 na equação (2.43), e alguma álgebra temos:

$$\nabla \Psi = -\nabla \ln |g'| + \nabla \ln (1 + |g|^2) = -\nabla \ln |g'| + \frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2}. \quad (2.44)$$

Note que (2.44) é igual a (2.42) se, e somente se, $\nabla \ln |g'(\zeta)| = 0$. Agora se quisermos encontrar de fato as singularidades, devemos calcular $|g'(\zeta)| = 0$, sendo esta a segunda condição de Génot.

A importância de (2.44) é que esta expressão permite determinar, a partir de, $g'(\zeta)$, os pontos singulares (X, Z) de $\Psi(X, Z)$. Ou seja, as singularidades podem ser obtidas diretamente a partir de Ψ , ou a partir dos zeros (raízes) e polos de $g'(\zeta)$ (GÉNOT, 2005; YOON; LUI, 2005b). Vamos fazer dois exemplos, um sem singularidades e outro com singularidades (SOUSA, 2018):

1. O primeiro exemplo é a solução de [Fadeev, Kvabtskhava e Komarov \(1965\)](#). Considere a função geradora:

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{1 + f_p^2 e^{i\zeta}}, \quad (2.45)$$

sendo f_p uma constante qualquer. Primeiramente, calcula-se a derivada de $g(\zeta)$:

$$|g'(\zeta)| = |(f_p + \sqrt{1 + f_p^2 e^{i\zeta}})'| = |i\sqrt{1 + f_p^2 e^{i\zeta}}|, \quad (2.46)$$

onde, usando a definição (B.0.3), obtemos:

$$[i\sqrt{1 + f_p^2 e^{i\zeta}} \cdot (-i)\sqrt{1 + f_p^2 e^{-i\zeta^*}}]^{\frac{1}{2}} = [(1 + f_p^2)e^{(i\zeta - i\zeta^*)}]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.47)$$

Agora vamos calcular $\nabla \ln |g'(\zeta)|$ usando o teorema (B.0.1):

$$\begin{aligned} \nabla \ln[(1 + f_p^2)e^{(i\zeta - i\zeta^*)}]^{\frac{1}{2}} &= 4\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \ln(1 + f_p^2)e^{(i\zeta - i\zeta^*)} \right) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \ln(1 + f_p^2) + \ln e^{(i\zeta - i\zeta^*)} \right) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} (\ln(1 + f_p^2)) + \frac{\partial}{\partial \zeta^*} (i\zeta - i\zeta^*) \right) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (-i) = 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Logo, segundo (2.48), temos a primeira condição (2.41) satisfeita. Agora vamos calcular de fato as singularidades, encontrando os zeros da função $g'(\zeta)$. Para tanto, substitui-se $\zeta = X + iZ$, na equação $|g'(\zeta)| = 0$, como segue:

$$\begin{aligned} g'(\zeta) &= [(1 + f_p^2)e^{i\zeta - i\zeta^*}]^{\frac{1}{2}} = [(1 + f_p^2)e^{i(X+iZ) - i(X-iZ)}]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sqrt{1 + f_p^2} e^{(-2Z)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{1 + f_p^2} e^{-Z}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Como a função (2.49) não apresenta zeros nem polos para nenhum valor de Z , concluímos que solução de *Fadeev* não tem singularidades.

2. No segundo exemplo, usa-se solução *NAVAL IV* de [Sousa \(2018\)](#), na qual encontra-se a seguinte função geradora

$$g(\zeta) = \sinh(ib\zeta). \quad (2.50)$$

Calculando sua derivada, temos:

$$g'(\zeta) = \sinh(ib\zeta)' = ib \cosh(ib\zeta). \quad (2.51)$$

Agora usa-se a definição (B.0.3) para calcular o módulo de $g'(\zeta)$:

$$|g'(\zeta)| = |ib \cosh(ib\zeta)| = [ib \cosh(ib\zeta) \cdot (-i)b \cosh(-ib\zeta^*)]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.52)$$

Considerando o teorema (B.0.1), segue que:

$$\nabla \ln |g'(\zeta)| = 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\ln [b^2 \cosh(ib\zeta) \cosh(ib\zeta^*)]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (2.53)$$

usando as propriedades de logaritmo e derivando os dois obtemos:

$$\nabla \ln |g'(\zeta)| = 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\frac{1}{2} \ln b^2 + \frac{1}{2} \ln \cosh(ib\zeta) + \frac{1}{2} \ln \cosh(ib\zeta^*) \right) \right) \quad (2.54)$$

$$= 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{ib \tanh(ib\zeta^*)}{2} = 4 \cdot 0 = 0. \quad (2.55)$$

Mais um vez (2.55) demonstra que (2.41) foi satisfeita, e portanto já podemos calcular os zeros da função geradora. Logo fazendo-se $|g'(\zeta)| = 0$, tem-se:

$$|\sinh'(ib\zeta)| = b |\cosh(ib\zeta)| = 0 \quad (2.56)$$

Neste ponto, usa-se a definição (B.0.5) como segue,

$$b |\cosh(ib\zeta)| = b \sqrt{\cosh^2(bZ) - \sinh^2(bX)} = 0 \quad (2.57)$$

Note que, a identidade é verdadeira se, e somente se, $Z = 0$ e $\sinh(bX) = \pm 1$. Portanto, basta que: $X = \pm \frac{\pi}{2b}$, por exemplo. Logo, $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2b}, 0 \right)$ (em que $k \in \mathbb{Z}$) são os pontos singulares, que nesse caso são periódicos.

No capítulo 3, nas seções 3.3 e 3.5 veremos os gráficos da solução de *Faddev* e *NAVAL IV*, respectivamente, e assim poderemos visualizar que, no caso de *Faddev*, não temos realmente singularidades, e que no caso *NAVAL* temos singularidades periódicas acima do eixo X .

2.5 Solução Numérica da Equação de GS

Os autores [Sonnerup e Guo \(1996\)](#), [Hau e Sonnerup \(1999\)](#) desenvolveram um método numérico para resolver a equação (1.5). Algumas melhorias na solução numérica foram propostas por [Ojeda-González et al. \(2015\)](#). De forma geral, o método consiste em fazer uma aproximação de segunda ordem em termos de uma série de *Taylor* em torno de um ponto genérico $x = x_0$ construindo uma grade retangular XZ . Este método é muito conveniente porque os dados coletados por um satélite, ao cruzar uma estrutura de plasma no meio interplanetário ou na magnetosfera, podem ser usados como condições iniciais para a implementação numérica da solução ([SOUSA, 2018](#)). Os parâmetros físicos do plasma que o satélite precisará medir são os seguintes: as três componentes da velocidade e do campo magnético e a densidade e temperatura dos prótons e elétrons. Desta forma, é feita uma **reconstrução de Grad-Shafranov (GSR)**. Desses parâmetros ao longo da trajetória do satélite para estimar e estudar várias estruturas em plasma espacial a

partir de dados, em particular de observações de nuvens magnéticas ou de tubos de fluxos magnéticos (HAU; SONNERUP, 1999; HU; SONNERUP, 2002; HU; SONNERUP, 2003; HU *et al.*, 2004; HU, 2017; OJEDA-GONZÁLEZ *et al.*, 2017a). Os principais passos para resolver numericamente a equação de GS serão apresentados a seguir.

O intuito desta seção é responder a seguinte pergunta: como justificar, do ponto de vista matemático, um método para resolver numericamente a equação de GS? Para responder à pergunta anterior, deve-se seguir os trabalhos de Sonnerup e Guo (1996), Hau e Sonnerup (1999), Ojeda-González *et al.* (2015) e Ojeda-González (2018).

O método consiste em fazer uma expansão em série de *Taylor* até segunda ordem de $A_y(x, z)$ na linha $z = 0$, ou seja, acima do eixo X . A equação resultante terá três termos para serem calculados a partir de condições iniciais. Para isto, será necessário utilizar um método de diferenças finitas e a equação de GS (1.5). Desta maneira, em cima de uma grade retangular xz predefinida, preenchem-se os valores de $A_y(x, z_0 \pm \Delta z)$ e das outras magnitudes do plasma. As peculiaridades do método numérico são apresentadas a seguir.

O desenvolvimento começa definindo a grade retangular xz . Para efeito de exemplo vamos usar a mesma grade de Hau e Sonnerup (1999), Ojeda-González *et al.* (2015), com as seguintes dimensões: $0 \leq x \leq 51$ com resolução espacial $\Delta x = 51/101$ e $-5 \leq z \leq 5$ com $\Delta z = 0, 1\Delta x$. O próximo passo é fazer a expansão em Série de Taylor de $A_y(x, z_0 \pm \Delta z)$ até segunda ordem nas imediações de $z_0 = 0$. Isto é,

$$A_y(x, \pm\Delta z) \cong A_y(x, 0) \pm \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right)_{x,0} \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right)_{x,0} (\Delta z)^2, \quad (2.58)$$

Para continuar com a resolução numérica de (2.58) há duas opções: *i*) trabalhar com dados de um satélite no interior de um tubo de fluxo² da magnetosfera ou no vento solar. Neste caso, há informações das três componentes do campo magnético, da densidade e temperatura de elétrons e prótons que se utilizam para obter a pressão cinética do plasma, da seguinte forma: $p = k_B(n_e + n_p)(T_e + T_p)/2$. *ii*) conhecendo uma solução analítica de (1.10) obtida pela fórmula de Walker (3.1) (que também permitirá obter as três componentes do campo magnético e a pressão cinética do plasma).

No primeiro dos casos, é necessário aplicar o método conhecido como reconstrução de *Grad-Shafranov* (GSR)³ (HAU; SONNERUP, 1999). Para desenvolver GSR, é preciso utilizar várias ferramentas de análise de dados, como o método de mínima variância (SONNERUP; CAHILL, 1967; ROSA-OLIVEIRA *et al.*, 2020), o sistema de referência chamado *deHofmann-Teller* (KHRABROV; SONNERUP, 1998), a correlação de *deHofmann-Teller*, a correlação de *Walén*, e o método numérico para resolver integrais e

² Tubos de fluxo são FTEs que derivam do processo de reconexão magnética. Os primeiros FTEs foram identificados basicamente por meio de alterações do campo magnético, entretanto, as regiões de reconexão, e conseqüentemente, os tubos, também podem ser detectados por mudanças na velocidade.

³ Este método está explicado na seção seguinte

interpolação com uso de splines cúbicos, o que torna o método GSR de complexa implementação computacional. O passo a passo da implementação do método e os conceitos mencionados na sentença anterior são detalhados na seção 2.6.

No segundo dos casos, todas as condições iniciais são obtidas a partir de expressões analíticas, tornando a solução numérica um problema computacional menos complexo quando comparado com GSR. A vantagem de trabalhar com a solução analítica é a possibilidade de aperfeiçoar a solução numérica, já que permite fazer comparações na grade xz entre o resultado numérico e o analítico no domínio da solução. Nesta seção, a solução numérica será apresentada a partir desta segunda perspectiva, ou seja, utilizando-se a solução analítica de [Fadeev, Kvabtskhava e Komarov \(1965\)](#) como apoio. A solução de *Fadeev* também foi utilizada nos trabalhos de [Hau e Sonnerup \(1999\)](#), [Ojeda-González et al. \(2015\)](#).

A função geradora de *Fadeev* foi apresentada em (2.45), mas será reescrita aqui, uma vez que foi inserido um parâmetro de escala b no argumento da função exponencial, como segue:

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{(1 + f_p^2)}e^{(b\zeta)}. \quad (2.59)$$

Com ela, obtém-se a seguinte solução analítica de (1.10):

$$A_y(x, z) = -(LB_0)\Psi(X, Z) = -(LB_0) \ln \left[\frac{f_p \cos(bX) + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh(bZ)}{b} \right], \quad (2.60)$$

em que L representa o comprimento de escala, B_0 é o campo magnético assintótico e $X = x/L$, $Z = z/L$. O parâmetro $f_p \in \mathbb{R}$ é utilizado para realizar manipulações no gráfico da solução ([CRISTALDO-OLIVEIRA et al., 2020](#)). A equação (2.60) não tem pontos singulares; o que facilita sua utilidade em modelos numéricos, fornecendo os parâmetros de entrada.

Segundo a equação (2.12), as componentes do campo magnético são as seguintes:

$$B_x = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (2.61)$$

$$B_y = B_0 \sqrt{\frac{e^{(2A_y/LB_0)}}{3}}, \quad (2.62)$$

$$B_z = -\frac{\partial A_y}{\partial x}. \quad (2.63)$$

A partir da equação (1.5), calcula-se a pressão cinética do plasma como:

$$p = \frac{B_0^2}{3\mu_0} e^{(2A_y/LB_0)}, \quad (2.64)$$

a pressão transversal do plasma por:

$$P_t = p + \frac{B_y^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} e^{(2A_y/LB_0)} \quad (2.65)$$

e a pressão total por:

$$P_{Total} = p + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2\mu_0}. \quad (2.66)$$

Após as definições anteriores, tem-se condições de retomar a análise de (2.58). Os dois primeiros termos da direita da equação são obtidos de:

$$A_y(x, 0) = - \int_0^x B_z(x'', 0) dx'' \text{ (aplicando método dos trapézios)} \quad (2.67)$$

e

$$(\partial A_y / \partial z)_{x,0} = B_x(x, 0). \quad (2.68)$$

Veja que ambos casos podem ser obtidos diretamente de (2.60). O terceiro termo de (2.58) é calculado a partir de (1.5):

$$\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right)_{x,0} = - \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \right)_{x,0} - \mu_0 \frac{dP_t(A_y(x, 0))}{dA_y}. \quad (2.69)$$

O primeiro termo da direita da equação anterior calcula-se a partir de diferenças finitas de segunda ordem (ver apêndice em [Ojeda-González et al. \(2015\)](#)):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \right)_i &= \frac{2A_i - 5A_{i+1} + 4A_{i+2} - A_{i+3}}{(\Delta x)^2} + \\ &+ O(\Delta x^2) \text{ (progressiva(+)) e regressiva(-)}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \right)_i = \frac{A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \text{ (central)}. \quad (2.71)$$

O método para obter o segundo termo da direita da equação (2.69) é listado a seguir:

1. Calcula-se a função:

$$P_t(x, 0) = p + \frac{B_y^2}{2\mu_0},$$

em que B_y é obtido de (2.62) e p de (2.64);

2. A partir do gráfico de $P_t(x, 0)$ por $A_y(x, 0)$, é feita uma interpolação com ajuste exponencial $P_t(A_y) = h e^{(-2A_y)}$, em que h é uma constante do conjunto dos números reais;
3. Com a função $P_t(A_y)$ obtida do ajuste exponencial pode-se obter $\left[\frac{dP_t}{dA_y} \right]_{(x;0)}$. Esta função $P_t(A_y)$ será mantida sem alterações para qualquer Δz durante a integração numérica. Neste momento, o valor de $A(x, \pm \Delta z)$ em (2.58) passa a ser conhecido, mas ainda falta realizar alguns ajustes.

O terceiro termo de (2.58) pode causar crescimentos exponenciais, provocando divergência no uso de métodos numéricos. A maneira de evitar valores com comportamentos exponenciais é com a utilização de um filtro proposto por [Hau e Sonnerup \(1999\)](#):

$$\begin{aligned}\bar{A}_{y_1} &= \omega(z)A_{y_1} + \frac{1}{2}(1 - \omega(z))(A_{y_1} + A_{y_2}), \\ \bar{A}_{y_i} &= \omega(z)A_{y_i} + \frac{1}{2}(1 - \omega(z))(A_{y_{(i-1)}} + A_{y_{(i+1)}}) \text{ e} \\ \bar{A}_{y_N} &= \omega(z)A_{y_N} + \frac{1}{2}(1 - \omega(z))(A_{y_N} + A_{y_N}), \text{ sendo que,}\end{aligned}$$

$$\omega(z) = \begin{cases} 1 & \text{para } z = 0, \\ 1 - \frac{1}{3} \left| \frac{z}{z_{max}} \right| & \text{para } \text{outro}, \\ 2/3 & \text{para } z = |z_{max}|. \end{cases} \quad (2.72)$$

No entanto, antes de passar para o seguinte Δz e calcular $A_y(x, \pm 2\Delta z)$, é necessário procurar os valores de $B_z(x, \pm \Delta z)$ e $B_x(x, \pm \Delta z)$. No cálculo da componente z , utiliza-se diferenças finitas de primeira ordem:

$$B_z(x, \pm \Delta z) = -(\partial A_y / \partial x)_{x, \pm \Delta z} \text{ onde,} \quad (2.73)$$

$$(\partial A_y / \partial x)_i = (A_{i+1} - A_{i-1}) / (2\Delta x) + O(\Delta x^2). \quad (2.74)$$

O valor de $B_x(x, \pm \Delta z)$ é obtido através da expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$B_x(x, \pm \Delta z) \cong B_x(x, 0) \pm (\partial B_x / \partial z)_{x,0} \Delta z, \quad (2.75)$$

$$\cong B_x(x, 0) \pm (\partial^2 A_y / \partial z^2)_{x,0} \Delta z. \quad (2.76)$$

Verifica-se que o segundo termo da direita também se calcula a partir de (2.69) com os respectivos passos explicados em parágrafos anteriores.

Desse modo, é possível prosseguir para calcular $A_y(x, \pm 2\Delta z)$ como segue:

$$A_y(x, \pm 2\Delta z) \cong A_y(x, \pm \Delta z) \pm \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right)_{x, \pm \Delta z} \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right)_{x, \pm \Delta z} (\Delta z)^2; \quad (2.77)$$

Os passos continuam sendo os mesmos explicados anteriormente. Em resumo, para o passo n onde $z = \pm(n-1)\Delta z \pm \Delta z$, tem-se que:

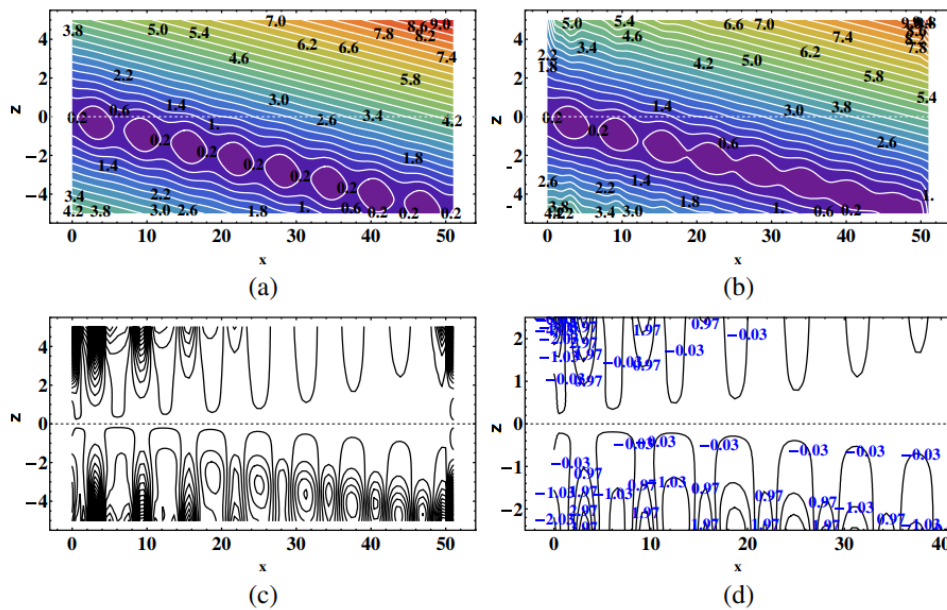
$$\begin{aligned}A_y(x, \pm n\Delta z) &\cong A_y(x, \pm(n-1)\Delta z) \pm \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right)_{x, \pm(n-1)\Delta z} \Delta z + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right)_{x, \pm(n-1)\Delta z} (\Delta z)^2, \quad (2.78)\end{aligned}$$

e a grade XZ fica completamente preenchida com os valores de $A_y(x, z)$.

Para se melhorar a solução numérica da equação de GS, é preciso obter a mesma solução que o *Benchmark*. Portanto, na Figura 6, mostra que (a) é o gráfico da solução

exata $A(x, z) = \ln \{ \alpha \cos x + \sqrt{1 + \alpha^2} \cosh z \}$; (b) é a solução numérica derivada da condição inicial. O domínio de integração foi estendido para 51 pontos no eixo X , ou seja, $0 < x < 51$, indo de -5 a 5 no eixo Z , sendo que o domínio original era de: $0 < x < 40$ e $-2, 5 < z < 2, 5$. Já em (c) mostra os contornos do erro constante $(A_{\text{calc}} - A_{\text{exact}}) / \langle |A| \rangle$, em que $\langle |A| \rangle$ é a média da magnitude de A no gráfico. Por fim, (d) é uma aproximação ou “zoom” de (c). Na Figura (b) observa-se que, conforme nos afastamos no eixo X na solução numérica, as ilhas magnéticas são reconstruídas com algumas diferenças quando comparadas com a solução analítica na Figura (a). A explicação é que o problema numérico é mal colocado (do inglês, *ill-posed problems*) logo, existe um crescimento exponencial dos erros durante a implementação da solução numérica. Para diminuir este efeito é necessário usar um filtro, o que torna a solução numérica mais precisa a medida que nos afastamos no eixo X (OJEDA-GONZÁLEZ *et al.*, 2015).

Figura 6 – Contornos de erro constante, $(A_{\text{calc}} - A_{\text{exact}}) / \langle |A| \rangle$, em que $\langle |A| \rangle$ é a média da magnitude de A no gráfico. Contornos de erro são separados por 1%. (a) Gráfico de solução analítica de $A(x, z)$; (b) Gráfico de solução numérica de $A(x, z)$; (c) Contornos de erro constante; (d) Zoom dos contornos de erro constante,



Fonte: Adaptado Figura 6 de Ojeda-González *et al.* (2015)

2.6 Reconstrução de Tubos de Fluxo Utilizando a Equação de GS

O método de reconstrução de tubos de fluxos (do inglês, *flux-ropes*) foi desenvolvido para recuperar as estruturas bidimensionais na magnetopausa⁴, usando a equação

⁴ A magnetopausa é localizada ao longo da posição de equilíbrio entre a pressão dinâmica da bainha magnética e a pressão magnética da magnetosfera, onde predomina-se a reconexão magnética como

de GS em MHD ideal. Denominamos esse método de reconstrução de *Grad-Shafranov* (GSR). Este método usa dados coletados de satélites, como condições iniciais, já que estamos lidando com um problema de *Cauchy*, que apesar de não ter solução analítica pode ser integrado numericamente. Esse método foi aplicado com sucesso, como dito na introdução, para resolver problemas de tubos de fluxo e nuvens magnéticas (MCs) no meio interplanetário. Vamos descrever os passos necessários para se aplicar o método (GSR), apresentado por [Hau e Sonnerup \(1999\)](#):

1. **Dados de Entrada:** A análise de dados utiliza um conjunto de valores, \tilde{K} , medidos, em intervalos de tempo constantes, das componentes do campo magnético (B_X, B_Y, B_Z), velocidade do plasma (v_X, v_Y, v_Z) para elétrons e prótons, densidade do plasma ρ e temperatura T , está calculada $T = (T_{\parallel} + 2T_{\perp}) / 3$ nos casos em que temos aproximadamente a anisotropia de temperatura.
2. **Análise da Mínima Variância (MVA):** Usamos MVA nos vetores de campo magnético medidos (B_X, B_Y, B_Z) em GSE, para determinar \vec{n} , o vetor normal à magnetopausa ([SONNERUP; CAHILL, 1967](#); [BOTHMER; RUST, 1997](#); [BOTHMER; SCHWENN, 1998](#); [OJEDA-GONZÁLEZ et al., 2017a](#); [OJEDA-GONZÁLEZ et al., 2017b](#); [ROSA-OLIVEIRA et al., 2020](#)). Os autovalores da matriz de variância magnética são $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Esses autovalores devem ser distintos, ou seja, não degenerados. Esta condição se cumpre quando $\lambda_2 \lambda_3^{-1} \geq 2$ ([LEPPING; BEHANNON, 1980](#)). No entanto, um estudo recente por ([ROSA-OLIVEIRA et al., 2020](#)) propôs uma nova métrica P para escolha dos autovalores não degenerados, eles devem ser em ordem decrescente e os autovetores normalizados correspondentes são: $\hat{x}_1 = \hat{B}_L, \hat{x}_2 = \hat{B}_M, \hat{x}_3 = \hat{B}_N$, em que o autovetor $\hat{x}_3 = \hat{B}_N$ é o vetor \vec{n} normal na magnetopausa.
3. **Determinar a velocidade no sistema de referência chamado de Hoffman - Teller:** A velocidade de Hoffman-Teller (HT) é uma velocidade na qual o campo elétrico residual é minimizado. A existência de um sistema de referência HT indica que um padrão quase estacionário coerente de campo magnético e velocidade de plasma, como uma onda ou camada de corrente, está presente. Se o campo elétrico medido no sistema de referência do instrumento a bordo do satélite for \vec{E} , então o campo elétrico no referencial HT , assumindo que tal estrutura exista, é $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V}_{HT} \times \vec{B} = 0$ ([KHRABROV; SONNERUP, 1998](#)). A lei de *Faraday*, avaliada no referencial HT , nos dá $\nabla \times \vec{E}' = -(\partial \vec{B} / \partial t)' = 0$. A existência do referencial HT implica que a estrutura do campo magnético amostrado é estacionária quando vista nele. Se os dados a serem analisados foram coletados dentro de regiões e estruturas onde a aproximação MHD-ideal é válida, de modo que $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \cong 0$, então o

responsável pela transferência de energia, massa e momento entre a bainha e a magnetosfera.

campo elétrico convectivo, $-\vec{v} \times \vec{B}$, pode ser usado para obter o campo elétrico (KHRABROV; SONNERUP, 1998). Para obter uma aproximação da velocidade V_{HT} a partir de um conjunto de dados experimentais, K (seguindo o trabalho de Khrabrov e Sonnerup (1998)), o valor médio do campo elétrico (denotado por $D(\vec{V})$) é o menor possível para um determinado conjunto de medições, K :

$$D(\vec{V}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left| \vec{E}'^{(k)} \right|^2 = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K \left| \left(\vec{v}^{(k)} - \vec{V} \right) \times \vec{B}^{(k)} \right|^2. \quad (2.79)$$

A velocidade HT é o valor da velocidade neste referencial, \vec{V} , que minimiza $D(\vec{V})$, ou seja, $\nabla_{\vec{V}} D(\vec{V}) = 0$. A solução é a seguinte:

$$\vec{V}_{HT} = A_0^{-1} \langle A^{(k)} \vec{v}^{(k)} \rangle, \quad (2.80)$$

onde os colchetes angulares $\langle \dots \rangle$ denotam a média de uma quantidade sobre o conjunto de K medições, e $A_0 \equiv \langle A^{(k)} \rangle$, onde A_0 é uma matriz não singular. Nessas expressões, cada $A^{(k)}$ é a matriz de projeção, $P^{(k)}$, em um plano perpendicular a $\vec{B}^{(k)}$, multiplicado por $B^{(k)2}$:

$$A_{\mu\nu}^{(k)} = B^{(k)2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{B_{\mu}^{(k)} B_{\nu}^{(k)}}{B^{(k)2}} \right) \equiv B^{(k)2} P_{\mu\nu}^{(k)}. \quad (2.81)$$

Em resumo, como resultado deste processo, calcula-se \vec{V}_{HT} de (2.80) para ser utilizado no próximo item.

4. **Correlação de Hoffman-Teller:** Uma descontinuidade tangencial (TD) é onde não temos campo magnético ao longo da componente normal, $\langle \vec{B} \rangle \cdot \hat{n} = 0$, nem qualquer transporte de plasma através da descontinuidade. Uma descontinuidade rotacional (RD) é onde uma componente de campo magnético é finita ao longo da normal, $\langle \vec{B} \rangle \cdot \hat{n} \neq 0$, e há fluxo de plasma através da fronteira. Para ter uma medida da qualidade do referencial HT , os dois campos elétricos $E^{(k)} = -\vec{v}^{(k)} \times \vec{B}^{(k)}$ e $\vec{E}'_{HT} = -\vec{V}_{HT} \times \vec{B}^{(k)}$ são esboçados um contra o outro, componente por componente. A correlação entre esses dois campos é considerada muito boa quando o coeficiente de correlação é $cc_{all} \approx 1$. Também pode-se calcular a inclinação da reta, resultado do ajuste linear no mesmo gráfico. O valor deverá ser próximo de 1. Em resumo, uma alta correlação significará a existência de uma TD onde, no modelo simples de dois fluidos, o campo magnético considera-se “congelado” no fluido do plasma ($\vec{E}' = 0$) (KHRABROV; SONNERUP, 1998). A seção transversal da magnetopausa parece ser a de uma TD básica, onde as estruturas no campo magnético transversal foram geradas pelo modo *tearing*⁵ (HAU; SONNERUP, 1999). O método de *deHoffman-Teller* é utilizado para validar o uso de GSR, ou seja, somente será possível aplicar GSR a uma estrutura de plasma quando $cc_{all} \approx 1$ e a inclinação do ajuste linear também tenha valores próximos de 1.

⁵ Tipo de instabilidade que pode acontecer no plasma.

5. **Correlação de Walén:** Este método também será de validação física do GSR, similar ao item anterior. Se examinarmos a velocidade do plasma,

$$\vec{V}' = \vec{V} - V_{HT}\vec{e}_t, \quad (2.82)$$

no referencial HT e sua relação com as medições locais da velocidade de Alfvén,

$$\vec{V}_A = \vec{B} (\mu_0 \rho_0)^{-1/2}, \quad (2.83)$$

a velocidade do plasma será pequena em comparação com as correspondentes velocidades de Alfvén e do som. Um gráfico de dispersão componente por componente dessas duas velocidades, referido como gráfico de Walén, pode ser feito (KHRA-BROV; SONNERUP, 1998). Se existir um bom referencial HT , essas flutuações podem ser interpretadas como sendo causadas por estruturas quase-estacionárias 2-D ou 3-D movendo-se além da espaçonave com velocidade de valor V_{HT} . Na prática, ao fazer o gráfico de V_A (abscissas) versus \vec{V}' (ordenadas) espera-se que a inclinação da reta, obtida por regressão linear dos dados, seja pequena, ou seja, com um ângulo de inclinação próximo de zero. Isto reforça a existência de uma TD na magnetopausa (HAU; SONNERUP, 1999).

6. **Sistema de coordenadas Grad-Shafranov:** Um tópico importante no esquema de reconstrução é o procedimento para encontrar o eixo invariante \hat{y} ótimo das estruturas 2 – D . As estruturas são tratadas como aproximadamente independentes do tempo em um sistema de referência que se move com a mesma velocidade delas, ou seja, está se referindo ao referencial *deHoffman-Teller* com velocidade constante V_{HT} . Caso a estrutura de plasma que está sendo analisada não seja estacionária, pode ser mais difícil a implementação do modelo, pois é necessário fazer um conjunto de testes antes de realizar a reconstrução. Quando encontramos uma estrutura 2 – D convectiva, pode-se proceder para definir um vetor normal ao plano GS. Lembrando a notação adotada: para os eixos do MVA usaremos a notação $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, correspondendo às direções de variância mínima, intermediária e máxima. Para definir os dois eixos no plano GS os autores Hau e Sonnerup (1999) fizeram dois ajustes. O primeiro é uma rotação em torno do eixo x_3 por um ângulo θ para dar um novo sistema de coordenadas $\hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3$, ou seja, $\hat{x}'_2 = \hat{x}_3, \hat{x}'_3 = \hat{x}_2 \cos(\theta) - \hat{x}_1 \sin(\theta)$ e $\hat{x}'_1 = \hat{x}_3 \times \hat{x}'_3$. Um ângulo de teste é usado inicialmente. O segundo é a projeção da velocidade de *deHoffman-Teller* no plano $x'_1 x'_2$, ou seja, $\vec{V}_{HTt} = (\vec{V}_{HT} \cdot \hat{x}'_1) \hat{x}'_1 + (\vec{V}_{HT} \cdot \hat{x}'_2) \hat{x}'_2$. O sistema de coordenadas GS final $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ é formado com esta projeção, isto é, $\hat{x} = -\vec{V}_{HTt} / |\vec{V}_{HTt}|, \hat{z} = \hat{x}'_3, \hat{y} = \hat{z} \times \hat{x}$.

7. **Distância ao longo do eixo x:** Se observarmos no referencial HT , a espaçonave se move com velocidade $|\vec{V}_{HTt}|$ ao longo do eixo X , no sentido de aumento dos valores de x , durante o percurso da magnetopausa (HAU; SONNERUP, 1999). Os

elementos do conjunto de dado campo magnético e pressão de plasma, são separados por distâncias $|\vec{V}_{HTt}| \tau$ ao longo de X , onde τ é o tempo entre amostras de dados consecutivas. A conversão do tempo t para a distância x ao longo do eixo X é $x = |\vec{V}_{HTt}| t$.

8. **Calcule $A_y(x, 0)$:** Devido à independência do tempo e ao fato de que \vec{V}_{HT} é um vetor constante, os intervalos de tempo podem ser convertidos diretamente em distâncias espaciais com $dx = -\vec{V}_{HT} \hat{x} dt$. O potencial vetorial $A_y(x, 0)$ ao longo de X é obtido usando a equação (2.67) deste capítulo.
9. **Calcule as pressões P_t e p :** As outras condições iniciais para fazer a reconstrução do GS são derivadas das pressões P_t e p respectivamente. A pressão do plasma é $p = k_0 N T [Pa]$, onde $N = (N_e + N_p) 10^6 [1/m^3]$ é a densidade do plasma, $T = ((T_e + T_p) / 2) 10^6 [K]$ é a temperatura, e $k_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} [J \cdot m \cdot K^{-1} = Pa \cdot m^3 \cdot K^{-1}]$ é a constante de Boltzmann. A pressão transversal, $P_t = (p + B_y^2 / 2\mu_0) [Pa]$ com $B_y [T]$ sendo a componente y do campo magnético projetado no sistema de coordenadas GS, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} [N/A^2]$ permeabilidade do espaço livre.
10. **Gráficos de P_t por $A(x, 0)$ e ajuste de Mínimos Quadrados da função:** A equação generalizada de Ampère (1.4), quando $J_y = \frac{dP_t(x,y)}{dA(x,y)}$ com $y = 0$ é transformada na equação (2.69), que reescrevemos aqui:
$$\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right)_{x,0} = - \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \right)_{x,0} - \mu_0 \frac{dP_t(A_y(x, 0))}{dA_y}$$

O segundo termo do membro direito da equação é uma derivada de primeira ordem. Uma função analítica, $P_t(A_y)$ é necessária para resolvê-lo. Uma maneira de fazer isso é preparar um gráfico de $P_t(x, 0)$ versus $A_y(x, 0)$ e ajustar a uma curva exponencial usada na reconstrução. A primeira derivada da função exponencial é uma condição inicial que é usada durante a reconstrução. Basta fazer uma função exponencial polinomial, com ajuste de mínimos quadrados.
11. **Interpolação Usando Splines Cúbicos:** A interpolação dos dados é realizada pelo uso de um spline cúbico para gerar incrementos espaciais Δx adequados para a integração, sendo $\Delta x = |(x_0 - x_N)| / \tilde{N}$, onde \tilde{N} é o número de pontos de interpolação entre cada amostra de dados original.
12. **Resolvendo Grad-Shafranov:** A equação de Grad-Shafranov resolve-se numericamente (ver Seção 2.5) com

$$\begin{aligned} & A_y(x, 0), \\ & (\partial A_y / \partial z)_{x,0} = B_x(x, 0), \\ & (\partial^2 A_y / \partial x^2)_{x,0}, \\ & (\partial A_y / \partial x)_{x,0} = -B_z(x, 0), \text{ e} \\ & [d(p + B_y^2 / 2\mu_0) / dA_y]_{x,0}, \end{aligned}$$

como dados de entrada. A solução GS gera um mapa de $A(x, z)$ em torno da trajetória da espaçonave (eixo X) com $-z_{\max} < z < z_{\max}$.

13. **Escolha do ângulo ideal de rotação (θ):** Aplique os critérios para escolha ótima do eixo Y , conforme descrito no final da seção 2.2 de [Hau e Sonnerup \(1999\)](#) com melhoria em [Hu et al. \(2003\)](#). Se esses critérios parecerem mal atendidos, volte à etapa 6, selecione um novo ângulo θ para rotação de \hat{y} em torno do vetor normal \vec{n} e repita o cálculo.
14. **Solução numérica:** Após satisfeitas todas as condições anteriores, se procede à última etapa. O método numérico é direto: um solucionador GS numérico explícito é aplicado para calcular o valor do potencial vetorial, A_y , em um domínio retangular (ver seção 2.5). O resultado final da técnica é um gráfico de contorno de linhas de campo transversais recuperadas em um domínio retangular em torno da trajetória da espaçonave, junto com as distribuições de campo axial, densidade de corrente, pressão de plasma e etc.

Em resumo, o mais difícil no esquema de reconstrução, para resolver a equação GS, é o grande número de etapas (14 no total) antes de resolver numericamente a equação.

2.7 Principais Aplicações da Equação de GS

A equação (1.5) também pode ser escrita nas configurações axialmente simétricas no sistema de coordenadas cilíndricas ([AMBROSINO; ALBANESE, 2005](#)). Esta notação é mais comumente usada na aplicação desta equação ao estudo do campo magnético confinado em um Tokamak ([ATANASIU et al., 2004](#)), área de pesquisa em que esta equação é consagrada. Neste contexto existe ainda outro método de solução explicado por [Lackner \(1976\)](#) e [Carthy \(1999\)](#), que consiste em um algoritmo que faz um ajuste pelo método dos mínimos quadrados, considerando apenas um autovalor como parâmetro não linear na solução numérica da equação GS. Este trabalho não irá abordar essas aplicações da equação de GS ao estudo do Tokamak, mas serve para mostrar a utilidade desta equação na área de Física Espacial.

A solução de Harris considera como função geradora $g(\zeta) = e^{\zeta}$, que resulta na solução unidimensional: $\Psi(Z) = \ln \operatorname{sech}^{-1}(Z)$, como podemos ver com mais detalhes na seção 3.2. Ela foi utilizada como condição inicial em uma série de trabalhos ([ARZNER; SCHOLLER, 2001](#); [BIRN; HESSE, 2001](#); [BECKER; NEUKIRCH; SCHINDLER, 2001](#); [HESSE; BIRN; KUZNETSOVA, 2001](#); [KUZNETSOVA; HESSE; WINSKE, 2001](#); [OTTO, 2001](#); [SHAY et al., 2001](#); [MA; ZHANG, 2001](#); [PRITCHETT, 2001](#)), que tinham como desafio estudar a reconexão magnética bidimensional no ambiente geoespacial, fazendo simulações magnetohidrodinâmica (MHD) – do inglês *magnetohydrodynamic* – e partícula eletromagnética na célula (PIC) – do inglês *electromagnetic particle in cell*, – executadas com os

mesmos parâmetros de entrada (BIRN; HESSE, 2001). As simulações citadas tiveram o intuito de estudar o efeito Hall na lei de Ohm generalizada e o efeito da resistividade na região de difusão dos elétrons e íons nas vizinhanças do ponto neutro tipo- X .

Várias técnicas que são consideradas aplicações da equação de GS já foram citadas na seção 1, além das aplicações dadas nas seções 2.5 e 2.6, que falam especificamente do método de reconstrução aplicado a tubos de fluxo e o método numérico para solução da equação GS, respectivamente. Nesta seção pretendemos aprofundar um pouco cada uma dessas aplicações, buscando compreender melhor as técnicas usadas e sua aplicabilidade nos mais diversos fenômenos. Não temos a pretensão de esgotar o tema, ou até mesmo trazer uma revisão completa da literatura. Queremos tão somente, de alguma forma, contribuir mostrando as principais aplicações que usam a equação GS. Começa-se resumindo as aplicações da técnica de reconstrução de *Grad-Shafranov* (GSR) para estruturas de plasma no Geoespaço.

A técnica GSR, cujo procedimento detalhado foi apresentado em (2.6), foi desenvolvida primeiramente por Sonnerup e Guo (1996) para interpretar dados de satélites para além das ferramentas convencionais da análise de séries temporais, obtendo assim mais informações de uma quantidade pequena de dados. Logo, a GSR usa um único satélite para sua execução, porém necessita de vários satélites para a validação dos resultados, melhorando assim sua confiabilidade. Esta técnica tem sido aplicada nos mais diversos cenários, como ao cruzamento da magnetopausa (HU; SONNERUP, 2000), eventos de transferência de fluxo na magnetopausa da Terra (SONNERUP; HASEGAWA; PASCHMANN, 2004), nuvens magnéticas no vento solar (HU; SONNERUP, 2002), tubo de fluxo em pequena escala no vento solar (HU; SONNERUP, 2001), tubo de fluxo na cauda magnética da Terra (LU *et al.*, 2015) e tubo de fluxo em outros ambientes planetários, como a atmosfera de Marte e a ionosfera de Vênus (HASEGAWA *et al.*, 2012).

Logo, começamos a expor as aplicações do método GSR, revisando a literatura nas suas diversas técnicas para os mais variados fenômenos (HU, 2017):

1. **Lâminas de corrente na Magnetopausa e Estruturas Associadas.** Hau e Sonnerup (1999) foram pioneiros em usar GSR para estruturas de lâmina de corrente na passagem de satélite único na travessia da magnetopausa. Por vários estudos de casos, descobriu-se que as lâminas têm diversas morfologias bidimensionais, como pontos nulos Tipo- X , ilhas magnéticas (ponto Tipo- O), e tubos de fluxo. Isto vai muito além das descontinuidades tangenciais (TD), verificadas na aproximação unidimensional. Em outras palavras, usar o resultado geral da reconstrução GS de tais cruzamentos de magnetopausa pode oferecer uma vista $2 - D$ estendida, revelando muito mais recursos do que se pode perceber a partir de dados de linha única numa trajetória satelital $1 - D$ da lâmina de corrente de um tipo TD. Temos também os Eventos de Transferência de Fluxo (FTEs) associados, onde são usados dados

de diversos satélites integrantes do *Cluster*⁶ (ESCOUBET; FEHRINGER; GOLDS-TEIN, 2001). Os FTEs são caracterizados por tubos de fluxos cilíndricos embutidos em lâminas de corrente na magnetopausa (TEH *et al.*, 2010). Temos um exemplo de um tubo de fluxo que foi recuperado usando GSR. Essa estrutura foi identificada como uma ilha magnética embutida numa reconexão magnética na magnetopausa do lado diurno, usando os satélites do grupo *THEMIS*⁷ (ANGELOPOULOS, 2008). Este evento estava na região de difusão de íons, e a verificação *in situ* confirma as características da região, mostrando como o método é efetivo nessa reconstrução do fenômeno. É importante destacar que a reconstrução do tipo GS de estruturas *HALL-MHD 2 – D* ideais ou resistivas foi desenvolvida por Sonnerup e Teh (2009) e aplicada para reconstruir estruturas de campo magnético tipo *HALL* a partir de *Clusters* na cauda magnética.

2. **Validação dos Resultados da Reconstrução GS: Correlação de Múltiplos Satélites.** Ainda sobre o uso da reconstrução de cruzamentos na magnetopausa e FTEs, notou-se benefícios ao se usar múltiplos satélites de medições simultâneas, pois assim pode-se determinar melhor o eixo invariante, que é o principal parâmetro geométrico da GSR. A orientação deste eixo é refinada calculando um coeficiente de correlação entre o campo magnético medido e o reconstruído (usando dados de vários satélites), variando a orientação do eixo, dentro de uma faixa permitida. Essa abordagem foi testada para cruzamentos da magnetopausa por quatro satélites *Cluster* em Hasegawa *et al.* (2004), onde os autores conseguiram 0,97 de correlação entre os campos magnéticos. Outro benefício de usar dados de vários satélites ao longo de diferentes locais e/ou momentos, é para examinar a evolução temporal da estrutura comparativamente com a reconstrução GS de cada conjunto de dados individuais, sem que isso altere as premissas do modelo. Em outras palavras, podemos tirar o “instantâneo” e a reconstrução permanece válida.
3. **Tubos de Fluxo Magnético Interplanetário.** O técnica de reconstrução em tubos de fluxo foi aplicada primeiramente por Hu e Sonnerup (2001). No entanto, Hu e Sonnerup (2002) são os que estabelecem formalmente a abordagem sistemática para reconstrução GS em tubos de fluxos magnéticos de grande escala, ou seja, em nuvens magnéticas (MCs). Um resultado interessante sobre GSR aplicado ao estudo de MCs foi a descoberta de múltiplos tubos de fluxo num dado intervalo de tempo (HU *et al.*, 2003; HU *et al.*, 2004). O intervalo de tempo exibia assinaturas de uma MC, sendo esta indistinguível da de um tubo de fluxo único, onde eventos dessa natureza são muito raros de se identificar com medições *in situ*. Eventos de tubos de fluxo múltiplos são de difícil identificação sem a aplicação do método

⁶ Grupo de 4 satélites idênticos separados de 1000 a 10.000 km, uns dos outros.

⁷ Grupo de 5 satélites

GSR. Neste evento em específico, infelizmente não havia observação solar para detectar sua origem, já que não existe conhecimento de qualquer evento semelhante de assinaturas tão fortes de tubo de fluxo duplo lado a lado relatados desde então. Tivemos outros eventos (HU *et al.*, 2003; HU *et al.*, 2004), de múltiplos tubos de fluxo advindos de uma ICME (Ejeção de massa coronal interplanetária), revelados através da reconstrução GS e que, de outra forma, seriam de difícil identificação usando apenas os dados da série temporal.

4. **Validação dos resultados da reconstrução GS: Relação com as Propriedades da Região de Origem.** Quanto à validação da GSR, Hu e Krucker (2015) compararam as estimativas de linha de campo L_s da GSR para um conjunto de eventos de MCs com as estimativas de comprimentos medidos a partir da análise energética do tempo de viagem do elétron (KAHLER; KRUCKER; SZABO, 2011), isso é, o comprimento da linha de campo pode ser estimado por $L_e = v_e (t_e - t_0)$, em que a velocidade do elétron v_e e o tempo de chegada t_e na localização do satélite são medidos a partir da detecção *in situ* na região de origem do feixe dos elétrons. Este é um exemplo de como se pode fazer uma validação usando as propriedades da região de origem, mostrando assim a confiabilidade da reconstrução GS. A GSR fornece maneiras críticas, não somente de validar a técnica, como também de relacionar as modelagens feitas *in situ* com outros estudos relevantes, resultando assim em maior impacto em comparação com a reconstrução GS sozinha. Em outras palavras, o método não é um adversário de outras técnicas, ou apenas um comparador, mas permite somar à análise das mesmas. Por exemplo, Wang *et al.* (2016) fazem um estudo estatístico da torção da linha de campo magnético para uma grande amostra de MCs usando o modelo de *Gold-Hoyle*. Este estudo foi muito parecido com o que a reconstrução GS também mostrou, só que para um número mais limitado de eventos. O que foi mais surpreendente é que esse estudo, quando comparado com GSR, pôde determinar uma relação entre torção e instabilidade, trazendo uma condição suficiente (torção total maior que $2,5\pi$ radianos) para instabilidade de tubos de fluxo originados do Sol, resultado esse somente possível graças à combinação de GSR e *Gold-Hoyle*.
5. **Reconstrução do Tipo-GS.** Além do método GSR original aplicado a plasmas magneto-hidrostáticos bidimensionais no espaço, Sonnerup e seus colegas desenvolveram uma série de variações com base em várias teorias que geralmente vão além do equilíbrio estacionário e quase-estático (SONNERUP; TEH, 2008; SONNERUP; TEH, 2009). Denomina-se este método como reconstrução do tipo GS, uma vez que compartilham de características semelhantes ao método GSR, isto é, matematicamente são um problema de valor inicial de *Cauchy*, embora o número de incógnitas seja significativamente maior. Além da reconstrução do tipo GS da estrutura dinâ-

mica com fluxo alinhado ao campo, [Teh e Hau \(2007\)](#) também fizeram reconstrução bidimensional MHD de cruzamentos na magnetopausa, onde foi constatado uma série de ilhas magnéticas embutidas nas camadas de correntes tangenciais semelhantes a descontinuidade. Logo, embora as equações neste caso não sejam mais do tipo GS, o problema numérico na reconstrução, permanece como problema do valor inicial utilizando dados *in-situ* ([SONNERUP; TEH, 2008](#)). Por isso nos referimos a esse tipo de reconstrução como do tipo GS. A reconstrução do tipo GS, embora aplicada ao caso estacionário no tempo, tem potencial para aplicações em eventos de tubos de fluxo, especialmente aos de pequena escala, onde a alfvénicidade tende a ser alta. Em outras palavras, como a inclinação de *Walén* pode ser significativa, um equilíbrio dinâmico deve ser considerado. Por exemplo, foi aplicado para recuperar vórtices de fluxo na camada limite de baixa latitude da magnetopausa por [Eriksson et al. \(2009\)](#). Também encontramos utilidade nesse método para mostrar, como se fosse um primeiro filtro, ainda que cinematicamente, a mudança da topologia magnética, sugerindo processos de reconexão magnética envolvendo contração e fusão de ilhas, que podem ser dinamicamente importantes para a energização das partículas (por exemplo, ler o trabalho de [Zank et al. \(2014\)](#)).

6. **Melhorias e extensões do método para reconstrução GS** Várias pesquisas foram feitas visando melhorar a GSR. [Li et al. \(2009\)](#) modificaram a definição de resíduo, mostrando assim certa melhora da orientação do eixo invariante. [Isavnin, Kilpua e Koskinen \(2011\)](#) propuseram um diferencial para ser usado no lugar das diferenças finitas, buscando melhor precisão numérica dos dados. Essa abordagem ainda não se provou correta, uma vez que temos estudos mostrando que usar diferença finita usual com suavização de três pontos pode ser mais eficiente ([HU; SONNERUP, 2002](#)). Outras tentativas foram feitas nesse sentido por [Hu e Sonnerup \(2001\)](#), que projetaram um filtro que limita a propagação de erros numéricos, permitindo a melhora do domínio computacional. Essa abordagem foi testada e se mostrou exitosa para melhorar a solução numérica de GS ([SONNERUP; GUO, 1996](#)). Essas melhorias, conforme falado anteriormente, representam um grande esforço da comunidade científica para melhorar a GSR. No entanto, a reconstrução continua essencialmente a mesma na grande maioria das aplicações. Outras formas de melhoramento vão no sentido de atualizar o método para que ele seja capaz de incorporar mais elementos, podendo assim até em termos de variações da reconstrução se enquadrar na reconstrução tipo GS. Por exemplo, tem-se o desenvolvimento recente na extensão da GSR na geometria toroidal (estrutura em forma de anel de simetria rotacional) ([HU; QIU; ZHENG, 2014](#)). Essa geometria toroidal pode melhorar as observações do campo magnético, mostrando panoramicamente o evento graças à reconstrução toroidal GS, facilitando assim a observação do material ejetado do Sol à Terra.

Em resumo, a reconstrução GS não poder ser aplicada a todo tipo de casos, pois se tivermos um laço fechado, e um laço aberto em formato de U, quando estamos pensando na seção transversal do tubo de fluxo e, esses dados são compartilhado pelos satélites ao longo do caminho, o método GS pode não conseguir distingui-los. Portanto, apesar de algumas limitações, a GSR desempenha um papel importante para tentar entender melhor processos físicos de fenômenos como nuvens magnéticas, tubos de fluxo magnético e lâminas de corrente, podendo lançar luz sobre processos universais responsáveis pela formação dessas estruturas (LINTON; MOLDWIN, 2009).

Para concluir pode-se dizer que, outra aplicação, advinda de uma solução analítica e elaborada a partir de uma generalização dos modelos *Harris-Faddev-Kan-Manankova*, encontrada por Korovinskiy *et al.* (2018), foi usada para simular o campo magnético dipolar da Terra, onde para sua validação, foi feita uma comparação com o modelo T96 (ZAHARIA; Cheng, 2003), com a configuração magnetosférica realista, demonstrando uma precisão de 5% a 10%. Desta forma, podemos notar o potencial para encontrar novas soluções da equação de *Grad-Shafranov*, já que as mesmas podem ser usadas na análise de lâminas de corrente e tubos de fluxos magnéticos, por exemplo.

2.8 Velocidade de Fase de uma Onda Magnetoacústica

Para iniciar este estudo é importante ressaltar de saída que um fluido não condutor pode sofrer compressões (mudanças na pressão) e rarefações (mudança na densidade) quando ondas longitudinais se propagam através dele. Tais ondas têm como característica que o vetor de onda \vec{k} é paralelo à sua velocidade de propagação (FITZPATRICK, 2008). Essas ondas longitudinais podem ser interpretadas como acústicas com velocidade adiabática $v_s = (\gamma k_B T / m)^{1/2}$, sendo γ o coeficiente de expansão adiabático, k_B a constante de Boltzmann, T a temperatura e m a massa dos átomos no fluido.

No caso de um fluido condutor sob os efeitos de um campo magnético, as partículas podem oscilar livremente na direção das linhas do campo magnético (THOMPSON, 1962).

Geralmente, em um fluido magneto-condutor, o campo magnético não é uniforme em todo o espaço ocupado pelo fluido. A pressão pode ser identificada como pressão cinética, dada por

$$p = nk_B T, \quad (2.84)$$

onde n é a densidade numérica e a pressão magnética é:

$$p_B = B^2 / 2\mu_0, \quad (2.85)$$

que em algumas regiões podem ser diferentes umas das outras e transversais às linhas de campo.

Essas pressões produzem variações na velocidade do fluido, formando ondas magneto-acústicas longitudinais, que viajam perpendiculares às linhas de campo com uma velocidade igual a

$$v_M^2 = v_s^2 + v_A^2. \quad (2.86)$$

Nas ondas magneto-acústicas, \vec{k} é paralelo a \vec{v}_M e ambos são perpendiculares a \vec{B} .

Nessa tese trabalhamos com a equação da velocidade de um fluido magneto-condutor usando duas aproximações: (i) dada pela lei de *Ampère* e (ii) levando em consideração a correção de *Maxwell*, inserindo a corrente de deslocamento (J_d). Considerando uma direção arbitrária entre o vetor de onda e o campo magnético, obtém-se uma expressão para a velocidade de fase da onda. Existem três modos de onda magnetohidrodinâmica (MHD) quando a corrente de deslocamento (J_d) é desconsiderada ao obter a expressão da velocidade de fase da onda.

O intuito desta seção é mostrar as etapas algébricas para a obtenção da equação da velocidade de um fluido magneto-condutor em detalhes e seguindo um procedimento metodológico. Esta equação será obtida inicialmente desprezando a corrente de deslocamento na lei de *Ampère* (posteriormente, como resultado deste trabalho, a corrente de deslocamento será incluída). Considerando uma direção arbitrária entre o vetor de onda e o campo magnético na equação da velocidade de um fluido, uma expressão para a velocidade de fase da onda é obtida. O estudo da velocidade de fase implica na existência de três modos de ondas MHD amplamente conhecidos na literatura (ver por exemplo [Belcher, Davis e Smith \(1969\)](#), [Cramer \(2001\)](#), [Bittencourt \(2018a\)](#)). Esses modos de onda serão comparados entre si.

Esta seção está dividida em duas subseções. A subseção [2.8.1](#) apresenta a equação magnetohidrodinâmica básica em função da velocidade do fluido sem a corrente de deslocamento. Na seção [2.8.2](#), uma demonstração detalhada é desenvolvida a partir da equação da velocidade do fluido obtida na subseção [2.8.1](#) até que a expressão da velocidade de fase para cada um dos três modos de onda MHD seja alcançada.

2.8.1 Equação para a Velocidade do Fluido Negligenciando a Corrente de Deslocamento

As equações básicas da magnetohidrodinâmica são as seguintes ([BITTENCOURT, 2018a](#)):

1. Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{u}) = 0, \quad (2.87)$$

em que ρ_m é a densidade do fluido e \vec{u} é a velocidade média do fluido;

2. Equação de movimento derivada da segunda lei de Newton considerando a força de Lorentz:

$$\rho_m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho_m (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.88)$$

em que \vec{J} é a densidade de corrente;

3. Equação de conservação de energia em um processo termodinâmico adiabático ($p\rho_m^{-\gamma} = \text{constante}$):

$$\nabla p = v_s^2 \nabla \rho_m; \quad (2.89)$$

4. Lei de Ampère-Maxwell que negligencia a corrente de deslocamento:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}; \quad (2.90)$$

5. Lei de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2.91)$$

6. Lei de Ohm generalizada na forma simplificada, o que significa que o efeito Hall foi desconsiderado, \vec{J} não depende do tempo e a díada de pressão é reduzida a uma pressão escalar onde o gradiente de pressão é desprezível (BITTENCOURT, 2018b; SOUZA *et al.*, 2016), apesar de estes termos serem válidos em algumas das outras equações MHD:

$$\frac{\vec{J}}{\sigma_0} = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}, \quad (2.92)$$

em que σ_0 é a condutividade do fluido. Na ausência de um campo magnético externo, (2.92) torna-se a Lei de Ohm, $\vec{J} = \sigma_0 \vec{E}$.

As equações (2.87)-(2.92) podem ser combinadas em uma única equação. Os passos algébricos para se chegar à equação são explicados em detalhes no capítulo 15 do livro de Bittencourt (2018a). Para obter a equação do fluido, é necessário considerar pequenos distúrbios de amplitude dos valores de equilíbrio do campo magnético ($\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t)$), de densidade ($\rho_m(\vec{r}, t) = \rho_{m0} + \rho_{m1}(\vec{r}, t)$) e a velocidade do fluido ($\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_1(\vec{r}, t)$), levando em consideração um fluido em repouso $u_0 = 0$, com densidade ρ_{m0} e campo magnético \vec{B}_0 uniforme e constante.

Desta forma, da equação (2.87) obtemos:

$$\frac{\partial \rho_{m1}}{\partial t} + \rho_{m0} (\nabla \cdot \vec{u}_1) = 0. \quad (2.93)$$

Combinando (2.88), (2.89) e (2.90) o resultado é:

$$\rho_{m0} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + v_s^2 \nabla \rho_{m1} - \frac{(\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0}{\mu_0} = 0. \quad (2.94)$$

As equações (2.91) e (2.92) resultam em:

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\vec{u}_1 \times \vec{B}_0) = 0. \quad (2.95)$$

A equação (2.93) é derivada em função do tempo para posteriormente substituímos (2.94) e (2.95) nela. Consideramos a solução $\vec{u}_1(\vec{r}, t) = \vec{u}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ de uma onda plana que permite substituir $\nabla = i\vec{k}$ e $\partial/\partial t = -i\omega$, além da identidade vetorial $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$. O resultado final é a equação para a velocidade do fluido que possui a seguinte expressão:

$$-\omega^2 \vec{u}_1 + (v_s^2 + v_A^2)(\vec{k} \cdot \vec{u}_1)\vec{k} + (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) \left[(\vec{k} \cdot \vec{v}_A) \vec{u}_1 - (\vec{v}_A \cdot \vec{u}_1)\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{u}_1)\vec{v}_A \right] = 0. \quad (2.96)$$

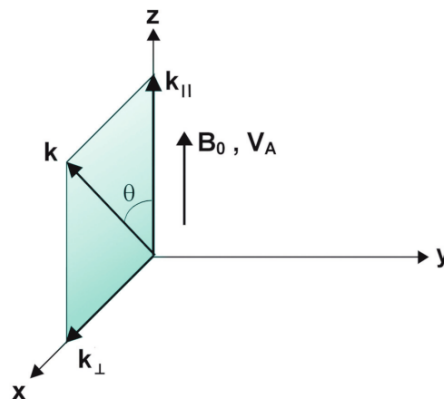
Vale ressaltar que a corrente de deslocamento, até o presente momento foi negligenciada nos cálculos (2.96). Na próxima subseção, mostraremos o desenvolvimento algébrico até que a expressão da velocidade de fase para cada um dos três modos de onda MHD seja alcançada.

2.8.2 Modos de Onda MHD Negligenciando a Corrente de Deslocamento

Nesta seção é realizado um procedimento algébrico na equação (2.96), considerando o caso de propagação de ondas magnetoacústicas em um plasma, onde o vetor de onda possui uma direção arbitrária em relação ao campo magnético.

Antes de iniciar o desenvolvimento algébrico de (2.96), é útil definir um sistema de coordenadas cartesianas de modo que o eixo Y seja perpendicular ao plano definido pela direção \vec{k} e pelo vetor de indução magnética \vec{B}_0 , escolhendo Z ao longo de \vec{B}_0 , como mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Sistema de coordenadas cartesianas mostrando as orientações relativas dos vetores \vec{k} e \vec{B}_0 .



Fonte: Figura 6 de Bittencourt (2018a)

Denotando o ângulo entre \vec{k} e \vec{B}_0 por θ e os vetores unitários por \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , temos:

$$\vec{k} = k(\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k}), \quad (2.97)$$

$$\vec{v}_A = v_A \hat{k}, \quad (2.98)$$

$$\vec{u}_1 = u_{1x} \hat{i} + u_{1y} \hat{j} + u_{1z} \hat{k}, \quad (2.99)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_A = kv_A \cos \theta, \quad (2.100)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{u}_1 = k(u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta). \quad (2.101)$$

Para continuar com a análise algébrica, convém denotar os membros de (2.96) com os números romanos *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* e *VI* da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underbrace{-\omega^2 \vec{u}_1}_I + \underbrace{(v_s^2 + v_A^2)(\vec{k} \cdot \vec{u}_1) \vec{k}}_{II} + \\ & \underbrace{+(\vec{k} \cdot \vec{v}_A)}_{III} \left(\underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{v}_A) \vec{u}_1}_{IV} - \underbrace{(\vec{v}_A \cdot \vec{u}_1) \vec{k}}_V - \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{u}_1) \vec{v}_A}_{VI} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Embora (2.102) pareça ser muito complicada de resolver, ela leva a soluções simples para ondas que se propagam em direções paralelas ou perpendiculares ao campo magnético.

Voltando a (2.102), notamos que foi separada por partes para melhor compreensão. Trabalharemos com cada uma das partes separadamente, substituindo as equações (2.97)-(2.101) em (2.102). Na parte *I*,

$$I = -\omega^2 u_{1x} \hat{i} - \omega^2 u_{1y} \hat{j} - \omega^2 u_{1z} \hat{k}. \quad (2.103)$$

Na parte *II*,

$$\begin{aligned} II &= k^2 (v_s^2 + v_A^2) (u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta) \\ & \quad (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k}) \\ &= k^2 (v_s^2 + v_A^2) \sin \theta (u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta) \hat{i} + 0 \hat{j} + \\ & \quad + k^2 (v_s^2 + v_A^2) \cos \theta (u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta) \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Logo,

$$III = kv_A \cos \theta \quad (2.105)$$

e *IV* se escreve como,

$$IV = kv_A \cos \theta u_{1x} \hat{i} + kv_A \cos \theta u_{1y} \hat{j} + kv_A \cos \theta u_{1z} \hat{k}. \quad (2.106)$$

O termo denotado por *V* é transformado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V &= -v_A u_{1z} k (\sin \theta \hat{i} + 0 \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) \\ &= -v_A u_{1z} \sin \theta k \hat{i} + 0 \hat{j} - (v_A u_{1z} \cos \theta k) \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

E, finalmente, VI resulta em:

$$\begin{aligned} VI &= -k(u_{1x} \operatorname{sen} \theta + u_{1z} \operatorname{cos} \theta)v_A \hat{k} \\ &= 0\hat{i} + 0\hat{j} - kv_A(u_{1x} \operatorname{sen} \theta + u_{1z} \operatorname{cos} \theta)\hat{k}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Agora, temos que substituir I a VI em (2.102) e fazer os cálculos para cada um dos componentes. Começando com o eixo X :

$$\begin{aligned} &-\omega^2 u_{1x} + k^2(v_s^2 + v_A^2) \operatorname{sen} \theta (u_{1x} \operatorname{sen} \theta + u_{1z} \operatorname{cos} \theta) + \\ &\quad + kv_A \operatorname{cos} \theta [kv_A \operatorname{cos} \theta u_{1x} - kv_A \operatorname{sen} \theta u_{1z}] = 0, \\ &-\omega^2 u_{1x} + k^2(v_s^2 + v_A^2) \operatorname{sen}^2 \theta u_{1x} + \\ &\quad + k^2(v_s^2 + v_A^2) \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta u_{1z} + \\ &\quad + k^2 v_A^2 \operatorname{cos}^2 \theta u_{1x} - k^2 v_A^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta u_{1z} = 0. \end{aligned}$$

Continuando o desenvolvimento matemático,

$$\begin{aligned} &u_{1x}[-\omega^2 + k^2(v_s^2 + v_A^2) \operatorname{sen}^2 \theta + kv_A^2 \operatorname{cos}^2 \theta] + \\ &\quad + u_{1z}[k^2(v_s^2 + v_A^2) \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta - k^2 v_A^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta] = 0, \\ &u_{1x}[-\omega^2 + k^2 v_s^2 \operatorname{sen}^2 \theta + k^2 v_A^2 \underbrace{(\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta)}_{=1}] + \\ &\quad + u_{1z}[k^2 v_s^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta + \\ &\quad + \cancel{k^2 v_A^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta} - \cancel{k^2 v_A^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta}] = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, a equação para o eixo X é a seguinte:

$$\begin{aligned} &u_{1x}[-\omega^2 + k^2 v_A^2 + k^2 v_s^2 \operatorname{sen}^2 \theta] + \\ &\quad + u_{1z}[k^2 v_s^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta] = 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Para o eixo Y , temos:

$$\begin{aligned} &-\omega^2 u_{1y} + 0 + kv_A \operatorname{cos} \theta [kv_A \operatorname{cos} \theta u_{1y} - 0 - 0] = 0, \\ &u_{1y}(-\omega^2 + K^2 v_A^2 \operatorname{cos}^2 \theta) = 0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Para o eixo Z , o desenvolvimento algébrico também deve ser feito:

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 u_{1z} + k^2(v_s^2 + v_A^2) \cos \theta (u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta) + \\
& \quad + kv_A \cos \theta [kv_A \cos \theta u_{1z} - kv_A \cos \theta u_{1z} - \\
& \quad - kv_A (u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta)] = 0, \\
& -\omega^2 u_{1z} + k^2(v_s^2 + v_A^2) \cos \theta \sin \theta u_{1x} + \\
& \quad + k^2(v_s^2 + v_A^2) \cos^2 \theta u_{1z} + k^2 v_A^2 \cos^2 \theta u_{1z} - \\
& \quad - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta u_{1z} - k^2 v_A^2 \cos \theta \sin \theta u_{1x} - \\
& \quad - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta u_{1z} = 0.
\end{aligned}$$

Continuando o desenvolvimento matemático,

$$\begin{aligned}
& u_{1x} [k^2(v_s^2 + v_A^2) \cos \theta \sin \theta - k^2 v_A^2 \cos \theta \sin \theta] + \\
& \quad + u_{1z} [-\omega^2 + k^2(v_s^2 + v_A^2) \cos^2 \theta + \cancel{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta} - \\
& \quad - \cancel{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta} - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta] = 0, \\
& u_{1x} [k^2 v_s^2 \cos \theta \sin \theta + \cancel{k^2 v_A^2 \cos \theta \sin \theta} - \\
& \quad - \cancel{k^2 v_A^2 \cos \theta \sin \theta}] + u_{1z} [-\omega^2 + k^2 v_s^2 \cos^2 \theta + \\
& \quad + \cancel{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta} - \cancel{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta}] = 0.
\end{aligned}$$

E chegamos à equação reduzida para o eixo Z :

$$u_{1x} [k^2 v_s^2 \sin \theta \cos \theta] + u_{1z} [-\omega^2 + k^2 v_s^2 \cos^2 \theta] = 0. \quad (2.111)$$

Em (2.110), se $u_{1y} \neq 0$, temos oscilações perpendiculares a \vec{k} e \vec{B}_0 , ou seja, uma onda linearmente polarizada. De $-\omega^2 + k^2 v_A^2 \cos^2 \theta = 0$, temos:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = v_A \cos \theta. \quad (2.112)$$

da equação acima se $\theta = 0^\circ$, então $v_{ph} = v_A \parallel B_0$. Agora, se $\theta = 90^\circ$, $v_{ph} = 0$, e então (2.112) é chamada de onda Alfvén pura.

A partir das equações dos eixos X e Z , o mais conveniente é escrever (2.109) e (2.111) na forma de matriz $Au = 0$. A matriz A é escrita:

$$\begin{pmatrix}
-\omega^2 + k^2 v_A^2 + k^2 v_s^2 \sin^2 \theta & k^2 v_s^2 \sin \theta \cos \theta \\
k^2 v_s^2 \sin \theta \cos \theta & -\omega^2 + k^2 v_s^2 \cos^2 \theta
\end{pmatrix} \quad (2.113)$$

e o vetor coluna u é:

$$\begin{pmatrix}
u_{1x} \\
u_{1z}
\end{pmatrix}. \quad (2.114)$$

Para obter uma solução não trivial é necessário que $u_{1x} \neq 0$ e $u_{1z} \neq 0$, ou seja, que o determinante de A seja igual a zero ($|A| = 0$). Calculando o determinante, obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 + k^2 v_A^2 + k^2 v_s^2 \sin^2 \theta)(-\omega^2 + k^2 v_s^2 \cos^2 \theta) - \\ & \quad - k^4 v_s^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0, \\ & \omega^4 - \omega^2 k^2 v_s^2 \cos^2 \theta - \omega^2 k^2 v_A^2 + k^4 v_s^2 v_A^2 \cos \theta - \\ & \quad - \omega^2 k^2 v_s^2 \sin^2 \theta + \cancel{k^4 v_s^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \\ & \quad - \cancel{k^4 v_s^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \omega^4 - \omega^2 k^2 v_s^2 \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_1 - \\ & \quad - \omega^2 k^2 v_A^2 + k^4 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta = 0, \\ & \omega^4 - (v_s^2 + v_A^2) \omega^2 k^2 + k^4 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta = 0. \end{aligned}$$

dividindo ambos os membros por $\frac{1}{k^4}$, temos:

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^4 - (v_s^2 + v_A^2) \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 + v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (2.115)$$

Definindo $X = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2$ na equação anterior, obtemos uma equação quadrática para X :

$$X^2 - (v_s^2 + v_A^2)X + v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (2.116)$$

Resolvendo a equação (2.116) obtemos as soluções:

$$X_1 = \frac{1}{2}(v_s^2 + v_A^2) + \frac{1}{2}[(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.117)$$

conhecido como modo de onda MHD rápido e

$$X_2 = \frac{1}{2}(v_s^2 + v_A^2) - \frac{1}{2}[(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}} \quad (2.118)$$

conhecido como o modo lento.

Para simplificar, escreve-se (2.117) e (2.118) em uma única equação da velocidade de fase, $v_{ph} = \pm \sqrt{X_{1,2}}$, da onda. Isto é,

$$v_{ph} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(v_M^2 \pm \sqrt{v_M^4 - 4v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta} \right)}, \quad (2.119)$$

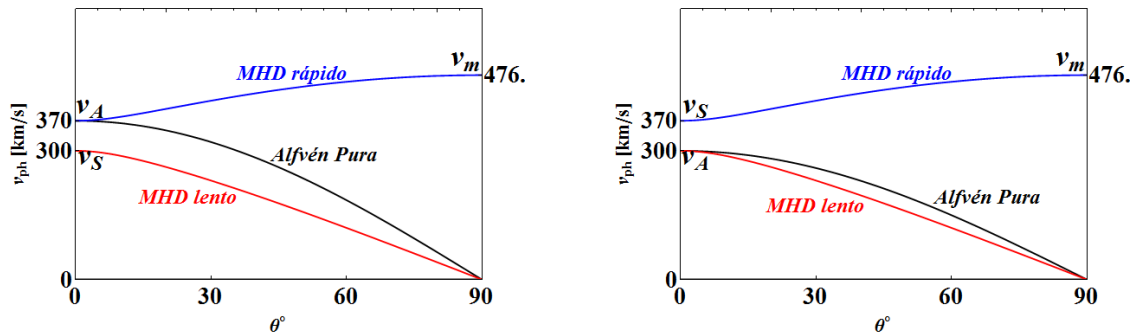
em que o sinal \pm fora da raiz quadrada muda a direção de propagação da onda, enquanto o sinal \pm dentro da raiz indica se é um modo rápido ou lento.

A Figura 8 foi desenhada a partir da equação (2.119). Note que todos os modos de ondas têm velocidades de fase constante, ou seja, não há dispersão de onda. Temos

apresentada a velocidade de fase, para cada uma dessas ondas em função do ângulo θ entre k e B_0 , para os casos (a) $V_A > V_s$ e (b) $V_A < V_s$. Notamos que a velocidade de fase da onda MHD rápida aumenta de V_A (ou V_s se $V_s > V_A$), quando $\theta = 0$, para $(V_s^2 + V_A^2)^{1/2}$ quando $\theta = 90^\circ$, enquanto a da onda MHD lenta diminui de V_s (ou V_A se $V_s > V_A$), quando $\theta = 0$, para zero quando $\theta = 90^\circ$.

Portanto, se $V_A > V_s$, a onda MHD rápida se torna uma onda de Alfvén para $\theta = 0^\circ$ e a onda magnetoacústica para $\theta = 90^\circ$, enquanto a onda MHD lenta torna-se a onda acústica para $\theta = 0^\circ$, e não existe para $\theta = 90^\circ$. Por outro lado, se $V_s > V_A$, a onda MHD rápida se torna a onda sonora para $\theta = 0$, e a onda magnetoacústica para $\theta = 90^\circ$, enquanto a onda MHD lenta se torna a onda Alfvén para $\theta = 0^\circ$, e não existe para $\theta = 90^\circ$. Este tópico é retomado no Capítulo 4 quando, a modo de resultado, considera-se a corrente de deslocamento para obter a velocidade de fase das ondas MHD.

Figura 8 – Velocidades de fase (independentes da frequência) em função do ângulo entre k e B_0 para ondas de Alfvén puras e para as ondas MHD rápidas e lentas quando (a) $V_A > V_s$ e (b) $V_A < V_s$.



Fonte: Adaptado Figura 7 de [Bittencourt \(2018a\)](#)

3 MÉTODO DE GÉNOT APLICADO EM MODELOS ANALÍTICOS

A equipe de trabalho vinculada ao grupo de pesquisa do CNPq, “Matemática Aplicada à Física Espacial”, liderada pelo orientador deste trabalho, vem desenvolvendo pesquisas nos tópicos já citados. Sousa (2018) fez uma revisão teórica de soluções analíticas obtidas a partir da fórmula de Walker. Esses modelos tinham em comum a presença de pontos neutros tipo- X e tipo- O (ilhas magnéticas), obtidos da teoria da reconexão magnética. Novas soluções foram propostas (NAVAL I, II, III e IV) para entender a coexistência entre os pontos tipo- X , tipo- O e tipo- S (S de “singular”), onde o valor máximo do campo magnético tende ao infinito. Oliveira (2020) fez uma revisão da teoria cinética para obter (1.10), e estudou todas¹ as soluções analíticas do trabalho de Yoon e Lui (2005). Também foi apresentada uma nova solução analítica, que tem como novidade o fato de ter uma única lâmina de corrente cilíndrica com a possibilidade de decidir, por meio do ajuste de um parâmetro, em qual dos eixos colocar as ilhas magnéticas, com a desvantagem da impossibilidade de remover a singularidade da origem.

Neste capítulo aplicaremos o método de *Génot* a alguns modelos analíticos clássicos da equação de GS, encontrando assim suas possíveis singularidades. Também, de uma forma mais sucinta, faremos uma revisão desses modelos que serão usados posteriormente para encontrar novas soluções da forma específica da equação de GS.

3.1 Solução de Walker

A expressão matemática dada por (1.10) é uma equação de *Poisson*. Não obstante, no caso específico em que o termo não homogêneo assume uma forma exponencial, a equação é chamada de “equação de *Liouville*”² bidimensional, que em sua forma original é escrita $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = ce^{d\Phi}$, com c e d sendo constantes reais (BISKAMP, 1986; SCHINDLER, 2006). Note que a equação (1.10) é o laplaciano bidimensional do potencial vetor normalizado (Ψ) igualado à exponencial de Ψ . Esta equação, que foi resolvida por Walker (1915), também aparece na literatura como “solução de *Liouville*”, mas neste trabalho preferimos chamá-la de “fórmula de *Walker*” ou de “solução de *Walker*”, fazendo uso, assim, da notação já consagrada na área de Física Espacial. Walker (1915) propôs uma solução geral dependente de uma função analítica complexa denominada função geradora, $g(\zeta)$. A solução dada por Walker é:

$$e^{-2\Psi(X,Z)} = \frac{4|g(\zeta)'|^2}{(1 + |g(\zeta)|^2)^2}, \quad (3.1)$$

em que ζ é uma variável complexa.

¹ um total de nove soluções.

² Para conhecer a vida e obra de Liouville, veja o apêndice (A.1)

A fórmula de *Walker* (3.1) nos enseja propor novas soluções analíticas de (1.10). Por exemplo, o modelo de *Harris* (1962) foi pioneiro entre um grupo de soluções que lhe sucedem (FADEEV; KVABTSKHAVA; KOMAROV, 1965; KAN, 1973; MANANKOVA; PUDOVKIN, 1996; BRITTNACHER; WHIPPLE, 2002; YOON; LUI, 2005). Apresentamos esse modelo a seguir.

3.2 Solução de *Harris*

A solução de *Harris* é unidimensional, e apesar de ser considerada uma das soluções mais simples de (GS), é muito usada para encontrar soluções bidimensionais. Para tanto, *Harris* (1962) usou como função geradora $g(\zeta) = e^{i\zeta}$ na equação (3.1), lançando mão da fórmula de *Walker*. Começamos calculando o módulo da primeira derivada e o módulo da função:

$$|g'(\xi)| = e^{-Z} \quad (3.2)$$

$$|g(\xi)| = e^{-Z}. \quad (3.3)$$

Agora, substituindo (3.2) e (3.3) em (3.1) e considerando as identidades trigonométricas, temos:

$$e^{-2\Psi} = \frac{4|g'(\zeta)|^2}{(1 + |g(\zeta)|^2)^2} = \frac{4(e^{-Z})^2}{[1 + (e^{-Z})^2]^2} = \frac{1}{\cosh^2(Z)}.$$

Por fim, efetuando as seguintes manipulações algébricas, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{-2\Psi} &= \operatorname{sech}^2(Z), \\ e^{2\Psi} &= \frac{1}{\operatorname{sech}^2(Z)} = \cosh^2(Z), \\ e^{\Psi} &= \sqrt{\cosh^2(Z)}, \\ \ln e^{\Psi} &= \ln \sqrt{\cosh^2(Z)}, \\ \Psi &= \ln \sqrt{\cosh^2(Z)}, \\ \Psi &= \ln \cosh(Z). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Salientamos que a solução dada pela função geradora $g(\zeta) = e^{-i\zeta}$ é a mesma, pois a unidade imaginária acaba sendo eliminada do expoente no logaritmo.

Procurando os Pontos Singulares

Usando a função geradora $g(\zeta) = e^{i\zeta}$, verificaremos se $\nabla \ln |g'(\zeta)| = 0$. Neste caso, buscamos os valores de ζ para os quais $|g'(\zeta)| = 0$, e assim encontramos os pontos de singularidade.

Vamos começar calculando $|g'(\zeta)|$:

$$|g'(\zeta)| = |(e^{i\zeta})'| = |ie^{i\zeta}| = [ie^{i\zeta} \cdot (-i)e^{-i\zeta^*}]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Usando o resultado de (3.5) e a definição (B.0.3), temos:

$$\begin{aligned} \nabla \ln |g'(\zeta)| &= 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta^*} \left(\ln (e^{i\zeta} \cdot e^{-i\zeta^*})^{\frac{1}{2}} \right), \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\frac{1}{2} (i\zeta - i\zeta^*) \right) \right) = 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\frac{1}{2} i\zeta - \frac{1}{2} i\zeta^* \right) \right), \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\frac{1}{2} i \right) = 4 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Note que, desta forma, temos $\nabla \ln |g'(\zeta)| = 0$. Buscaremos agora os valores de ζ para os quais se tem $|g'(\zeta)| = 0$. Sabendo que $|g'(\zeta)| = (e^{i\zeta - i\zeta^*})^{\frac{1}{2}}$ e substituindo $\zeta = X + iZ$ nesta expressão, calculamos os zeros ou os polos da seguinte equação:

$$(e^{i(2iZ)})^{\frac{1}{2}} = e^{-2Z\frac{1}{2}} = e^{-Z} = 0. \quad (3.6)$$

O resultado encontrado acima nos indica que a expressão em (3.6) nunca será zero nem terá polos, para qualquer que seja o valor de Z . Portanto, não há singularidades para a solução de *Harris*.

3.2.1 Uma Nova Forma de Encontrar a Solução de Harris

Um dos objetivos desta subseção é obter uma nova forma de se chegar à solução de Harris (1962) através de outra função geradora, usando a fórmula de Walker. Apresentamos, a seguir, uma outra opção de função geradora:

$$g(\zeta) = \tanh(bi\zeta). \quad (3.7)$$

Com esta função geradora definida, vamos calcular seu módulo e sua primeira derivada usando (B.0.2) e (B.0.5), respectivamente:

$$|g(\zeta)|^2 = \frac{-\cos(2bX) + \cosh(2bZ)}{\cos(2bX) + \cosh(2bZ)} \quad (3.8)$$

e

$$|g'(\zeta)|^2 = \frac{4b^2}{(\cosh(2bZ) + \cos(2bX))^2}. \quad (3.9)$$

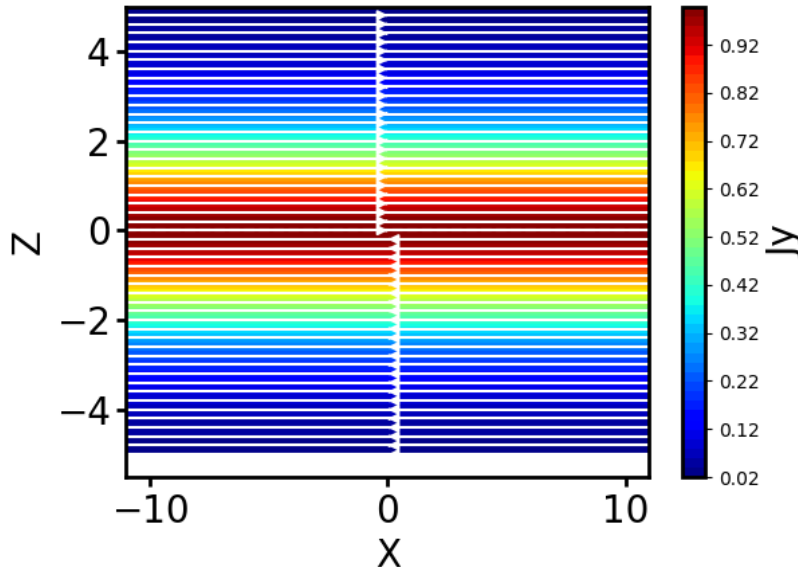
Portanto, substituindo (3.8) e (3.9) na fórmula de Walker (3.1) e efetuando mais algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte solução:

$$\Psi(X, Z) = \ln \left(\frac{\cosh(2bZ)}{2b} \right). \quad (3.10)$$

Para $b = 0,5$, esta solução é idêntica à dada por (3.4).

Segue abaixo o gráfico³ da solução encontrada. Para este, usamos os seguintes valores: $B_0 = 49.15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m), que são característicos da magnetocauda terrestre segundo Kan (1973).

Figura 9 – Gráfico da densidade de corrente da solução de *Harris*. Observe que esta solução não tem singularidades. Trata-se, apenas, de uma lâmina de corrente separando plasmas antiparalelos. Usamos $b = 0,5$ para compor o gráfico.



Fonte: o autor.

Portanto, nossa proposta de uma nova forma de se obter a solução de *Harris* para a equação específica de *Grad-Shafranov* através de outra função geradora, usando a fórmula de *Walker*, foi bem sucedida. Isto mostra que podemos chegar à mesma solução por diversos caminhos distintos. Na Figura 9, temos apenas uma lâmina de corrente, mostrando a simplicidade da solução de *Harris*, sendo esta considerada uma solução canônica.

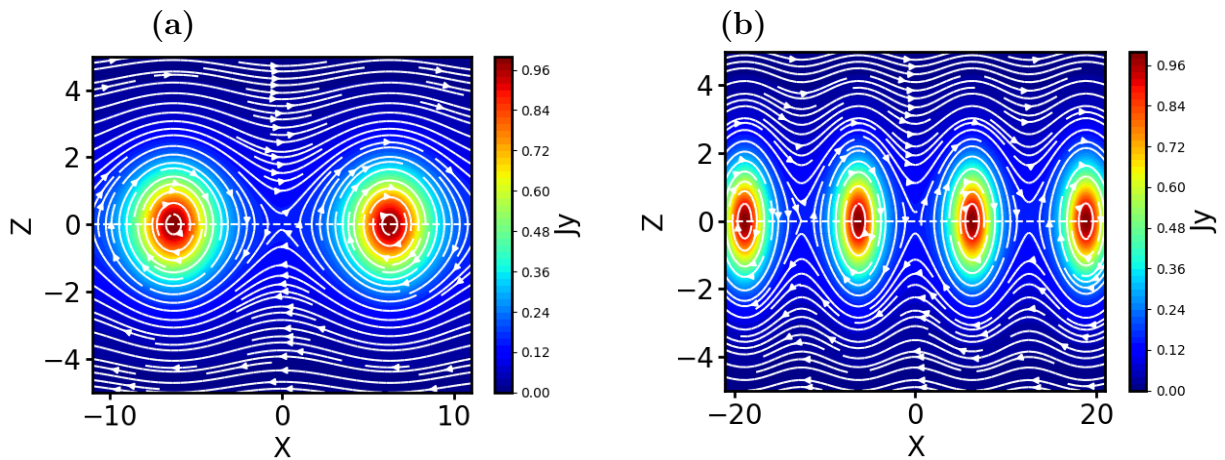
3.3 Solução de Faddev

Uma das soluções mais conhecidas e utilizadas na literatura é a proposta por *Faddev, Kvabtskhava e Komarov* (1965). Já fizemos uma apresentação da função geradora em (2.59), assim como de sua solução em (2.60). Na Figura 10 apresentamos o gráfico desta solução. Notamos que, no gráfico da solução não existem pontos singulares, como já demonstrado pelo método de *Génot*, apresentado na seção 2.4. Tem-se, também, um ponto neutro tipo- X na origem do sistema de coordenadas. Ao ampliarmos a janela de visualização do gráfico, notamos que para $X > 0$ tem-se uma ilha magnética e, logo em seguida, um ponto tipo- X , seguido de uma ilha magnética, e assim sucessivamente, de forma periódica. Para $X < 0$, a configuração é exatamente a mesma, ou seja, existe uma

³ Para explorar o código Python utilizado para esboçar os gráficos desta tese, consulte o apêndice (C).

simetria da solução com respeito ao eixo Z . No meio das ilhas magnéticas notamos uma densidade de corrente máxima, sendo este ponto também chamado de ponto tipo- O .

Figura 10 – Estes são os gráficos de densidade de corrente da solução de *Faddeev* dada pela equação (2.60) com $b = 0,5$ e $f_p = 0,5$. Esta solução (painel (a)) tem duas ilhas magnéticas, localizadas em $\pm 2\pi$, e também um ponto do tipo- X , na origem. A constante b , se alterada, muda a quantidade de ilhas magnéticas mostrada, tendo um efeito de afastamento, enquanto que f_p altera o formato das ilhas, deixando-as mais elípticas quando f_p está próximo de zero, ou mais circulares quando $f_p > 1$, também alterando muito a densidade de corrente das ilhas magnéticas. O painel (b) mostra a mesma solução, mudando somente a janela de visualização.



Fonte: o autor.

Destacamos que no caso de $f_p = 0$, voltamos a solução de *Harris*, conforme sugere a equação (3.4). Para [Yoon e Lui \(2005b\)](#), as soluções de *Harris* e *Faddeev* fazem parte da mesma família de soluções, já que a solução de *Harris* é solução de *Faddeev* para $f_p = 0$.

3.4 Solução de Kan

A solução que [Kan \(1973\)](#) propôs usa a seguinte função geradora:

$$g(\zeta) = e^{(i\zeta - \frac{ib}{\zeta - a})}. \quad (3.11)$$

Veja que a função tem dois parâmetros, a e b , sendo que o primeiro ajusta o eixo X . Previamente definimos o termo R pela equação $R^2 = (X - a)^2 + Z^2$ (doravante, $a = 0$ ([YOON; LUI, 2005](#))). Logo, teremos na função somente o parâmetro b . A solução por ele encontrada foi detalhada por [Sousa \(2018\)](#), e é como segue:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh[Z(1 + \frac{b}{R^2})]}{\sqrt{(1 + \frac{b}{R^2})^2 - \frac{4bZ^2}{R^4}}}, \quad (3.12)$$

Note que esta é mais uma solução da família *Harris*, bastando tomar $b = 0$.

Procurando os Pontos Singulares

Encontraremos as singularidades, quando houver, aplicando o método de *Génot*. Para começar, vamos calcular $g'(\zeta)$:

$$g'(\zeta) = \left(e^{(i\zeta - \frac{ib}{\zeta})} \right)' = \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) e^{(i\zeta - \frac{ib}{\zeta})}. \quad (3.13)$$

Agora, usando a definição (B.0.3) e o resultado da equação (3.13), temos:

$$|g'(\zeta)| = \left[\left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) e^{(i\zeta - \frac{ib}{\zeta})} \cdot \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) e^{(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.14)$$

Aplicando a função logaritmo a ambos os membros da igualdade acima, temos:

$$\ln |g'(\zeta)| = \frac{1}{2} \left[\ln \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) + \ln e^{(i\zeta - \frac{ib}{\zeta})} + \ln \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) + \ln e^{(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*})} \right], \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \ln \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) + \frac{1}{2} \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \ln \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) + \frac{1}{2} \left(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Agora, usando o resultado da equação (3.16) e o teorema (B.0.1), temos:

$$\nabla \ln |g'(\zeta)| = 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\frac{1}{2} \ln \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) + \frac{1}{2} \left(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*} \right) \right) \right), \quad (3.17)$$

$$= 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{-b}{b\zeta^* + \zeta^{*3}} + \frac{1}{2} \left(-i - \frac{2ib}{\zeta^{*3}} \right) \right), \quad (3.18)$$

$$= 4 \cdot 0 = 0. \quad (3.19)$$

Portanto, a solução de *Kan* satisfaz a equação (2.44), cumprindo, assim, a primeira condição. Vamos encontrar, agora, suas singularidades, efetuando a segunda parte dos cálculos:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{\left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) e^{(i\zeta - \frac{ib}{\zeta})} \cdot \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) e^{(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*})}} = 0. \quad (3.20)$$

Note que a equação (3.20) será válida, se, e somente se:

$$\left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) \cdot \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) = 0. \quad (3.21)$$

Sabe-se que, em \mathbb{C} , o produto de dois números é nulo se, e somente se, um ou ambos os fatores são nulos. Assim, tem-se $\left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) = 0$ ou $\left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) = 0$. Note que, do ponto de vista algébrico, ambos os fatores são equivalentes, de modo que precisamos apenas calcular:

$$\begin{aligned} \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) &= i \left(1 + \frac{b}{\zeta^2} \right) = 0, \\ i \left(\frac{\zeta^2 + b}{\zeta^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A equação (3.22) tem um polo em $\zeta^2 = 0$ e zeros onde $i(\zeta^2 + b) = 0$. Fica evidente que o polo está, portanto, localizado na origem.

Seguem abaixo alguns passos rumo à identificação dos zeros:

$$\begin{aligned}\zeta^2 + b &= 0, \\ \zeta^2 &= -b, \\ \zeta &= \pm i\sqrt{b}, \\ X + iZ &= \pm i\sqrt{b}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

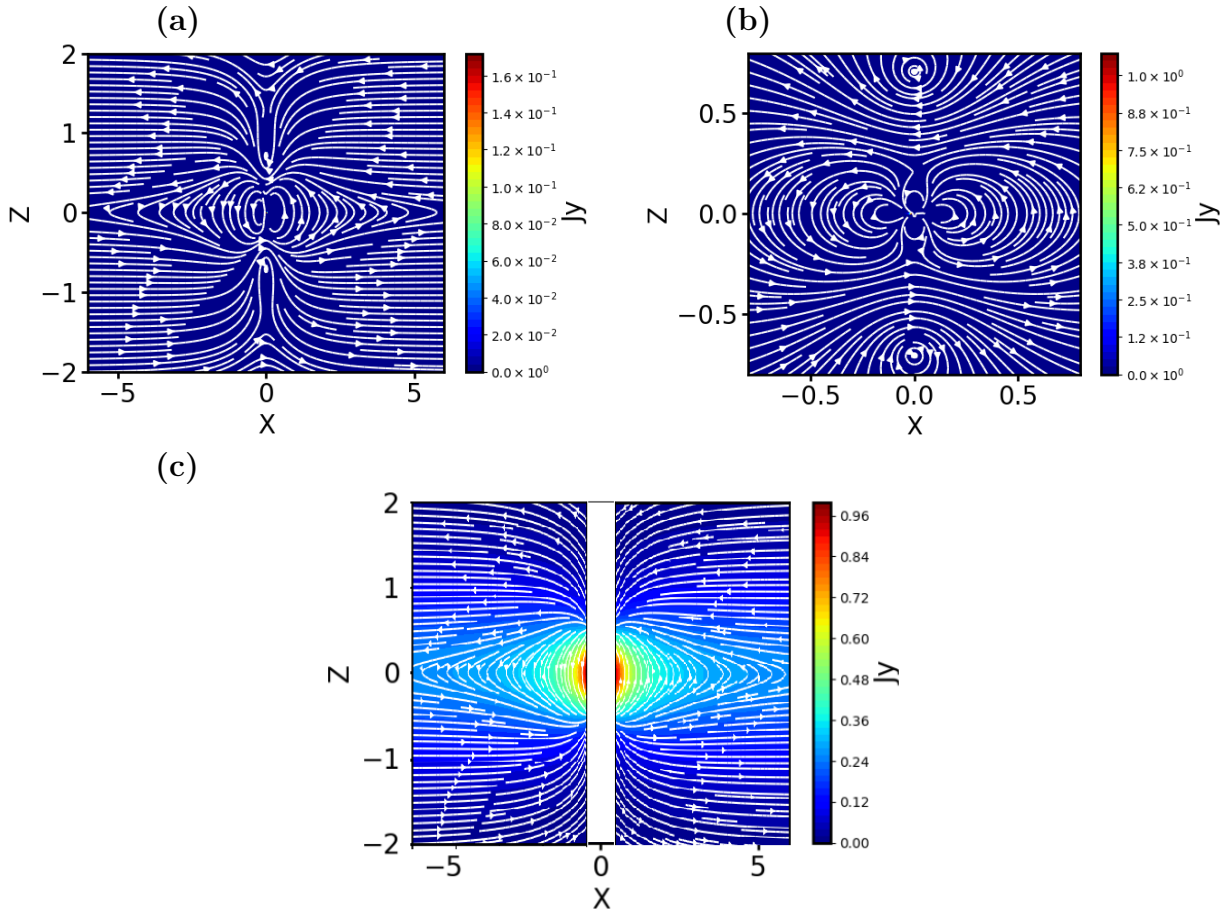
Note que a equação anterior admite solução real se, e somente se, $X = 0$, sendo $Z = \pm\sqrt{b}$. Portanto, concluímos que as singularidades são os zeros da equação, quais sejam $(0, +\sqrt{b})$ e $(0, -\sqrt{b})$, e o polo (número que anulava o denominador) é $(0, 0)$.

Sabemos que este modelo serve para estudar a magnetosfera terrestre, bastando excluir o eixo Z do domínio de integração, conforme Yoon e Lui (2005).

Agora analisaremos a Figura 11, que traz em detalhes o gráfico da solução de Kan.

Em (b), na Figura 11, podemos ver a singularidade com mais clareza devido à mudança na grade de visualização, onde podemos nos concentrar mais detidamente nas singularidades $(0, +\sqrt{b})$ e $(0, -\sqrt{b})$. Observe o comportamento, em termos das linhas de campo, quando nos aproximamos das singularidades e a melhor definição dos quatro pontos tipo- X localizados em $(0, \pm 0, 206855)$ e $(0, \pm 1, 2955)$. Em (c), notamos melhor a densidade de corrente, já que excluimos do gráfico as singularidades. Note que existe uma semelhança muito grande com a magnetosfera terrestre, lembrando um dipolo magnético. O parâmetro b muda a projeção de Ψ , aproximando ou afastando as singularidades, conforme seu valor. Este modelo não apresenta ilhas magnéticas. Uma generalização deste foi realizada por Manankova e Pudovkin (1996), Manankova e Pudovkin (1999), Manankova, Pudovkin e Runov (2000), onde surge uma ilha magnética acima do eixo X .

Figura 11 – O painel (a) mostra o gráfico de densidade da solução de *Kan*, dada pela equação (3.12), em que usamos $b = 0,5$. O gráfico conta com quatro pontos do tipo $-X$ ($0, \pm 0,206855$) e ($0, \pm 1,2955$) e dois pontos de singularidades, localizados no eixo Z , em $(0, +\sqrt{b})$, $(0, -\sqrt{b})$. Em (b), temos uma mudança na grade para $-0,8 < Z < 0,8$ e $-0,8 < X < 0,8$. Em (c) foi refeito o painel (a) retirando, no entanto, a faixa $-1 < X < 1$, onde se encontram as singularidades.



Fonte: o autor.

3.5 Solução NAVAL

Transformando a função geradora ao utilizar o seno hiperbólico (escrevendo $g(\zeta) = \sinh(ib\zeta)$), obtemos a solução NAVAL IV⁴, proposta por Laurindo-Sousa *et al.* (2018). Após os devidos cálculos, obtemos a seguinte solução:

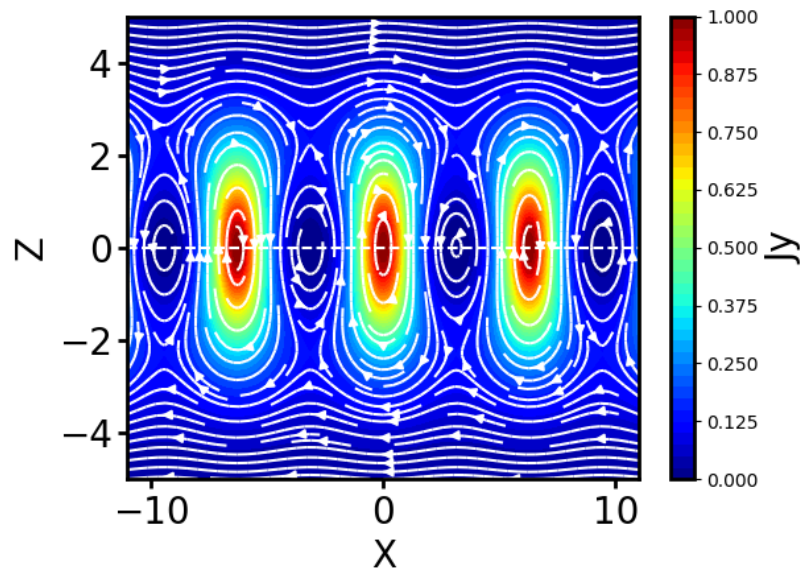
$$\Psi(X, Z) = \ln \frac{\cosh^2(bZ) + \sin^2(bX)}{2b\sqrt{\cosh^2(bZ) - \sin^2(bX)}}. \quad (3.24)$$

Apresentamos, na Figura 12, o gráfico da solução. Note que o gráfico apresenta

⁴ Nilson-Arian-Virgínia-Alan-Lucas.

pontos neutros do tipo $-X$, ilhas magnéticas e pontos singulares $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2b}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, que foram previamente calculados na seção 2.4. Note que, diferentemente da solução dada por Fadeev, Kvabtskhava e Komarov (1965), Kan (1973), a solução *NAVAL* tem como característica a co-existência de pontos tipo $-X$, ilhas magnéticas e pontos singulares. A solução de *Fadeev* não tinha pontos singulares e a solução de *Kan* não tinha ilhas magnéticas. Podemos notar isto no gráfico: no entorno dos pontos singulares, tem-se linhas de campo no sentido anti-horário e, logo acima, entre as ilhas magnéticas, tem-se o campo em sentido horário, o que acaba por favorecer o aparecimento de pontos neutros do tipo $-X$.

Figura 12 – Gráfico da densidade de corrente da solução *NAVAL*, dada pela equação (3.24), onde foi usado $b = 0,5$. Este parâmetro altera a quantidade de ilhas magnéticas, alterando desta forma também o período em que elas aparecem. Tem-se ilhas periódicas com período 2π , começando pela origem. Os pontos singulares estão no eixo X , intercalados com as ilhas, iniciando em π e com período 2π . Também notamos os pontos tipo $-X$ acima e abaixo do eixo X .



Fonte: o autor.

3.6 Solução de Yoon-Lui-1

Esta solução foi encontrada por Yoon e Lui (2005), usando também a fórmula de *Walker*, onde a função geradora escolhida foi:

$$g(\zeta) = \zeta^\nu, \quad (3.25)$$

sendo ν um número inteiro. Sua derivada será:

$$g'(\zeta) = \nu\zeta^{\nu-1}, \quad (3.26)$$

onde substituindo (3.25) e (3.26) em (3.1), e fazendo os cálculos, chegamos à seguinte solução:

$$\Psi = \ln \frac{R(R^\nu + R^{-\nu})}{2\nu}, \quad (3.27)$$

em que $R^2 = X^2 + Z^2$.

Calculando os Pontos Singulares

Começaremos usando a derivada de $g = g(\zeta)$, apresentada em (3.26). Fazendo uso da definição B.0.3, temos:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{(\nu\zeta^{\nu-1}) \cdot (\nu\zeta^{*\nu-1})} = (\nu\zeta^{\nu-1})^{\frac{1}{2}} \cdot (\nu\zeta^{*\nu-1})^{\frac{1}{2}}. \quad (3.28)$$

Agora faremos $\nabla \ln |g'(\zeta)| = 0$, usando o teorema (B.0.1):

$$\begin{aligned} \nabla \ln \left((\nu\zeta^{\nu-1})^{\frac{1}{2}} \cdot (\nu\zeta^{*\nu-1})^{\frac{1}{2}} \right) &= \nabla \left[\ln (\nu\zeta^{\nu-1})^{\frac{1}{2}} + \ln (\nu\zeta^{*\nu-1})^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left[\ln (\nu\zeta^{\nu-1}) + \ln (\nu\zeta^{*\nu-1}) \right] \right) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\nu-1}{\zeta^*} \right) \\ &= 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por (3.29), temos a primeira condição satisfeita. Agora calcularemos as singularidades, substituindo $\zeta = X + iZ$ na nossa equação (3.28), conforme segue:

$$\sqrt{(\nu\zeta^{\nu-1}) \cdot (\nu\zeta^{*\nu-1})} = \nu ((X + iZ) \cdot (X - iZ))^{\frac{\nu-1}{2}} = 0.$$

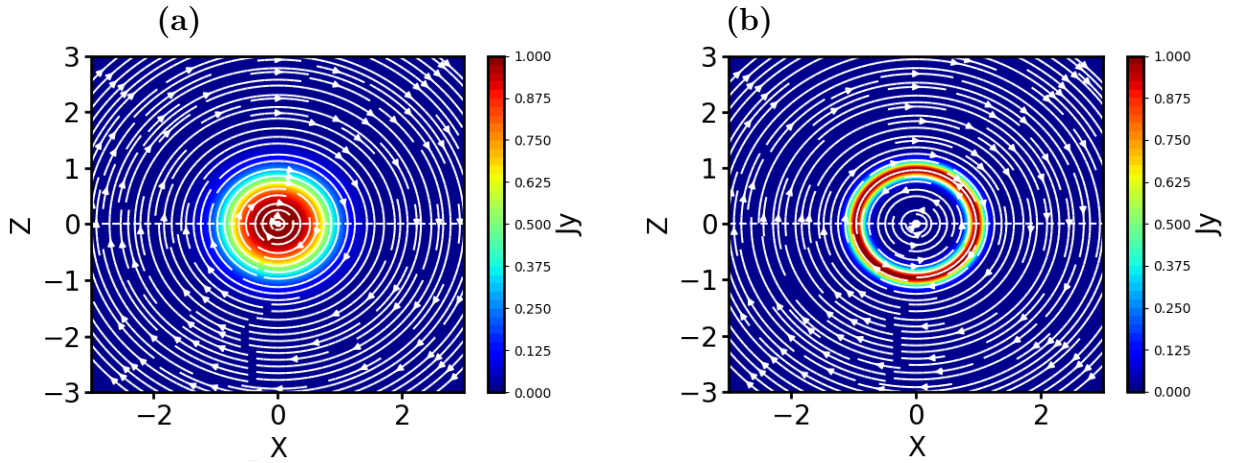
Continuando com as manipulações algébricas, temos:

$$\nu(X^2 + Z^2)^{\frac{\nu-1}{2}} = 0. \quad (3.30)$$

Considerando que $\nu \neq 0$ ⁵ em (3.30), teremos duas situações: i) se $\nu < 1$, o ponto $(0, 0)$ é uma indeterminação da equação (3.30); ii) e se $\nu > 1$, o ponto $(0, 0)$ é uma raiz. Em ambos os casos, o ponto $(0, 0)$ é a única singularidade na solução Yoon-Lui-1. No caso em que $\nu = 1$, teremos a expressão 0^0 , que é considerada como uma indeterminação em Matemática. No entanto, quando $\nu = 1$, o ponto $(0, 0)$ não é uma indeterminação da solução Yoon-Lui-1, pois $\Psi = \ln \frac{1}{2}$. Segue, então, a Figura 13, com o gráfico de densidade de corrente da solução Yoon-Lui-1, para os casos $\nu = 1$ e $\nu = 4$, sendo que no primeiro caso não se tem singularidades e, no segundo, tem-se apenas o ponto $(0, 0)$ como singularidade.

⁵ Veja que, como $\nu = 0$ é uma indeterminação para a solução (3.27)

Figura 13 – Gráfico de densidade da solução Yoon-Lui-1, dada pela equação (3.27), que tem como característica o fato de ter somente uma ilha magnética. Usamos os parâmetros $\nu = 1$ e $\nu = 4$ para plotar estes gráficos. Nos casos ($\nu \neq 0, \nu < 1$) e ($\nu > 1$), a densidade de corrente, J_y , tem uma singularidade em $(0, 0)$. Em (b), nota-se que o campo magnético tem direções opostas ao redor do ponto singular, formando assim um anel de corrente onde o campo magnético se anula.



Fonte: o autor.

3.7 Solução de Yoon-Lui-2

Esta solução foi encontrada por [Yoon e Lui \(2005\)](#), usando também a fórmula de *Walker*, onde a função geradora escolhida foi:

$$g(\zeta) = \zeta - \frac{a}{\zeta}. \quad (3.31)$$

onde, substituindo em (3.1) e fazendo os cálculos, encontramos a seguinte solução:

$$\Psi = \ln \frac{(R^2 + a)^2 + R^2 - 4aX^2}{2 [(R^2 + a)^2 - 4aZ^2]^{1/2}} \quad (3.32)$$

em que $R^2 = X^2 + Z^2$.

Calculando os Pontos Singulares

Começaremos tomando a derivada da função geradora, $g(\zeta) = \zeta - \frac{a}{\zeta}$:

$$|g'(\zeta)| = \left| \zeta - \frac{a}{\zeta} \right|' = \left| \frac{a}{\zeta^2} + 1 \right|, \quad (3.33)$$

onde usando a definição (B.0.3), temos:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{\left(\frac{a}{\zeta^2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{a}{\zeta^{*2}} + 1 \right)} = \left(\frac{a}{\zeta^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a}{\zeta^{*2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.34)$$

Agora desenvolveremos a igualdade $\nabla \ln |g'(\zeta)| = 0$, usando o teorema (B.0.1):

$$\begin{aligned} \nabla \ln \left(\left(\frac{a}{\zeta^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a}{\zeta^{*2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{1}{2} \nabla \left[\ln \left(\frac{a}{\zeta^2} + 1 \right) + \ln \left(\frac{a}{\zeta^{*2}} + 1 \right) \right] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left[\ln \left(\frac{a}{\zeta^2} + 1 \right) + \ln \left(\frac{a}{\zeta^{*2}} + 1 \right) \right] \right) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{-2a}{\zeta^{*3} \left(\frac{a}{\zeta^{*2}} + 1 \right)} \right) \\ &= 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por (3.35), temos a primeira condição satisfeita. Agora vamos buscar as singularidades, substituindo $\zeta = X + iZ$, na nossa equação, (3.33), conforme segue:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{\zeta^2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{a}{\zeta^{*2}} + 1 \right)} = \left(\frac{a}{(X + iZ)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a}{(X - iZ)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (3.36)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, encontramos:

$$\left(\frac{a^2 + 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}{(X^2 + Z^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (3.37)$$

Se tivermos, simultaneamente, $X \neq 0$ e $Z \neq 0$, esta equação não terá raízes. No entanto, tornando fixa e igual a zero uma das variáveis, X ou Z , pode-se encontrar as raízes da equação. Primeiramente, considerando $a > 0$, temos dois casos distintos:

- Se $Z = 0$, as raízes de (3.37) são obtidas de $(X^2 + |a|)^2 = 0$. Neste caso, não existe raiz.
- Se $X = 0$, as raízes de (3.37) são obtidas de $(Z^2 - |a|)^2 = 0$. Neste caso, existem duas raízes simétricas $Z = \pm\sqrt{a}$.

Desta forma, encontramos as seguintes singularidades: $(0, +\sqrt{a})$, $(0, -\sqrt{a})$. Agora, se $a < 0$:

- Se $X = 0$, as raízes de (3.37) são obtidas de $(Z^2 + |a|)^2 = 0$. Neste caso, não existem raízes.
- Se $Z = 0$ as raízes de (3.37) são obtidas de $(X^2 - |a|)^2 = 0$. Neste caso, existem duas raízes $X = \pm\sqrt{a}$.

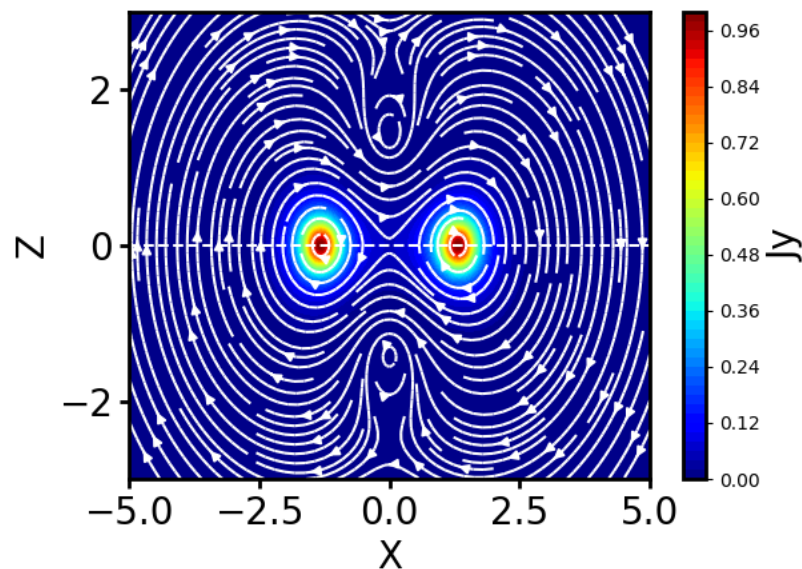
Portanto, conclui-se que as singularidades são: $(-\sqrt{a}, 0)$, $(+\sqrt{a}, 0)$.

Pode-se observar que foi obtido um resultado contraditório com Génot (2005) no ponto $(0, 0)$. Este ponto é uma indeterminação para a primeira derivada da função

geradora e, no entanto, não é uma indeterminação para a solução (3.32), de modo que não é um ponto singular. Então, conclui-se que Génot (2005) é uma condição necessária, porém não suficiente para encontrar singularidades, ou seja, nem sempre uma indeterminação de $g'(\zeta)$ será um ponto singular.

Segue então o gráfico de densidade de corrente da solução *Yoon-Lui-2* na Figura 14.

Figura 14 – Gráfico de densidade da solução *Yoon-Lui-2*, dada pela equação (3.32), usando $a = 2$. Notamos que temos duas ilhas no eixo X , localizadas nos pontos $(-\sqrt{a}, 0)$ e $(\sqrt{a}, 0)$, e entre as ilhas verificamos um ponto neutro tipo $-X$. No eixo Z , notamos dois pontos singulares e três pontos neutros tipo $-X$, um na origem e os outros dois próximos às singularidades $(0, -\sqrt{a})$ e $(0, \sqrt{a})$. Considerando $a = -2$, as ilhas passam a ser localizadas no eixo Z e as singularidades no eixo X .



Fonte: o autor.

3.8 Solução de Yoon-Lui-3

Mais uma solução foi encontrada por [Yoon e Lui \(2005\)](#), usando também a fórmula de Walker, onde a função geradora escolhida foi:

$$g(\zeta) = \frac{\zeta}{(1 - a^2\zeta^2)}, \quad (3.38)$$

onde substituindo em (3.1), e fazendo os cálculos encontramos a seguinte solução.

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S(S + R^2)^2}{2T} \right) \quad (3.39)$$

em que $S = (1 - a^2R^2)^2 + (2aZ)^2$, $T = (1 - a^4R^4)^2 + (4a^2XZ)^2$, $R^2 = X^2 + Z^2$.

Calculando os Pontos Singulares

Começaremos fazendo a derivada da função geradora dada em (3.38)

$$g'(\zeta) = \frac{1 + a^2\zeta^2}{(1 - a^2\zeta^2)^2}, \quad (3.40)$$

onde usando a definição (B.0.3), temos:

$$|g'(\zeta)| = \left(\frac{1 + a^2\zeta^2}{(1 - a^2\zeta^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1 + a^2\zeta^{*2}}{(1 - a^2\zeta^{*2})^2} \right)^{\frac{1}{2}} = X_1. \quad (3.41)$$

Agora vamos calcular $\nabla \ln |g'(\zeta)| = 0$, usando o teorema B.0.1:

$$\begin{aligned} \nabla \ln X_1 &= \frac{1}{2} \nabla \left[\ln \left(\frac{1 + a^2\zeta^2}{(1 - a^2\zeta^2)^2} \right) + \ln \left(\frac{1 + a^2\zeta^{*2}}{(1 - a^2\zeta^{*2})^2} \right) \right] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left[\ln \left(\frac{1 + a^2\zeta^2}{(1 - a^2\zeta^2)^2} \right) + \ln \left(\frac{1 + a^2\zeta^{*2}}{(1 - a^2\zeta^{*2})^2} \right) \right] \right) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{2a^2\zeta^*[3 - a^2\zeta^{*2}]}{1 - a^4\zeta^4} \right) \\ &= 4 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por (3.42), temos a primeira condição satisfeita. Agora calcularemos as singularidades, substituindo $\zeta = X + iZ$ na equação (3.41), conforme segue:

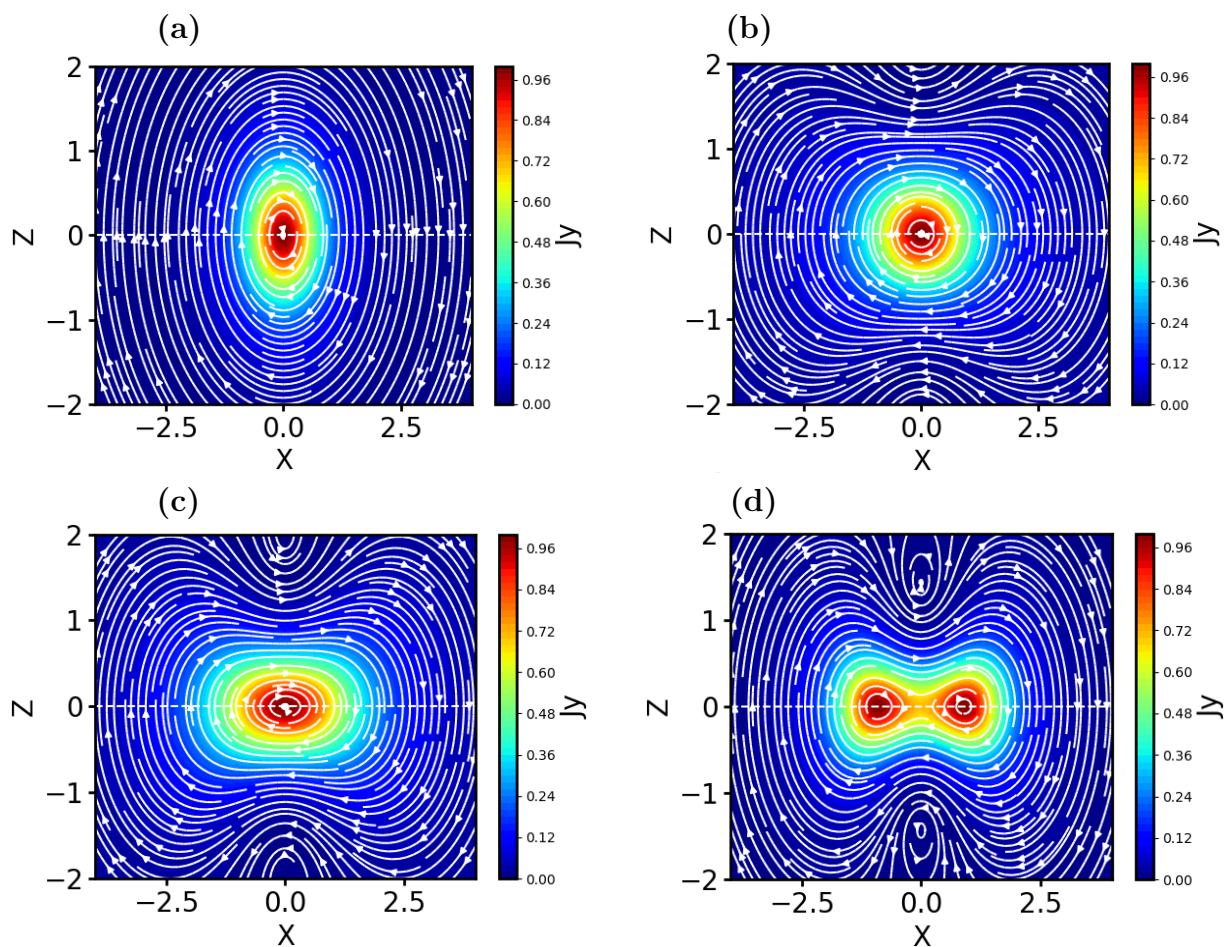
$$X_1 = \left(\frac{1 + a^2(X + iZ)^2}{(1 - a^2(X + iZ)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1 + a^2(X - iZ)^2}{(1 - a^2(X - iZ)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (3.43)$$

Em (3.43), a identidade somente ocorre quando $(1 - a^2(X + iZ)^2)^2 = 0$ ou $(1 - a^2(X - iZ)^2)^2 = 0$. Portanto, para ambos os casos, temos as seguintes singularidades: $(0, \pm \frac{1}{a})$.

Note que quando $a = 0,7$ temos duas singularidades no eixo Z , exatamente nos pontos $(0, \pm \frac{1}{a})$, que em valores numéricos são $(0, \pm 1,429)$, conforme podemos ver na Figura 15.

Essa solução guarda uma diferença relevante com a solução Yoon-Lui-2: quando aumentamos o parâmetro a na solução Yoon-Lui-2, temos um afastamento da origem; na outra solução, quando diminuimos o parâmetro a , temos uma fusão das linhas em uma grande ilha magnética. Isto se deve a uma instabilidade chamada “coalescência” (PRIEST; FORBES, 1992; SCHOLER, 1988). No caso da solução Yoon-Lui-2, os pontos singulares não deixaram a instabilidade ocorrer.

Figura 15 – Gráfico de densidade da solução Yoon-Lui-3, dada pela equação 3.39. Fizemos quatro gráficos, usando como parâmetros $a = 0, 1, 0, 4, 0, 5$ e $0, 7$, respectivamente. Aqui fica bem evidente o processo de divisão da ilha magnética da solução.



Fonte: o autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção tem por objetivo apresentar e discutir os resultados dos nossos estudos sobre a equação de GS. Começamos, na seção 4.1, trazendo seis novas soluções para a equação específica de GS. Estas soluções vêm acompanhadas das análises física e topológica do campo magnético. Na seção 4.2, tem-se os modos de ondas MHD, que servem como base para entender a seção 4.3. Uma das novidades desta tese é o estudo das expressões para a velocidade de fase de onda a partir da admissão ou exclusão da corrente de deslocamento. A seção 4.3 trata de uma metodologia para identificar uma singularidade magnética com velocidade relativística de Alfvén, ou seja, tentamos responder à seguinte questão: “Como excluir os pontos singulares do domínio de forma que essas soluções possam ser usadas para simulações MHD?”. Por fim, trazemos dois estudos de caso nas seções 4.3.1 e 4.3.2, aplicando a metodologia desenvolvida aos modelos de Kan e NAVAL. Para todos os casos é feita uma análise dos pontos singulares, classificando-os e analisando suas implicações físicas.

4.1 Proposta de Novas Soluções Analíticas

Nesta seção propomos seis novas soluções para a equação específica de GS (1.10). Para todas as seis novas soluções usaremos a fórmula de Walker (1915). Para tanto, são necessárias novas funções geradoras. Primeiramente, para solução 1, usaremos as funções geradoras (2.45) e (2.50), dos modelos de Fadeev e NAVAL. Temos na seção 4.1.1, da parte advinda do modelo NAVAL, usa-se a função seno hiperbólico, e para a solução 2, dada na seção 4.1.2, usa-se a função cosseno hiperbólico. Além disso, também buscamos entender qual o papel da unidade imaginária nessas duas soluções, buscando refazer os cálculos removendo i da função geradora. Por sua vez, na solução 3 dada na seção 4.1.3, é feita uma combinação usando o argumento da função exponencial da função geradora de Kan (3.11) no argumento do seno hiperbólico da função geradora de NAVAL (2.50). A solução 4, dada na seção 4.1.4, é uma extensão da solução 3: neste caso, tivemos curiosidade de saber se a topologia do campo magnético da solução diferiria muito da solução 3, quando apenas trocamos o seno hiperbólico por cosseno hiperbólico na função geradora. A solução 5, dada na seção 4.1.5, é obtida combinando as funções geradoras de Yoon-Lui-1 (3.25) e Yoon-Lui-2 (3.31), onde a nova função geradora é o quociente dessas duas funções geradoras. Por fim, a solução 6, dada na seção 4.1.6, foi obtida combinando as funções geradoras de Yoon-Lui-1 (3.25) e Yoon-Lui-3 (3.38), sendo que a função geradora dessa solução também é o quociente dessas duas funções geradoras. As soluções 5 e 6 geraram topologias muito interessantes para os campos magnéticos, até então nunca vistas, motivando uma discussão profícua quanto à sua aplicação no ambiente espacial. Todas as

soluções acompanham uma classificação e análise dos pontos singulares, usando o método de [Génot \(2005\)](#).

4.1.1 Solução 1

Começamos fazendo uso das funções geradoras de *Fadeev* e *NAVAL* da seguinte forma: substituímos a função exponencial da função geradora de *Fadeev* pela função geradora *NAVAL*, obtendo assim uma nova função geradora.

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \sinh(ib\zeta). \quad (4.1)$$

Precisamos substituir a função geradora (4.1) em (3.1). Para melhor organização, faremos isto por etapas. Começaremos calculando a derivada da função geradora:

$$g'(\zeta) = \sqrt{1 + f_p^2} ib \cosh(ib\zeta), \quad (4.2)$$

cujos módulo ao quadrado é:

$$|g'(\zeta)|^2 = (1 + f_p^2) b^2 |i \cosh(ib\zeta)|. \quad (4.3)$$

Usando a propriedade (B.0.5), temos:

$$|i \cos(ib\zeta)|^2 = \cosh^2(bZ) - \sen^2(bX). \quad (4.4)$$

Logo, substituindo (4.4) em (4.3), obtemos a seguinte identidade:

$$|g'(X + iZ)|^2 = (1 + f_p^2) b^2 [\cosh^2(bZ) - \sen^2(bX)]. \quad (4.5)$$

Agora, calculando $|g(\zeta)|^2$, temos:

$$\begin{aligned} |g(\zeta)|^2 &= |f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \sinh(ib\zeta)|^2, \\ &= \left| f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \left(\frac{e^{ib\zeta} - e^{-ib\zeta}}{2} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usando que $\zeta = X + iZ$, juntamente com propriedades de potência, temos:

$$|g(X + iZ)|^2 = \left| f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \left(\frac{e^{biX} e^{-bZ} - e^{-iXb} e^{bZ}}{2} \right) \right|^2. \quad (4.7)$$

Continuando com o desenvolvimento algébrico, segue:

$$\begin{aligned} &= \left| f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \left(\frac{e^{-bZ} [\cos(bX) + i \sen(bX)] - e^{bZ} [\cos(bX) - i \sen(bX)]}{2} \right) \right|^2, \\ &= \left| f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \left[- \left(\frac{e^{bZ} - e^{-bZ}}{2} \right) \cos(bX) + \left(\frac{e^{bZ} + e^{-bZ}}{2} \right) i \sen(bX) \right] \right|^2, \\ &= \left| f_p + \sqrt{1 + f_p^2} [-\cos(bX) \sinh(bZ) + i \cosh(bZ) \sen(bX)] \right|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como $|X + iZ|^2 = X^2 + Z^2$, temos:

$$= [f_p + \sqrt{1 + f_p^2}(-\cos(bX) \sinh(bZ))]^2 + [\sqrt{1 + f_p^2} \sin(bX) \cosh(bZ)]^2, \quad (4.9)$$

e com mais algum trabalho algébrico, obtemos:

$$\begin{aligned} &= f_p^2 - 2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cos(bX) \sinh(bZ) + (1 + f_p^2)[\cos^2(bX) \sinh^2(bZ)] \\ &+ (1 + f_p^2)[\sin^2(bX) \cosh^2(bZ)], \\ &= f_p^2 - 2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cos(bX) \sinh(bZ) \\ &+ (1 + f_p^2)[\cos^2(bX) \sinh^2(bZ) + \sin^2(bX) \cosh^2(bZ)]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituindo $\sinh^2(bZ) = -1 + \cosh^2(bZ)$ na equação (4.10) e fazendo algumas manipulações algébricas, teremos:

$$\begin{aligned} |g(\zeta)|^2 &= f_p^2 - 2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cos(bX) \sinh(bZ) \\ &+ (1 + f_p^2)[-\cos^2(bX) + \cosh^2(bZ)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Somando 1 em ambos os membros, e sabendo que $\sin^2(bX) + \cos^2(bX) = 1$, depois de mais algumas manipulações algébricas encontramos:

$$1 + |g(\zeta)|^2 = -2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cos(bX) \sinh(bZ) + (1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) + \sin^2(bX)]. \quad (4.12)$$

Usando as equações (4.12) e (4.5) e substituindo tudo em (3.1), temos:

$$\begin{aligned} e^{-2\Psi} &= \frac{4|g(\zeta)'|^2}{[1 + |g(\zeta)|^2]^2}, \\ e^{-2\Psi} &= \frac{4(1 + f_p^2)b^2[\cosh^2(bZ) - \sin^2(bX)]}{\left[-2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cos(bX) \sinh(bZ) + (1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) + \sin^2(bX)]\right]^2}, \\ e^{\Psi} &= \sqrt{\frac{\left[-2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cos(bX) \sinh(bZ) + (1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) + \sin^2(bX)]\right]^2}{4(1 + f_p^2)b^2[\cosh^2(bZ) - \sin^2(bX)]}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Portanto, nossa solução é:

$$\Psi = \ln \frac{(1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) + \sin^2(bX)] - 2f_p\sqrt{1 + f_p^2}[\cos(bX) \sinh(bZ)]}{2b\sqrt{(1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) - \sin^2(bX)]}}. \quad (4.14)$$

Se $f_p = 0$, temos:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh^2(bZ) + \sin^2(bX)}{2b\sqrt{\cosh^2(bZ) - \sin^2(bX)}}. \quad (4.15)$$

Note que a solução simplificada (4.15), que aparece quando $f_p = 0$, é, na verdade, a solução NAVAL (3.24). Em outras palavras, a solução encontrada tem como caso particular (quando $f_p = 0$) a solução NAVAL, mostrando assim que ambas pertencem à mesma família de soluções.

As componentes do campo foram calculadas, porém são extremamente extensas, de modo que não as explicitaremos aqui. Contudo, estas foram usadas para a implementação do gráfico da solução. Daqui em diante, ao omitirmos as componentes do campo, o faremos pelo mesmo motivo.

Em seguida, vamos procurar os pontos singulares da solução (4.14); esses pontos são importantes para o nosso trabalho e, por isso, os explicitaremos em todas as soluções desta tese.

Procurando os Pontos Singulares

Como a função geradora (4.1) é a função composta das funções geradoras (2.45) e (2.50), e como a primeira parte do método de *Génot* já foi aplicada para ambas, vamos calcular apenas a segunda parte, que diz:

$$|g'(\zeta)| = 0. \quad (4.16)$$

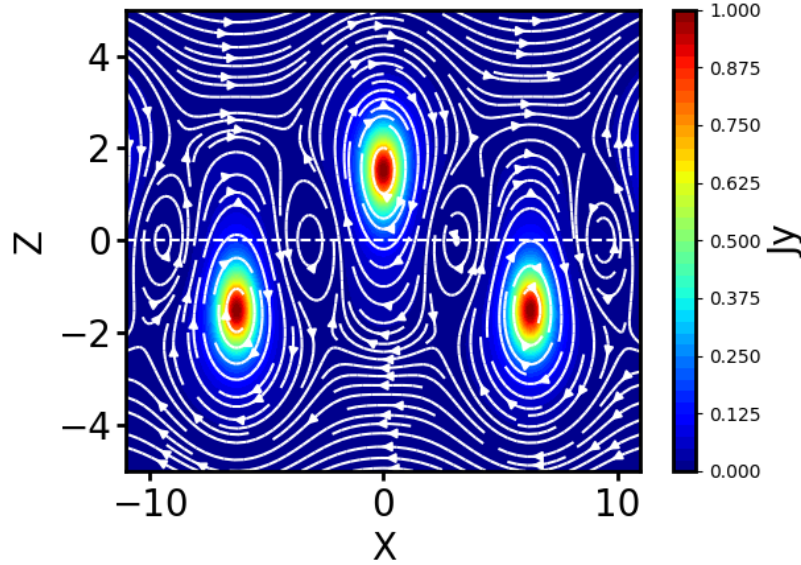
A derivada da nossa função geradora, (4.1), foi encontrada em (4.3), cujo o módulo é:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{b^2(f_p^2 + 1)} \sqrt{\cosh(ib\zeta) \cosh(-ib\zeta^*)} = 0. \quad (4.17)$$

Note que a expressão (4.17) deve ser zero e, no entanto, b^2 e $(f_p^2 + 1)$ são não nulos. O segundo radical no termo da direita é o mesmo analisado na busca das singularidades da solução NAVAL: veja o desenvolvimento a partir de (2.52). Portanto, encontramos as mesmas singularidades periódicas: $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2b}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Segue a Figura 16, que traz a solução da equação (4.14). Notamos que três pontos do tipo- O (ilhas magnéticas) aparecem fora do eixo X , e quatro pontos singulares do tipo- S estão entre eles. Existem também pontos nulos do tipo- X na parte superior e inferior de cada ponto singular. Uma ilha aparece em $z > 0$ e as outras duas em $z < 0$, respectivamente. O parâmetro b tem um efeito de afastamento, enquanto o parâmetro f_p muda a densidade de linhas de campos presente na figura, fazendo com que conforme f_p aumente, a densidade de corrente concentre-se com mais intensidade no centro das ilhas magnéticas.

Figura 16 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.14). Foram usados $b = 0,5$ e $f_p = 1$ para plotá-la. Os pontos de singularidades são $((2k + 1)\pi, 0)$, em que $k \in \mathbb{Z}$ e π é dado em radianos. Esta solução tem ilhas presentes fora do eixo X , ocorrendo periodicamente, ora acima, ora abaixo do eixo X . Além disso, o sentido de rotação do campo magnético nas ilhas magnéticas (sentido horário) é oposto ao dos pontos singulares (sentido anti-horário).



Fonte: o autor.

A solução 1 foi publicada em [Ojeda-González *et al.* \(2020\)](#), onde fizemos uma simulação MHD. No momento estamos refazendo a simulação, excluindo agora os pontos singulares da solução e resolvendo as equações MHD-ideal em duas dimensões, usando o código CAFE newtoniano ([GONZÁLEZ-AVILÉS *et al.*, 2015](#); [GONZÁLEZ-AVILÉS; GUZMÁN, 2018](#)), para posterior publicação.

Também tivemos curiosidade em saber o efeito do fator i da equação (4.1), e se isso poderia trazer alguma modificação significativa na solução. Sendo assim, temos uma nova função geradora, dada por:

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \sinh(b\zeta). \quad (4.18)$$

Analogamente, refazendo novamente todos os cálculos, chegamos na seguinte solução geral:

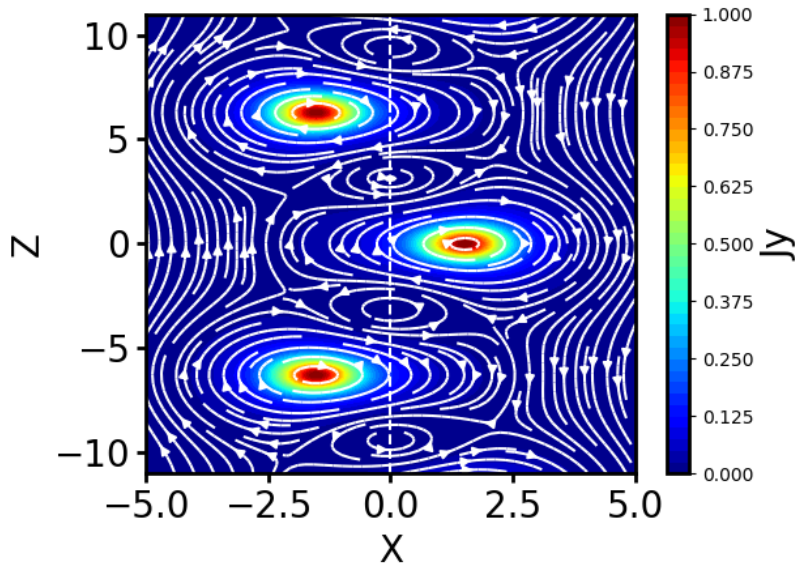
$$\Psi = \ln \frac{(1 + f_p^2)[\cosh^2(bX) + \sen^2(bZ)] + 2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \sinh(bX) \cos(bZ)}{2b\sqrt{(1 + f_p^2)[\cosh^2(bX) - \sen^2(bZ)]}}. \quad (4.19)$$

Se $f_p = 0$, temos a seguinte solução específica:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh^2(bX) + \sen^2(bZ)}{2b\sqrt{\cosh^2(bX) - \sen^2(bZ)}}. \quad (4.20)$$

Portanto, temos o gráfico da solução dada pela equação (4.19) na Figura 17. Note que a equação (4.19) e a equação (4.14) são obtidas mediante a troca de (bX) por (bZ) . No gráfico, isso se mostra como uma rotação de 90° da Figura 16, que para melhor visualização, tem sua grade de visualização alterada. Ou seja, a retirada de i da função geradora (4.1) nos levou à mesma solução, apenas rotacionada em 90° .

Figura 17 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução dada pela equação (4.19). Esta solução é a mesma da Figura 16, apenas rotacionada em 90° . Foram usados os parâmetros $b = 0,5$ e $f_p = 1$ para plotar este gráfico.



Fonte: o autor.

A principal vantagem da nova solução 1 dada por (4.14) em comparação com a solução *NAVAL* ou *Fadeev* é o deslocamento dos centros das ilhas magnéticas do eixo X . Isto nos permite usar esta solução em uma simulação numérica, excluindo os pontos singulares da solução, ou seja, retirando-os do eixo X e mantendo a estrutura magnética das ilhas, bem como os pontos nulos do tipo $-X$.

4.1.2 Solução 2

Nesta solução, troca-se o seno hiperbólico pelo cosseno hiperbólico na função geradora (4.1), ou seja:

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh(ib\zeta). \quad (4.21)$$

Calculando o módulo da derivada, tem-se:

$$|g'(\zeta)|^2 = (1 + f_p^2)b^2 |i \sinh(ib\zeta)|^2. \quad (4.22)$$

Usando a propriedade (B.0.2), obtemos:

$$|i \sinh(ib\zeta)|^2 = \cosh^2(bZ) - \cos^2(bX). \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.22), vem:

$$|g'(\zeta)|^2 = (1 + f_p^2)b^2[\cosh^2(bZ) - \cos^2(bX)]. \quad (4.24)$$

Continuando com os cálculos e substituindo $\zeta = X + iZ$, tem-se:

$$\begin{aligned} |g(\zeta)|^2 &= |f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh(ib\zeta)|^2, \\ &= \left| f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \left(\frac{e^{ib\zeta} + e^{-ib\zeta}}{2} \right) \right|^2, \\ &= |f_p + \sqrt{1 + f_p^2} [\cosh(bZ) \cos(bX) - i \sinh(bZ) \sin(bX)]|^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por fim, calculando o quadrado do módulo, sempre lembrando que $|X + iZ| = X^2 + Z^2$, temos:

$$\begin{aligned} |g(\zeta)|^2 &= (f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh(bZ) \cos(bX))^2 + (\sinh(bZ) \sin(bX))^2, \\ &= f_p^2 + 2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cosh(bZ) \cos(bX) + \\ &\quad + (1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) \cos^2(bX)] + \sinh^2(bZ) \sin^2(bX). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Agora, sabendo que $\sinh^2(bZ) = -1 + \cosh^2(bZ)$ e fazendo alguma álgebra:

$$\begin{aligned} |g(\zeta)|^2 &= f_p^2 + 2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cosh(bZ) \cos(bX) + \\ &\quad + (1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) - \sin^2(bX)]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pondo $(1 + f_p^2)$ em evidência e sabendo que $\sin^2(bX) + \cos^2(bX) = 1$, temos:

$$\begin{aligned} 1 + |g(\zeta)|^2 &= 2f_p\sqrt{1 + f_p^2} \cosh(bZ) \cos(bX) + \\ &\quad + (1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) + \cos^2(bX)]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) e (4.24) em (3.1), encontramos, após cálculos, a solução geral:

$$\Psi = \ln \frac{(1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) + \cos^2(bX)] + 2f_p\sqrt{1 + f_p^2}[\cosh(bZ) \cos(bX)]}{2b\sqrt{(1 + f_p^2)[\cosh^2(bZ) - \cos^2(bX)]}}. \quad (4.29)$$

Se $f_p = 0$, encontramos outras das soluções NAVAL:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh^2(bZ) + \cos^2(bX)}{2b\sqrt{\cosh^2(bZ) - \cos^2(bX)}}. \quad (4.30)$$

Note que, por (4.30), temos que nossa solução 2, dada por (4.29), é uma extensão da família NAVAL. Agora vamos calcular seus pontos singulares.

Procurando os Pontos Singulares

Pelo mesmo motivo da solução anterior, precisamos calcular somente a segunda parte do método de Génot:

$$|g'(\zeta)| = 0. \quad (4.31)$$

Calculando a derivada da nossa função geradora (4.21), encontramos:

$$g'(\zeta) = ib\sqrt{f_p^2 + 1} \sinh(ib\zeta).$$

Logo,

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{b^2(f_p^2 + 1)} |\sinh(ib\zeta)| = 0. \quad (4.32)$$

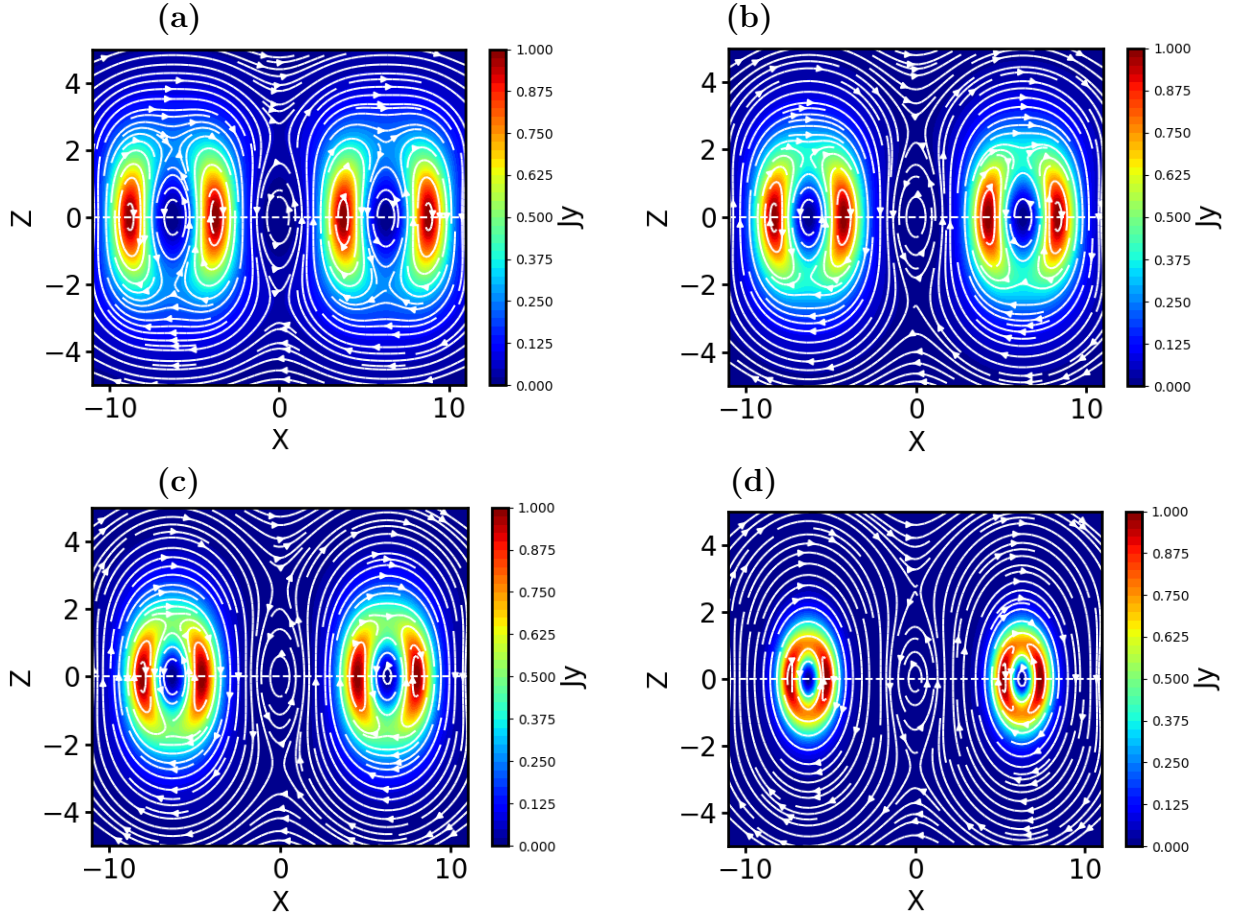
Note que a expressão (4.32) deve ser zero, mas que b^2 e $(f_p^2 + 1)$ são não nulos. Utilizando a definição (B.0.2), tem-se que:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{b^2(f_p^2 + 1)} \sqrt{\cosh^2(bZ) - \cos^2(bX)} = 0. \quad (4.33)$$

Sendo assim, a identidade é verdadeira se, e somente se, $Z = 0$ e $\cos(bX) = \pm 1$. Portanto, basta que: $X = \pm \frac{\pi}{b}$, por exemplo. Desta forma, os pontos singulares são da forma $(\frac{k\pi}{b}, 0)$, em que $k \in \mathbb{Z}$ e π é dado em radianos. Note que esses pontos são periódicos acima do eixo X .

A Figura 18 mostra o gráfico da solução da equação (4.29). Na figura, temos dois pontos tipo- X localizados no eixo Z . No entanto, estes pontos se repetem acima e abaixo das singularidades fora das ilhas. As ilhas magnéticas aparecem aos pares, em $\pm\pi$ e $\pm 3\pi$, tendo entre elas uma singularidade. Além disso, o sentido de rotação do campo magnético nas ilhas magnéticas (sentido horário) é oposto aos dos pontos singulares (sentido anti-horário). O parâmetro b aumenta no número de ilhas magnéticas mostradas, tendo um efeito de afastamento. Já o parâmetro f_p , como mostrado na Figura 18, muda a localização do centro das ilhas magnéticas. Também notamos que aumentando f_p não temos alteração na localização dos pontos singulares, mas sim uma aproximação da dupla de ilhas magnéticas. Isso faz com que os pontos tipo- X se aproximem também, causando uma lâmina de corrente circular com geometria cilíndrica.

Figura 18 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.29). Foi usado $b = 0,5$ em todas as figuras, no entanto fizemos uma variação em f_p , sendo $f_p = 0,5, 1, 1.5$ e 4 , nas figuras de *a*) a *d*), respectivamente. Os pontos de singularidades estão localizados em $(\pm 2k\pi, 0)$, tal que $k \in \mathbb{Z}$ e π é dado em radianos.



Fonte: o autor.

Analogamente à solução 1, se removermos i da função geradora, teremos:

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh(b\zeta). \quad (4.34)$$

Refazendo todos os cálculos, temos a seguinte solução geral:

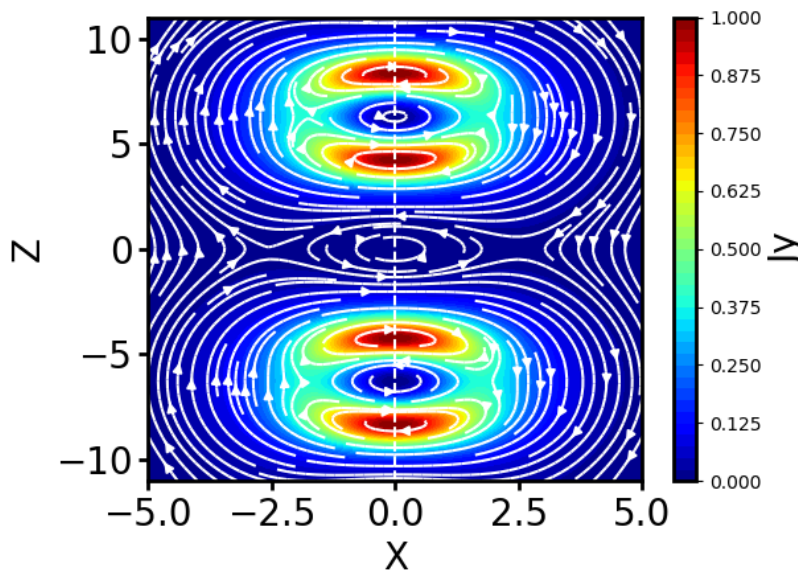
$$\Psi = \ln \frac{(1 + f_p^2)[\cosh^2(bX) + \cos^2(bZ)] + 2f_p\sqrt{1 + f_p^2}[\cosh(bX) \cos(bZ)]}{2b\sqrt{(1 + f_p^2)[\cosh^2(bX) - \cos^2(bZ)]}}. \quad (4.35)$$

Se $f_p = 0$, temos a seguinte solução específica:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh^2(bX) + \cos^2(bZ)}{2b\sqrt{\cosh^2(bX) - \cos^2(bZ)}}. \quad (4.36)$$

Note que a esta solução (4.35) é a mesma dada por (4.29), apenas trocando as variáveis (bX) por (bZ) e vice-versa. Sendo assim, a única alteração visível no gráfico seria uma rotação de 90° , conforme podemos ver na Figura 19.

Figura 19 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução dada pela equação (4.35). Esta solução é a mesma da Figura 18, apenas rotacionada em 90° . Foram usados $b = 0,5$ e $f_p = 1$ para plotar o gráfico.



Fonte: o autor.

4.1.3 Solução 3

Nosso objetivo, agora, é obter uma nova solução analítica combinando as funções geradoras de *Kan* e *NAVAL*. A ideia é substituir o argumento da função exponencial da função geradora *Kan* no argumento do seno hiperbólico da solução *NAVAL*. Sendo assim, temos a seguinte função geradora:

$$g(\zeta) = \sinh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right). \quad (4.37)$$

Agora vamos calcular o módulo da derivada dessa função

$$|g'(\zeta)|^2 = a^2 \left| i + \frac{ib}{\zeta^2} \right|^2 \left| \cosh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \right|^2. \quad (4.38)$$

Da tese [Sousa \(2018\)](#), temos:

$$R^2 = X^2 + Z^2, \quad (4.39)$$

$$\left| i + \frac{ib}{\zeta^2} \right|^2 = \left(1 + \frac{bR^2}{R^4} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4}, \quad (4.40)$$

$$i\zeta - \frac{ib}{\zeta} = \left(-Z - \frac{bZ}{R^2} \right) + i \left(X - \frac{bX}{R^2} \right). \quad (4.41)$$

Agora, substituindo (4.40) e (4.41) em (4.38), e usando a definição (B.0.2), temos:

$$|g'(\zeta)|^2 = a^2 \left[\left(1 + \frac{bR^2}{R^4} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4} \right] \left| \frac{e^{-a(Z + \frac{bZ}{R^2})} e^{ai(X - \frac{bX}{R^2})} + e^{a(Z + \frac{bZ}{R^2})} e^{-ai(X - \frac{bX}{R^2})}}{2} \right|^2. \quad (4.42)$$

Para efeitos de simplificação da escrita, denotaremos:

$$\gamma_1 = \left(1 + \frac{bR^2}{R^4} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4}, \quad (4.43)$$

$$\gamma_2 = Z + \frac{bZ}{R^2}, \quad (4.44)$$

$$\tau_1 = X - \frac{bX}{R^2}, \quad (4.45)$$

em que, substituindo as novas simplificações, temos:

$$|g'(\zeta)|^2 = a^2 \gamma_1 \left| \frac{e^{-a\gamma_2} e^{ia\tau_1} + e^{a\gamma_2} e^{-ia\tau_1}}{2} \right|^2. \quad (4.46)$$

Agora vamos continuar o processo algébrico em (4.46): usando a forma trigonométrica, a definição (B.0.3) e a propriedade (B.0.1), temos:

$$= \frac{a^2 \gamma_1}{4} \left| e^{-a\gamma_2} (\cos a\tau_1 + i \operatorname{sen} a\tau_1) + e^{a\gamma_2} (\cos a\tau_1 - i \operatorname{sen} a\tau_1) \right|^2, \quad (4.47)$$

$$= \frac{a^2 \gamma_1}{4} \left| \cos a\tau_1 (e^{a\gamma_2} + e^{-a\gamma_2}) - i \operatorname{sen} a\tau_1 (e^{a\gamma_2} - e^{-a\gamma_2}) \right|^2, \quad (4.48)$$

$$= a^2 \gamma_1 (\cos^2 a\tau_1 \cosh^2 a\gamma_2 + \operatorname{sen}^2 a\tau_1 \sinh^2 a\gamma_2), \quad (4.49)$$

$$= a^2 \gamma_1 (\cosh^2 a\gamma_2 - \operatorname{sen}^2 a\tau_1). \quad (4.50)$$

Por fim, encontramos:

$$|g'(\zeta)|^2 = a^2 \left[\left(1 + \frac{bR^2}{R^4} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4} \right] \left[\cosh^2 a \left(Z + \frac{bZ}{R^2} \right) - \operatorname{sen}^2 a \left(X - \frac{bX}{R^2} \right) \right]. \quad (4.51)$$

Agora vamos calcular, de modo análogo e usando as mesmas simplificações, o quadrado do módulo da função. Temos:

$$|g(\zeta)|^2 = \left| \operatorname{senh} a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \right|^2. \quad (4.52)$$

Continuamos o processo algébrico em (4.52): usando a forma trigonométrica, a

definição (B.0.3) e a propriedade (B.0.1), temos:

$$= \left| \frac{e^{-a\gamma_2} e^{ia\tau_1} - e^{a\gamma_2} e^{-ia\tau_1}}{2} \right|^2, \quad (4.53)$$

$$= \left| \frac{e^{-a\gamma_2} (\cos a\tau_1 + i \operatorname{sen} a\tau_1) - e^{a\gamma_2} (\cos a\tau_1 - i \operatorname{sen} a\tau_1)}{2} \right|^2, \quad (4.54)$$

$$= \left| -\cos a\tau_1 \left(\frac{e^{a\gamma_2} - e^{-a\gamma_2}}{2} \right) + i \operatorname{sen} a\tau_1 \left(\frac{e^{a\gamma_2} + e^{-a\gamma_2}}{2} \right) \right|^2, \quad (4.55)$$

$$= \cos^2 a\tau_1 \operatorname{senh}^2 a\gamma_2 + \operatorname{sen}^2 a\tau_1 \cosh^2 a\gamma_2, \quad (4.56)$$

$$= \cosh^2 a\gamma_2 - \cos^2 a\tau_1. \quad (4.57)$$

Por fim, somando 1 e elevando ao quadrado ambos os membros da equação e usando identidade trigonométrica fundamental, encontramos:

$$[1 + |g(\zeta)|^2]^2 = \left[\cosh^2 a \left(Z + \frac{bZ}{R^2} \right) + \operatorname{sen}^2 a \left(X - \frac{bX}{R^2} \right) \right]^2. \quad (4.58)$$

Substituindo (4.51) e (4.58) em (3.1), após alguns cálculos, obtemos a seguinte solução geral:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh^2 a \left(Z + \frac{bZ}{R^2} \right) + \operatorname{sen}^2 a \left(X - \frac{bX}{R^2} \right)}{2a \sqrt{\left[\left(1 + \frac{bR^2}{R^4} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4} \right] \left[\cosh^2 a \left(Z + \frac{bZ}{R^2} \right) - \operatorname{sen}^2 a \left(X - \frac{bX}{R^2} \right) \right]}}. \quad (4.59)$$

Se $b = 0$ e $a = 1$, encontramos a seguinte equação, na sua forma simplificada:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh^2 (Z) + \operatorname{sen}^2 (X)}{2\sqrt{\cosh^2 (Z) - \operatorname{sen}^2 (X)}}. \quad (4.60)$$

Note que a equação (4.60) é, na verdade, uma das soluções NAVAL. Em outras palavras, nossa solução generaliza as soluções da família NAVAL, pois as contém.

Procurando os Pontos Singulares

Vamos começar calculando $g'(\zeta)$:

$$g'(\zeta) = \left(\operatorname{senh} a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \right)' = a \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) \cosh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right). \quad (4.61)$$

Agora, usando a definição (B.0.3) e o resultado da equação (4.61), temos:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{\left[a \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) \cosh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \right] \cdot \left[a \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) \cosh a \left(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*} \right) \right]} = 0. \quad (4.62)$$

Sabendo que $a \neq 0$ e $\zeta \neq \zeta^* \neq 0$, podemos reescrever a equação (4.62) como segue:

$$\sqrt{\left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}}\right) \left(i + \frac{ib}{\zeta^2}\right) \cosh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta}\right) \cosh a \left(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*}\right)} = 0. \quad (4.63)$$

Considerando que $\cosh(ai\zeta) = \cos(a\zeta)$, a solução existe se, e somente se, duas condições forem satisfeitas, quais sejam:

$$\left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}}\right) \left(i + \frac{ib}{\zeta^2}\right) = 0, \quad (4.64)$$

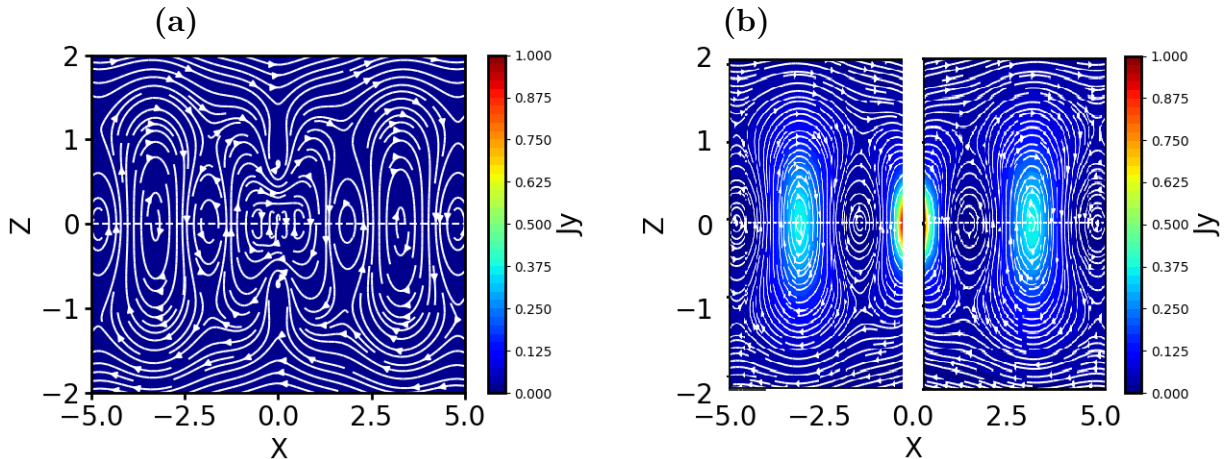
$$\cos a \left(\zeta - \frac{b}{\zeta}\right) \cos a \left(-\zeta^* + \frac{b}{\zeta^*}\right) = 0. \quad (4.65)$$

A equação (4.64) apareceu no desenvolvimento da solução de Kan (Seção 3.4) a partir da equação (3.21), a partir da qual podemos, mediante algumas manipulações algébricas, encontrar como singularidades os pontos $(0, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{b})$.

Agora, pela equação (4.65), usando o fato de que $\zeta - \frac{b}{\zeta} = X - \frac{bX}{X^2} = \frac{(2k+1)\pi}{2a}$ (considerando, para isto, $Z = 0$), e após resolver uma equação de segundo grau, obtemos as singularidades cíclicas da forma $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} \pm \sqrt{\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4a^2} + 4b}, 0\right)$, em que $k \in \mathbb{Z}$ e π é dado em radianos.

Na sequência, vamos conferir na Figura 20 a solução (4.59) e suas singularidades.

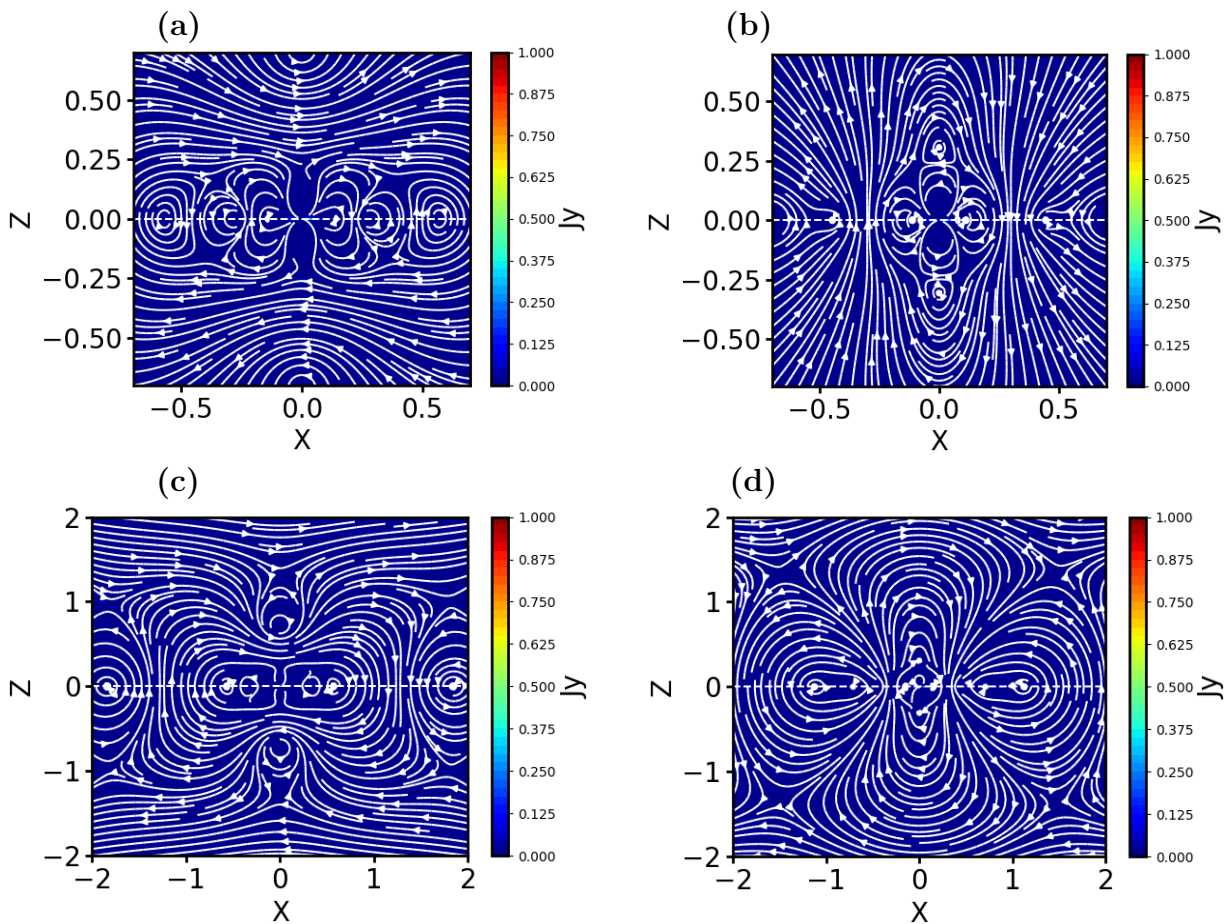
Figura 20 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.59). Foram usados $b = 0,5$ e $a = 1$ para plotá-la. Os pontos de singularidades calculados para os parâmetros já mencionados são: $(0, \pm 0,71)$ $(\pm 1,84, 0)$ $(\pm 4,82, 0)$. Na figura b) temos o mesmo gráfico da figura a) apenas retirando $-0,8 < X < 0,8$ para que a densidade de corrente seja corretamente calculada, já que as singularidades não estão presente.



Fonte: o autor.

Note que a Figura 20 não exibe muitos detalhes nas proximidades dos pontos singulares, e que a densidade de corrente não foi muito bem calculada devido à presença de diversos pontos singulares. Desta forma, vamos mudar a grade de plotagem, (ver Figuras 21a e c) e também vamos ver o que acontece quando $b < 0$ (ver Figuras 21b e d) para melhor detalhar a solução.

Figura 21 – As figuras (a) e (b) tem uma grade quadrada de $-0,7$ a $0,7$ e, (c) e (d) tem uma grade quadrada de -2 a 2 em ambos os eixos, respectivamente. Também fizemos uma mudança do parâmetro b : em (a) e (c) temos $b = 0,5$ e em (b) e (d) temos $b = -0,5$.



Fonte: o autor.

Nas Figuras 21b e 21d acontece que os pontos singulares localizados no eixo X se aproximaram pelo mudança do parâmetro $b = 0, 5$ para $b = -0, 5$. Quanto aos parâmetros e sua influência nos gráficos podemos dizer que: o parâmetro a tem o poder de afastando, já o parâmetro b temos dois casos: $b > 0$ altera a posição dos pontos singulares localizados no eixo z e, para $b < 0$ temos alteração da posição dos pontos singulares localizados no eixo X .

A solução 3 tem ilhas magnéticas seguidas de pontos singulares intercalados regularmente e de forma simétrica com respeito ao eixo Z . Além disso, temos pontos singulares acima e abaixo do eixo X , que causam uma configuração diferente das linhas de campo magnético para a ilha magnética, que se encontra na origem, ocasionando assim, dois pontos tipo- X próximos às singularidades $(0, \pm 0, 71)$. Note que realmente temos elementos da fusão das funções geradores de *NAVAL* e de *Kan*. Observe que os pontos singulares são herdados da solução de *Kan*, e que as ilhas magnéticas que não existem na solução de *Kan* agora aparecem, herdados da solução *NAVAL*. Destaque para as linhas de campo nas proximidades da origem do sistema onde se encontram os pontos singulares.

4.1.4 Solução 4

Passaremos, agora, a usar o cosseno hiperbólico em vez do seno hiperbólico, apresentado na solução 4.1.3. Desta forma, temos a seguinte função geradora:

$$g(\zeta) = \cosh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right). \quad (4.66)$$

Vamos, agora, calcular o módulo da derivada dessa função:

$$|g'(\zeta)|^2 = a^2 \left| i + \frac{ib}{\zeta^2} \right|^2 \left| \sinh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \right|^2. \quad (4.67)$$

Usando novamente os resultados extraídos da tese de Sousa (2018), apresentados em (4.39), (4.40) e (4.41), ao substituímos (4.40) e (4.41) em (4.67), e usando a definição (B.0.2), temos:

$$|g'(\zeta)|^2 = a^2 \left[\left(1 + \frac{bR^2}{R^4} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4} \right] \left| \frac{e^{-a(Z + \frac{bZ}{R^2})} e^{ai(X - \frac{bX}{R^2})} - e^{a(Z + \frac{bZ}{R^2})} e^{-ai(X - \frac{bX}{R^2})}}{2} \right|^2. \quad (4.68)$$

Para efeitos de simplificação da escrita, introduzimos os parâmetros γ_1, γ_2 e τ_1 , apresentados em (4.43), (4.44) e (4.45). tal que, substituindo as novas simplificações, obtemos:

$$|g'(\zeta)|^2 = a^2 \gamma_1 \left| \frac{e^{-a\gamma_2} e^{ia\tau_1} - e^{a\gamma_2} e^{-ia\tau_1}}{2} \right|^2. \quad (4.69)$$

Continuamos com o processo algébrico em (4.69), usando a forma trigonométrica, a definição (B.0.3) e a propriedade (B.0.1), obtendo:

$$= \frac{a^2\gamma_1}{4} \left| e^{-a\gamma_2}(\cos a\tau_1 + i \operatorname{sen} a\tau_1) - e^{a\gamma_2}(\cos a\tau_1 - i \operatorname{sen} a\tau_1) \right|^2, \quad (4.70)$$

$$= \frac{a^2\gamma_1}{4} \left| -\cos a\tau_1(e^{a\gamma_2} - e^{-a\gamma_2}) + i \operatorname{sen} a\tau_1(e^{a\gamma_2} + e^{-a\gamma_2}) \right|^2, \quad (4.71)$$

$$= a^2\gamma_1(\cos^2 a\tau_1 \operatorname{senh}^2 a\gamma_2 + \operatorname{sen}^2 a\tau_1 \operatorname{cosh}^2 a\gamma_2), \quad (4.72)$$

$$= a^2\gamma_1(\operatorname{cosh}^2 a\gamma_2 - \cos^2 a\tau_1). \quad (4.73)$$

Por fim, encontramos:

$$|g'(\zeta)|^2 = a^2 \left[\left(1 + \frac{bR^2}{R^4} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4} \right] \left[\operatorname{cosh}^2 a \left(Z + \frac{bZ}{R^2} \right) - \cos^2 a \left(X - \frac{bX}{R^2} \right) \right]. \quad (4.74)$$

Calculamos, de modo análogo e usando as mesmas simplificações, o quadrado do módulo da função. Logo:

$$|g(\zeta)|^2 = \left| \operatorname{cosh} a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \right|^2. \quad (4.75)$$

Prosseguindo com o processo algébrico em (4.75), usando a forma trigonométrica, a definição (B.0.3) e a propriedade (B.0.1), temos:

$$= \left| \frac{e^{-a\gamma_2} e^{ia\tau_1} + e^{a\gamma_2} e^{-ia\tau_1}}{2} \right|^2, \quad (4.76)$$

$$= \left| \frac{e^{-a\gamma_2}(\cos a\tau_1 + i \operatorname{sen} a\tau_1) + e^{a\gamma_2}(\cos a\tau_1 - i \operatorname{sen} a\tau_1)}{2} \right|^2, \quad (4.77)$$

$$= \left| \cos a\tau_1 \left(\frac{e^{a\gamma_2} + e^{-a\gamma_2}}{2} \right) + i \operatorname{sen} a\tau_1 \left(\frac{e^{-a\gamma_2} - e^{a\gamma_2}}{2} \right) \right|^2, \quad (4.78)$$

$$= \left| \cos a\tau_1 \left(\frac{e^{a\gamma_2} + e^{-a\gamma_2}}{2} \right) - i \operatorname{sen} a\tau_1 \left(\frac{e^{a\gamma_2} - e^{-a\gamma_2}}{2} \right) \right|^2, \quad (4.79)$$

$$= \cos^2 a\tau_1 \operatorname{cosh}^2 a\gamma_2 + \operatorname{sen}^2 a\tau_1 \operatorname{senh}^2 a\gamma_2, \quad (4.80)$$

$$= \operatorname{cosh}^2 a\gamma_2 - \operatorname{sen}^2 a\tau_1. \quad (4.81)$$

Por fim, somando 1, elevando ao quadrado ambos os membros da equação e usando identidade trigonométrica fundamental, encontramos:

$$[1 + |g(\zeta)|^2]^2 = \left[\operatorname{cosh}^2 a \left(Z + \frac{bZ}{R^2} \right) + \cos^2 a \left(X - \frac{bX}{R^2} \right) \right]^2. \quad (4.82)$$

Usando (4.74), (4.82) e substituindo em (3.1), após alguns cálculos, temos a seguinte solução geral:

$$\Psi = \ln \frac{\operatorname{cosh}^2 a \left(Z + \frac{bZ}{R^2} \right) + \cos^2 a \left(X - \frac{bX}{R^2} \right)}{2a \sqrt{\left[\left(1 + \frac{bR^2}{R^4} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4} \right] \left[\operatorname{cosh}^2 a \left(Z + \frac{bZ}{R^2} \right) - \cos^2 a \left(X - \frac{bX}{R^2} \right) \right]}}. \quad (4.83)$$

Se $b = 0$ e $a = 1$, encontramos a seguinte equação, na sua forma simplificada:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh^2(Z) + \cos^2(X)}{2\sqrt{\cosh^2(Z) - \cos^2(X)}}. \quad (4.84)$$

Procurando os Pontos Singulares

Vamos começar calculando $g'(\zeta)$:

$$g'(\zeta) = \left[\cosh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \right]' = a \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) \sinh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right). \quad (4.85)$$

Agora, usando a definição (B.0.3) e o resultado da equação (4.85), temos:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{\left[a \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) \sinh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \right] \cdot \left[a \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) \sinh a \left(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*} \right) \right]} = 0. \quad (4.86)$$

Sabendo que $a \neq 0$ e $\zeta \neq \zeta^* \neq 0$, podemos reescrever a equação (4.86) como segue:

$$\sqrt{a^2 \left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) \sinh a \left(i\zeta - \frac{ib}{\zeta} \right) \sinh a \left(-i\zeta^* + \frac{ib}{\zeta^*} \right)} = 0. \quad (4.87)$$

Sabendo que $\sinh(ia\zeta) = i \overline{\sen(a\zeta)}$, concluímos que a solução existe se, e somente se, duas condições forem satisfeitas, a saber:

$$\left(-i - \frac{ib}{\zeta^{*2}} \right) \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) = 0, \quad (4.88)$$

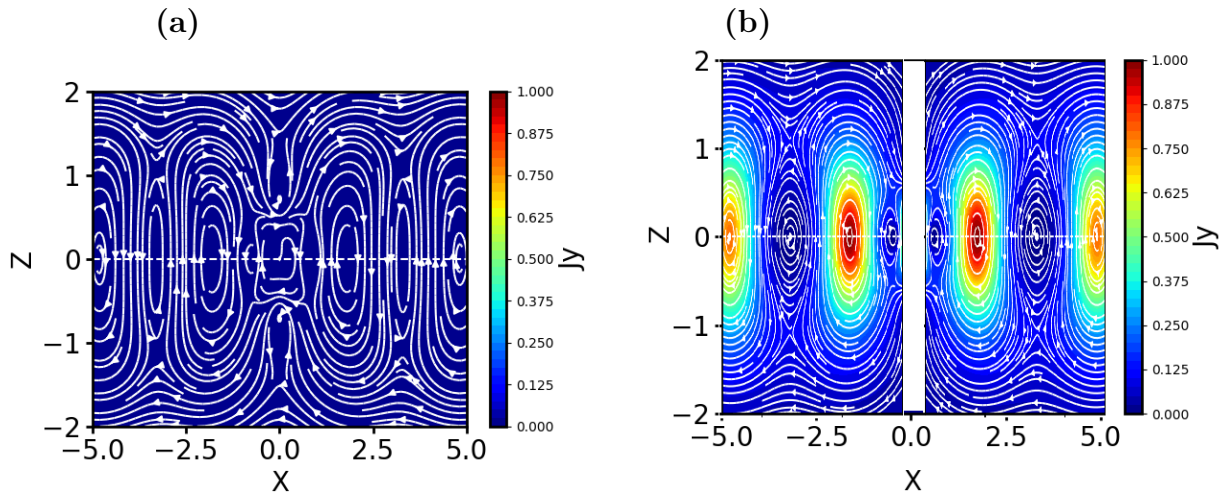
$$\sen a \left(\zeta - \frac{b}{\zeta} \right) \sen a \left(-\zeta^* + \frac{b}{\zeta^*} \right) = 0. \quad (4.89)$$

Conforme mencionado na seção anterior, a equação (4.88) foi obtida na solução de *Kan* (Seção 3.4) a partir da equação (3.21). Portanto, as singularidades são os pontos $(0, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{b})$.

Agora, pela equação (4.89), usando o fato de que $\zeta - \frac{b}{\zeta} = X - \frac{bX}{X^2} = \frac{k\pi}{a}$ (considerando $Z = 0$), obtemos as singularidades cíclicas da forma $\left(\frac{k\pi}{a} \pm \sqrt{\frac{k^2\pi^2}{a^2} + 4b}, 0 \right)$, tal que $k \in \mathbb{Z}$ e π é dado em radianos.

A seguir, verificamos na Figura 22 a solução (4.83) e suas singularidades.

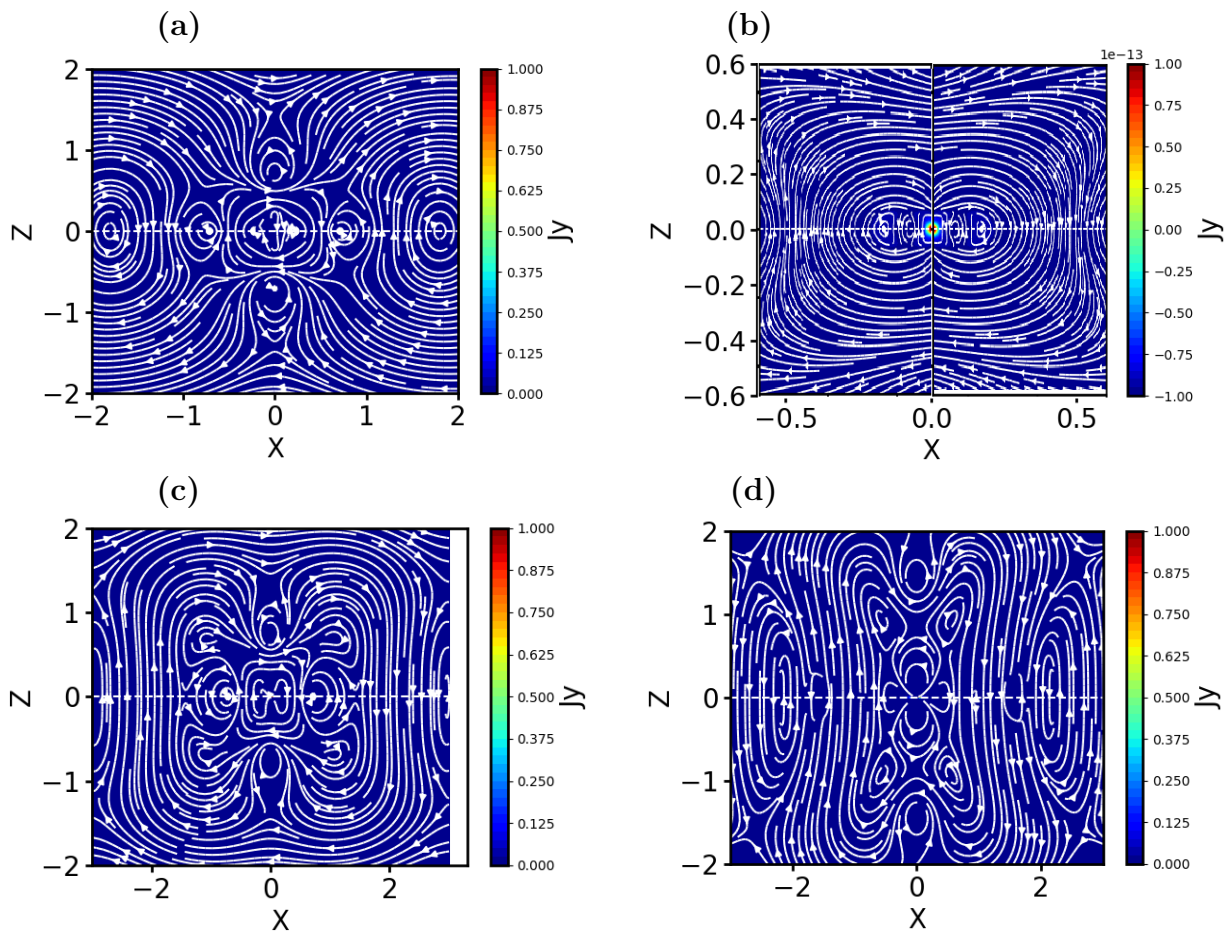
Figura 22 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.83). Foram usados $b = 0,5$ e $a = 1$ para plotá-la. Os pontos de singularidades calculados para os parâmetros já mencionados são $(0, \pm 0, 71)$ $(\pm 0, 71, 0)$ $(\pm 3, 29, 0)$. A diferença desta solução para a anterior está no não achatamento das ilhas magnéticas ao redor da origem quando próximas às singularidades $(0, \pm 0, 71)$. Na figura b) temos o mesmo gráfico da figura a) apenas retirando $-0,5 < X < 0,5$ para que a densidade de corrente seja corretamente calculada, já que as singularidades não estão presente.



Fonte: o autor.

Em relação aos parâmetros a e b temos: o parâmetro a tem a função de afastamento, mostrando maior quantidade de ilha conforme a aumenta e, o parâmetro $b > 0$ altera a localização dos pontos singulares localizados no eixo Z ; para $b < 0$ tem uma mudança nos pontos singulares localizados no eixo X e próximos a origem. Isso faz com que a configuração das linhas de campo próximo a origem fica complexa. Para notarmos essas mudanças fizemos alguns gráficos da solução (4.83). No entanto, diferentemente da Figura 22, mudaremos o tamanho das grades para melhor detalhar a região próximo a essas singularidades (ver Figura 23a e b), e mudamos também os parâmetros a e b (ver Figura 23c e d).

Figura 23 – Mudança de grade do gráfico da Figura 22. A figura a) tem uma grade quadrada de -2 a 2 em ambos os eixos, com o intuito de focarmos mais nas adjacências dos pontos singulares próximos da origem do sistema. Na figura b) temos $-0.6 < Z < 0.6$ e $-0.6 < X < 0.6$, além da retirada de uma faixa vertical de $0,02$ de comprimento, retirando assim as singularidades próximas a origem. Já nas figuras c) e d), temos as grades, $-2 < Z < 2$ e $-3 < X < 3$ com $b = -0,5$, $b = -2$, ambos com $a = 1$, respectivamente.



Fonte: o autor.

Na solução 4, assim como na solução 3, notamos, principalmente na Figura 23a, como na proximidade de pontos singulares as linhas de campo se tornam complexas. Isto se deve ao fato de que, quando temos pontos singulares, a direção dos campos se altera, podendo surgir assim ponto tipo- X . Agora, a única diferença observada quando comparamos as soluções 3 e 4 se deve ao não achatamento das ilhas anteriores e posteriores à origem do sistema.

4.1.5 Solução 5

A solução desta seção é obtida combinando as funções geradoras de Yoon-Lui-1 e Yoon-Lui-2, tomando o quociente destas. Fazendo os cálculos, obtemos a seguinte função

geradora:

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^\nu}{\frac{\zeta^2 - a}{\zeta}} = \frac{\zeta^{\nu+1}}{\zeta^2 - a}, \quad (4.90)$$

em que ν e a são constantes.

O módulo ao quadrado de $g(\zeta)$ após substituir $\zeta = X + iZ$, é o seguinte:

$$|g(\zeta)|^2 = \frac{(X^2 + Z^2)^{\nu+1}}{a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}. \quad (4.91)$$

Somando 1 a ambos os membros da equação anterior, temos:

$$1 + |g(\zeta)|^2 = \frac{(X^2 + Z^2)^{\nu+1} + a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}{a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}. \quad (4.92)$$

Prosseguindo com o raciocínio, a primeira derivada da função geradora é:

$$g'(\zeta) = \frac{\zeta^\nu [(\nu - 1)\zeta^2 - a(\nu + 1)]}{(\zeta^2 - a)^2}. \quad (4.93)$$

O módulo da derivada é:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{\frac{(X^2 + Z^2)^\nu [a(\nu + 1) - (\nu - 1)(X - iZ)^2] [a(\nu + 1) - (\nu - 1)(X + iZ)^2]}{(a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2)^2}}. \quad (4.94)$$

Com algum trabalho algébrico, eliminamos a unidade imaginária do módulo da derivada da função geradora, como segue:

$$|g'(\zeta)| = \frac{\sqrt{(X^2 + Z^2)^\nu [[(\nu - 1)(X^2 - Z^2) - a(\nu + 1)]^2 + 4(\nu - 1)^2 X^2 Z^2]}}{a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}. \quad (4.95)$$

Por fim, substituindo (4.92) e (4.95) na fórmula de Walker dada por:

$$\Psi = \ln \left[\frac{1 + |g(\zeta)|^2}{2|g'(\zeta)|} \right], \quad (4.96)$$

o resultado é o seguinte:

$$\Psi = \ln \left[\frac{\frac{(X^2 + Z^2)^{\nu+1} + a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}{a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}}{2 \frac{\sqrt{(X^2 + Z^2)^\nu [[(\nu - 1)(X^2 - Z^2) - a(\nu + 1)]^2 + 4(\nu - 1)^2 X^2 Z^2]}}{a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}} \right]. \quad (4.97)$$

Simplificando a equação, temos a expressão final:

$$\Psi = \ln \left[\frac{(X^2 + Z^2)^{\nu+1} + a^2 - 2a(X^2 - Z^2) + (X^2 + Z^2)^2}{2 \sqrt{(X^2 + Z^2)^\nu [[(\nu - 1)(X^2 - Z^2) - a(\nu + 1)]^2 + 4(\nu - 1)^2 X^2 Z^2]}} \right]. \quad (4.98)$$

Três parâmetros são inseridos a fim de simplificar a forma de escrevermos (4.98), isto é:

$$R^2 = X^2 + Z^2, \quad (4.99)$$

$$U^2 = 4X^2 Z^2, \quad (4.100)$$

$$T^2 = X^2 - Z^2. \quad (4.101)$$

A expressão final da Equação (4.98) fica:

$$\Psi = \ln \left[\frac{R^{2(\nu+1)} + a^2 - 2aT^2 + R^4}{2\sqrt{R^{2\nu} [[(\nu-1)T^2 - a(\nu+1)]^2 + (\nu-1)^2 U^2]} \right]. \quad (4.102)$$

Procurando os Pontos Singulares

Calculando a derivada da função geradora, $g(\zeta) = \frac{\zeta^{\nu+1}}{\zeta^2 - a}$, temos:

$$g'(\zeta) = \left(\frac{-a\zeta^\nu - a\nu\zeta^\nu + \nu\zeta^{\nu+2} - \zeta^{\nu+2}}{(\zeta^2 - a)^2} \right), \quad (4.103)$$

da qual, usando a definição (B.0.3), calculamos o módulo:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\frac{-a\zeta^\nu - a\nu\zeta^\nu + \nu\zeta^{\nu+2} - \zeta^{\nu+2}}{(\zeta^2 - a)^2} \right) \cdot \left(\frac{-a\zeta^{*\nu} - a\nu\zeta^{*\nu} + \nu\zeta^{*\nu+2} - \zeta^{*\nu+2}}{(\zeta^{*2} - a)^2} \right)}, \\ &= \left(\frac{-a\zeta^\nu - a\nu\zeta^\nu + \nu\zeta^{\nu+2} - \zeta^{\nu+2}}{(\zeta^2 - a)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-a\zeta^{*\nu} - a\nu\zeta^{*\nu} + \nu\zeta^{*\nu+2} - \zeta^{*\nu+2}}{(\zeta^{*2} - a)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Agora vamos calcular $\Delta \ln |g'(\zeta)| = 0$, usando o teorema (B.0.1):

$$\begin{aligned} \Delta \ln |g'(\zeta)| &= \Delta \ln \left[\left(\frac{-a\zeta^\nu - a\nu\zeta^\nu + \nu\zeta^{\nu+2} - \zeta^{\nu+2}}{(\zeta^2 - a)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-a\zeta^{*\nu} - a\nu\zeta^{*\nu} + \nu\zeta^{*\nu+2} - \zeta^{*\nu+2}}{(\zeta^{*2} - a)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \ln \left(\frac{-a\zeta^\nu - a\nu\zeta^\nu + \nu\zeta^{\nu+2} - \zeta^{\nu+2}}{(\zeta^2 - a)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \ln \left(\frac{-a\zeta^{*\nu} - a\nu\zeta^{*\nu} + \nu\zeta^{*\nu+2} - \zeta^{*\nu+2}}{(\zeta^{*2} - a)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta^{*\nu-1}(\zeta^{*4}\nu^2 + 2\zeta^{*4} - 3\zeta^{*4}\nu + 6a\zeta^{*2} + 2a\zeta^{*2}\nu - 2a\zeta^{*2}\nu^2 + a^2\nu^2 + a^2\nu)}{(\zeta^{*2} - a)^3} \right), \\ &= 4 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Por (4.105), temos a primeira condição satisfeita. Calcularemos, agora, as singularidades. Vamos substituir $\zeta = X + iZ$, na nossa equação (4.104), conforme segue:

$$\sqrt{\left(\frac{-a\zeta^\nu - a\nu\zeta^\nu + \nu\zeta^{\nu+2} - \zeta^{\nu+2}}{(\zeta^2 - a)^2} \right) \cdot \left(\frac{-a\zeta^{*\nu} - a\nu\zeta^{*\nu} + \nu\zeta^{*\nu+2} - \zeta^{*\nu+2}}{(\zeta^{*2} - a)^2} \right)} = 0. \quad (4.106)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas na equação (4.106), se $\zeta \neq \sqrt{a}$, podemos escrever:

$$(-a(1 + \nu)\zeta^\nu + (\nu - 1)\zeta^{\nu+2}) \cdot (-a(1 + \nu)\zeta^{*\nu} + (\nu - 1)\zeta^{*\nu+2}) = 0 \quad (4.107)$$

Portanto, $(-a(1 + \nu)\zeta^\nu + (\nu - 1)\zeta^{\nu+2}) = 0$ ou $(-a(1 + \nu)\zeta^{*\nu} + (\nu - 1)\zeta^{*\nu+2}) = 0$. Logo para entender podemos ver alguns casos, por exemplo, se $a = 1$ e $\nu = 1$, teríamos:

$$-2(X + iZ)^1 = 0, \quad (4.108)$$

cuja única solução seria $(0, 0)$.

Agora, para $\nu \neq 1$ e a quaisquer:

$$\zeta = \zeta^* = \pm \sqrt{\frac{a(1 + \nu)}{(\nu - 1)}}. \quad (4.109)$$

Por fim, fixando $a = 1$ e variando o valor de ν , temos as seguintes singularidades:

$$\nu = 1; \zeta = (0, 0);$$

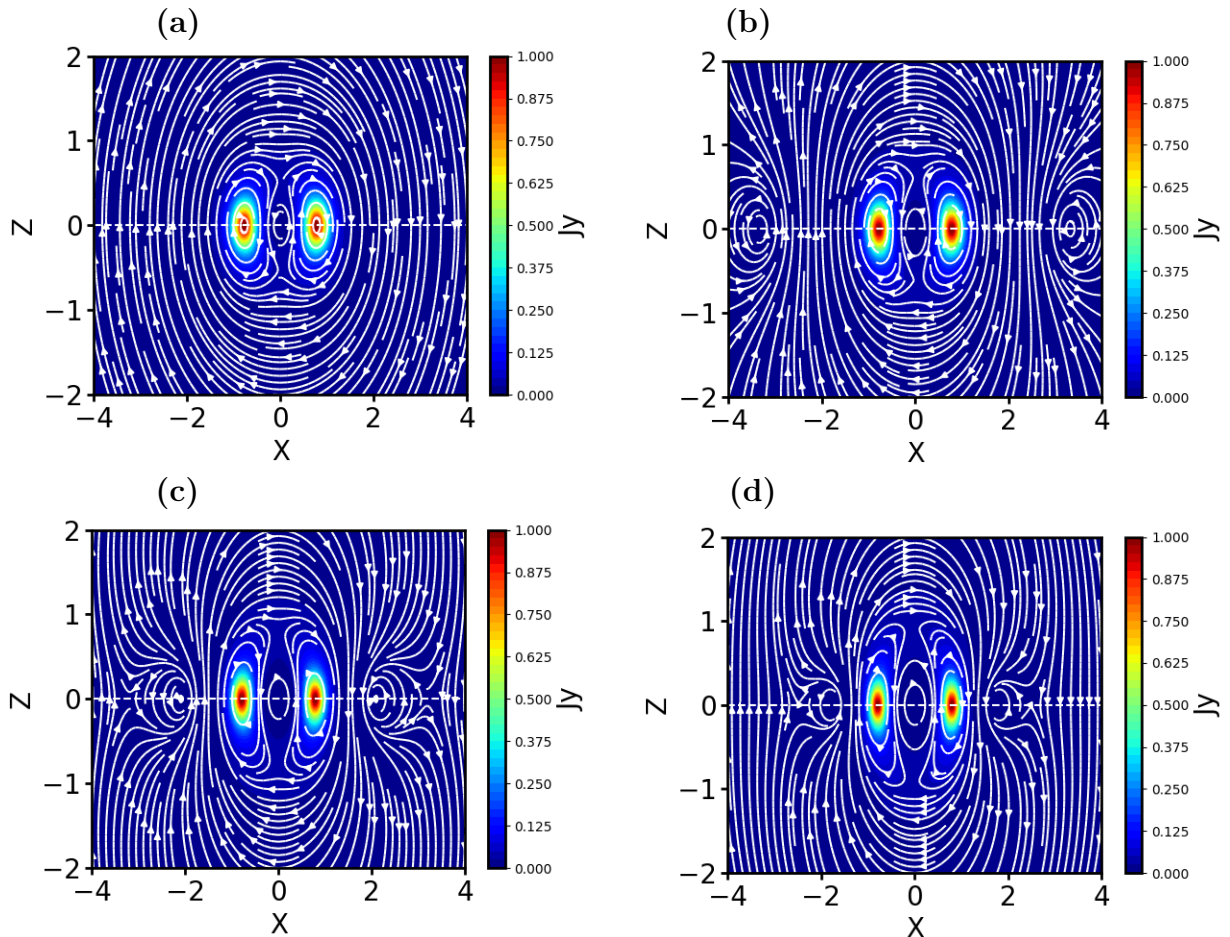
$$\nu = 1, 2; \zeta = (0, 0); \zeta = (\pm\sqrt{11}, 0);$$

$$\nu = 1, 6; \zeta = (0, 0); \zeta = \left(\pm\sqrt{\frac{13}{3}}, 0\right);$$

$$\nu = 2; \zeta = (0, 0); \zeta = (\pm\sqrt{3}, 0).$$

Observe agora a Figura 24, da solução (4.102), e note os pontos de singularidades anteriormente calculados.

Figura 24 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução dada pela equação (4.102). Foi usado $a = 1$ em todas as figuras, porém fizemos uma variação em ν , sendo $\nu = 1$, $\nu = 1, 2$, $\nu = 1, 6$ e $\nu = 2$, nas figuras de a) a d), respectivamente. Os pontos de singularidades estão localizados nos pontos $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{11}, 0)$, $(\pm\sqrt{\frac{13}{3}}, 0)$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$, nas figuras de a) a d), respectivamente.



Fonte: o autor.

A solução 5 tem os pontos singulares da solução *Yoon-Lui-2*, porém com o eixo invertido, pertencendo, portanto, ao eixo X . Também temos as ilhas duplas aparecendo um pouco menos arredondadas quando comparadas com a solução *Yoon-Lui-2*. Não observamos a formação de um anel de corrente, que aparece na solução *Yoon-Lui-1*, mesmo ao variar os parâmetros a e ν .

4.1.6 Solução 6

Esta solução é obtida combinando as funções geradoras de *Yoon-Lui-1* e *Yoon-Lui-3* mediante seu quociente. Fazendo os cálculos, obtemos a seguinte função geradora:

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^\nu}{\zeta} = \zeta^{\nu-1} - a^2 \zeta^{\nu+1}, \quad (4.110)$$

tal que ν e a são constantes.

O quadrado do módulo de $g(\zeta)$, após substituir $\zeta = X + iZ$, é o seguinte:

$$|g(\zeta)|^2 = (X^2 + Z^2)^{\nu-1} \left[a^4 (X^2 + Z^2)^2 - 2a^2 (X^2 - Z^2) + 1 \right]. \quad (4.111)$$

Somando 1 a ambos os membros da equação anterior, obtemos:

$$1 + |g(\zeta)|^2 = 1 + (X^2 + Z^2)^{\nu-1} \left(a^4 (X^2 + Z^2)^2 - 2a^2 (X^2 - Z^2) + 1 \right) \quad (4.112)$$

Prosseguindo com o raciocínio, a primeira derivada da função geradora é:

$$g'(\zeta) = \zeta^{\nu-2} [(\nu-1) - a^2(\nu+1)\zeta^2], \quad (4.113)$$

e o seu módulo é:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{(X^2 + Z^2)^{\nu-2} [((\nu-1) - a^2(\nu+1)(X-iZ)^2)((\nu-1) - a^2(\nu+1)(X+iZ)^2)]}. \quad (4.114)$$

Após algumas manipulações algébricas, podemos eliminar a unidade imaginária do módulo da derivada da função geradora:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{(X^2 + Z^2)^{\nu-2} [((\nu-1) - a^2(\nu+1)(X^2 - Z^2))^2 + 4a^4(\nu+1)^2 X^2 Z^2]}. \quad (4.115)$$

Por fim, substituindo (4.112) e (4.115) na fórmula de *Walker* dada por:

$$\Psi = \ln \left[\frac{1 + |g(\zeta)|^2}{2|g'(\zeta)|} \right], \quad (4.116)$$

o resultado é o seguinte:

$$\Psi = \ln \left[\frac{1 + (X^2 + Z^2)^{\nu-1} \left(a^4 (X^2 + Z^2)^2 - 2a^2 (X^2 - Z^2) + 1 \right)}{2\sqrt{(X^2 + Z^2)^{\nu-2} [((\nu-1) - a^2(\nu+1)(X^2 - Z^2))^2 + 4a^4(\nu+1)^2 X^2 Z^2]}} \right]. \quad (4.117)$$

Os três parâmetros apresentados em (4.99), (4.100) e (4.101) são inseridos para simplificar a forma de escrever (4.117). Finalmente, a expressão de (4.117) é:

$$\Psi = \ln \left[\frac{1 + (R^{2(\nu-1)} (a^4 R^4 - 2a^2 T^2 + 1))}{2\sqrt{R^{2(\nu-2)} [((\nu-1) - a^2(\nu+1)T^2)^2 + 4a^4(\nu+1)^2 U^2]}} \right]. \quad (4.118)$$

Procurando os Pontos Singulares

Começamos calculando a derivada da função geradora, $g(\zeta) = \zeta^{\nu-1} - a^2\zeta^{\nu+1}$, como segue:

$$g'(\zeta) = (\nu - 1)\zeta^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^\nu, \quad (4.119)$$

da qual usando a definição (B.0.3), calculamos o módulo:

$$|g'(\zeta)| = \sqrt{[(\nu - 1)\zeta^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^\nu] \cdot [(\nu - 1)\zeta^{*\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^{*\nu}]}. \quad (4.120)$$

Expandimos a igualdade $\Delta \ln |g'(\zeta)| = 0$, usando o teorema (B.0.1):

$$\begin{aligned} \Delta \ln |g'(\zeta)| &= \Delta \ln \left([(\nu - 1)\zeta^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^\nu]^{\frac{1}{2}} \cdot [(\nu - 1)\zeta^{*\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^{*\nu}]^{\frac{1}{2}} \right), \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \ln ((\nu - 1)\zeta^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^\nu)^{\frac{1}{2}} \cdot \ln ((\nu - 1)\zeta^{*\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^{*\nu})^{\frac{1}{2}} \right), \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{(\nu - 1)(\nu - 2) - a^2\nu\zeta^{*\nu}(\nu + 1)}{2\zeta^*(\nu - a^2\zeta^{*2}(\nu + 1) - 1)} \right), \\ &= 4 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Por (4.121), temos a primeira condição satisfeita. Agora buscaremos as singularidades. Substituímos (4.120), conforme segue:

$$\sqrt{[(\nu - 1)\zeta^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^\nu] \cdot [(\nu - 1)\zeta^{*\nu-2} - a^2(\nu + 1)\zeta^{*\nu}]} = 0. \quad (4.122)$$

Efetuada algumas manipulações algébricas, a equação (4.122) será válida se, e somente se:

$$[(\nu - 1)(X + iZ)^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)(X + iZ)^\nu] \cdot [(\nu - 1)(X - iZ)^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)(X - iZ)^\nu] = 0 \quad (4.123)$$

Portanto, $(\nu - 1)(X + iZ)^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)(X + iZ)^\nu = 0$ ou $(\nu - 1)(X - iZ)^{\nu-2} - a^2(\nu + 1)(X - iZ)^\nu = 0$, note que tem uma variável no expoente. Logo para entender podemos ver alguns casos, por exemplo, se $a = 1$ e $\nu = 1$, teríamos:

$$-2(X + iZ)^1 = 0, \quad (4.124)$$

cujas únicas soluções seriam $(0, 0)$.

Agora, para $\nu \neq -1$ e $a \neq 0$ quaisquer, teríamos a seguinte solução para as singularidades:

$$\zeta = \zeta^* = \pm \sqrt{\frac{\nu - 1}{a^2(\nu + 1)}}, \quad (4.125)$$

ou seja, os pontos singulares são: $\left(\pm \sqrt{\frac{\nu-1}{a^2(\nu+1)}}, 0 \right)$.

Agora, fixando $a = 1$ e variando o valor de ν , temos as seguintes singularidades:

$$\nu = 1; \zeta = (0, 0);$$

$$\nu = 1, 6; \zeta = (\pm 0, 48, 0);$$

$$\nu = 1, 8; \zeta = (\pm 0, 53, 0);$$

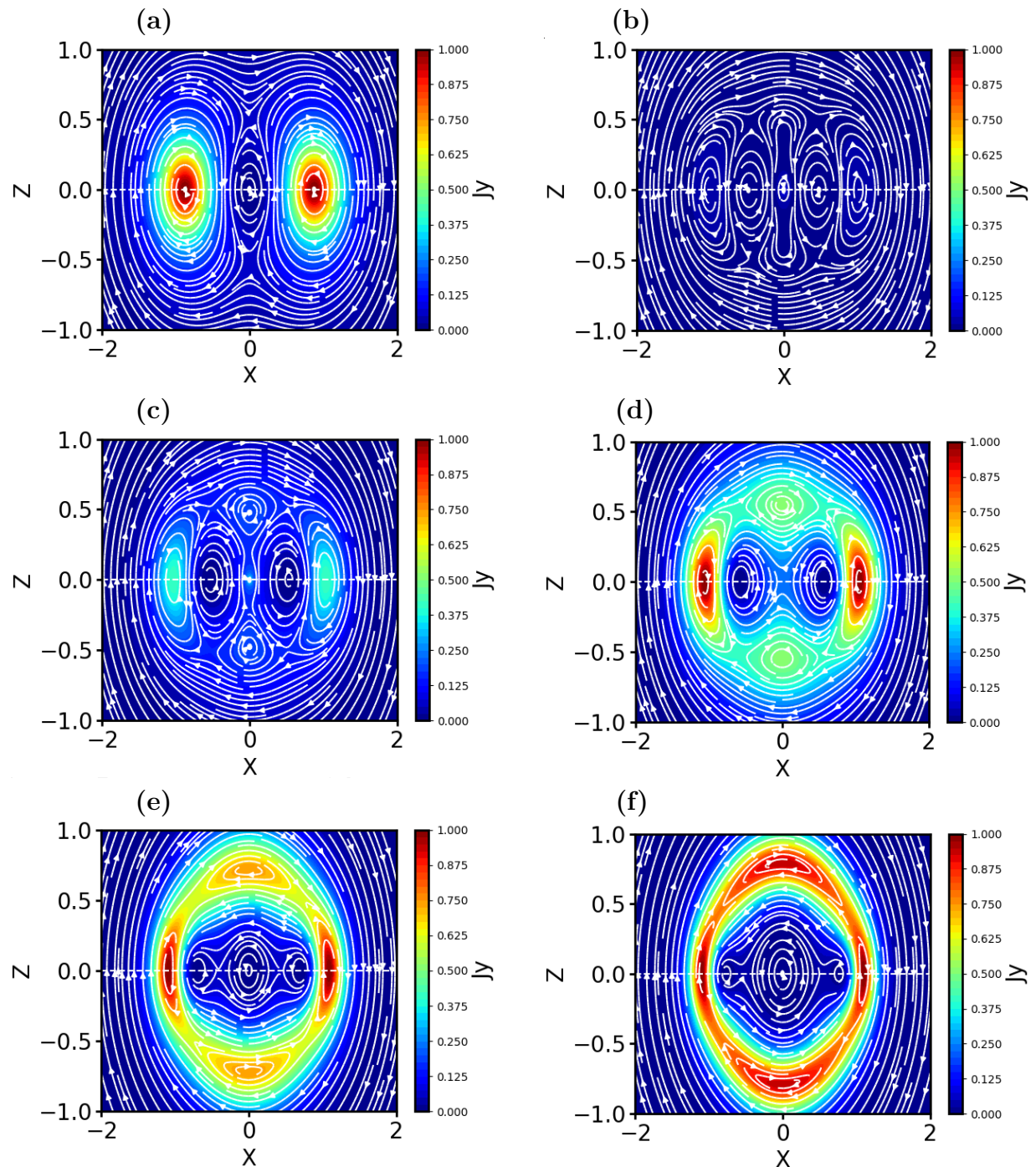
$$\nu = 2; \zeta = (\pm 0, 58, 0);$$

$$\nu = 3; \zeta = (\pm 0, 71, 0);$$

$$\nu = 4; \zeta = (\pm 0, 77, 0).$$

Observe a Figura 25, da solução (4.118), e note os pontos de singularidades anteriormente calculados.

Figura 25 – Gráfico da densidade de corrente da nossa proposta de solução, dada pela equação (4.118). Foi usado $a = 1$ em todas as figuras, e fizemos uma variação em ν , sendo $\nu = 1, 1, 6, 1, 8, 2, 3$ e 4 nas figuras de a) a f), respectivamente. Os pontos de singularidades estão localizados nos pontos $(0, 0)$, $(\pm 0, 48, 0)$, $(\pm 0, 53, 0)$, $(\pm 0, 58, 0)$, $(\pm 0, 71, 0)$, $(\pm 0, 77, 0)$, nas figuras de a) a f), respectivamente.



Fonte: o autor.

Na solução 6 temos, efetivamente, o aparecimento da formação de um anel de corrente conforme alteramos o parâmetro ν . Acreditamos que isto seja herdado da solução

Yoon-Lui-1. Já as ilhas magnéticas e os pontos singulares são herdados de Yoon-Lui-2. Note que temos algo que transcende Yoon-Lui-1 e 2, pois conforme o parâmetro ν se altera temos a formação de um número maior de ilhas, com destaque para duas que aparecem no eixo Z , conforme mostrado na Figura 25d. Portanto, existe uma grande diferença entre as soluções 5 e 6, justamente por conta do anel de corrente que só aparece na solução 6, apesar de ambas terem como base a função geradora da solução Yoon-Lui-1.

4.2 Modos de Ondas MHD Considerando a Corrente de Deslocamento

Nesta seção revisitamos as equações básicas MHD, mantendo o efeito da corrente de deslocamento na lei de Ampère a fim de obter a velocidade de fase de uma onda magneto-acústica.

Considerando a corrente de deslocamento, a equação (2.90) é escrita como:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.126)$$

Resolvendo \vec{J} da equação anterior e usando a equação (2.92) para o campo elétrico \vec{E} , a seguinte expressão é obtida:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \times \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{u} \times \vec{B})}{\partial t} \right). \quad (4.127)$$

Posteriormente, a expressão (4.127) é substituída em (2.88), e procedemos para combinar as equações (2.87)-(2.92). O leitor encontrará todo o desenvolvimento algébrico em Bittencourt (2018a). Finalmente chegamos à equação para a velocidade do fluido, que tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \left[\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) \vec{u}_1 - (\vec{v}_A \cdot \vec{u}_1) \frac{\vec{v}_A}{c^2} \right] + (v_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \cdot \vec{u}_1) \vec{k} + \\ & + (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) \left[(\vec{k} \cdot \vec{v}_A) \vec{u}_1 - (\vec{v}_A \cdot \vec{u}_1) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{u}_1) \vec{v}_A \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Notamos que, ao comparar (4.128) com (2.96), a única diferença está no primeiro termo à esquerda, no fator que multiplica ω^2 . Mais adiante, mostraremos que este fator afeta as expressões da velocidade de fase das ondas MHD existentes em um plasma.

A equação (4.128) é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \left[\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) u_1 - (v_A \cdot u_1) \frac{v_A}{c^2} \right] + \\ & + II + III + IV + V + VI = 0. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Isto significa que os resultados da seção 2.8.2 podem ser usados para os termos II a VI em (2.102). Em (4.129) são substituídos (2.97)-(2.101), e é necessário trabalhar

mais um pouco com o primeiro termo da equação. O resultado é:

$$-\omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) u_{1x} \hat{i} - \omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) u_{1y} \hat{j} - \omega^2 u_{1z} \hat{k}. \quad (4.130)$$

Agora, novamente, vamos separar por eixos: o eixo Z permanece inalterado e começamos pelo eixo X :

$$u_{1x} \left[-\omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) + k^2 v_A^2 + k^2 v_s^2 \sin^2 \theta \right] + u_{1z} [k^2 v_s^2 \sin \theta \cos \theta] = 0. \quad (4.131)$$

Continuando, o eixo Y é:

$$u_{1y} \left[-\omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) + k^2 v_A^2 \cos^2 \theta \right] = 0. \quad (4.132)$$

De (4.132), se $u_{1y} \neq 0$, haverá oscilações perpendiculares a \vec{k} e \vec{B}_0 , ou seja, a presença de uma onda polarizada linearmente. Desta forma:

$$-\omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) + k^2 v_A^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (4.133)$$

e a expressão para a velocidade de fase da onda é obtida como:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \pm \frac{v_A \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{v_A^2}{c^2}}}. \quad (4.134)$$

Na equação anterior, existem dois casos limites: *i*) se $\theta = 0^\circ$, tem-se $v_{ph} \parallel B_0$, e portanto uma onda de Alfvén pura; *ii*) se $\theta = 90^\circ$, tem-se $v_{ph} = 0$, e portanto não há onda.

Para continuar a demonstração, as equações para os eixos X e Z são convenientemente reescritas na forma matricial:

$$(A_{2,2}) \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.135)$$

em que $A_{2,2}$ é a matriz:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) + k^2 v_A^2 + k^2 v_s^2 \sin^2 \theta & k^2 v_s^2 \sin \theta \cos \theta \\ k^2 v_s^2 \sin \theta \cos \theta & -\omega^2 + k^2 v_s^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.136)$$

Para obter a solução não trivial de (4.135), deve-se considerar que $u_{1x} \neq 0$ e $u_{1z} \neq 0$. Portanto, é necessário que o determinante da matriz $A_{2,2}$ seja nulo, isto é,

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) + k^2 v_A^2 + k^2 v_s^2 \sin^2 \theta \right) \left(-\omega^2 + k^2 v_s^2 \cos^2 \theta \right) \\ & - \left(k^2 v_s^2 \sin \theta \cos \theta \right) \left(k^2 v_s^2 \sin \theta \cos \theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Agrupamos alguns termos, como segue:

$$\begin{aligned} & \omega^4 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) - \omega^2 k^2 v_s^2 \underbrace{(\cos^2 \theta + \sen^2 \theta)}_1 - \\ & - \frac{\omega^2 k^2 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{c^2} - \omega^2 k^2 v_A^2 + k^4 v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta + \\ & + \underline{k^4 v_s^4 \sen^2 \theta \cos^2 \theta} - \underline{k^4 v_s^4 \sen^2 \theta \cos^2 \theta} = 0. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Simplificando, temos:

$$\begin{aligned} & \omega^4 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) - (v_s^2 + v_A^2 + \frac{v_s^2}{c^2} v_A^2 \cos^2 \theta) \omega^2 k^2 + \\ & + k^4 v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta = 0. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{1}{k^4}$ e fazendo a mudança de variável $X = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2$, obtemos a seguinte equação quadrática:

$$\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) X^2 - \left(v_s^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \cos^2 \theta \right) + v_A^2 \right) X + v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (4.140)$$

A fim de resolver (4.140), calculamos seu discriminante, ou seja:

$$\Delta = \left(v_s^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \cos^2 \theta \right) + v_A^2 \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta, \quad (4.141)$$

e

$$X_{1,2} = \frac{\left(v_s^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \cos^2 \theta \right) + v_A^2 \right) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right)}. \quad (4.142)$$

Fazendo alguns agrupamentos na equação anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}} v_s^2 + \frac{1}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}} v_A^2 \right) \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}} v_s^2 + \frac{1}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}} v_A^2 \right)^2 - \frac{4 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Para reduzir (4.143) e escrevê-la de forma semelhante a (2.119), convém introduzirmos alguns parâmetros. A relação entre a velocidade de Alfvén em um sistema de referência inercial (v_A) e a velocidade da luz no vácuo (c) é usada para definir $\beta_A = v_A/c$. Adaptamos o fator de Lorentz para escrevê-lo em função da velocidade de Alfvén, denotada por γ_A , onde:

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_A^2}}. \quad (4.144)$$

O parâmetro adimensional γ_θ é introduzido por:

$$\gamma_\theta^2 = \gamma_A^2 (1 + (\beta_A \cos \theta)^2). \quad (4.145)$$

Também introduzimos uma expressão semelhante a (2.86), que tem dimensão de velocidade:

$$v_{M\gamma}^2 = \gamma_\theta^2 v_s^2 + \gamma_A^2 v_A^2. \quad (4.146)$$

Esta expressão permite definirmos $v_{M\gamma}$ como a velocidade magneto-acústica anisotrópico-relativística, pois ela depende de θ e do valor de v_A em relação a c . Pode-se verificar que, para $\theta = 90^\circ$ e $v_A \ll c$, obtemos (2.86). A etapa final é substituir (4.144) e (4.146) em (4.143):

$$v_{ph} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(v_{M\gamma}^2 \pm \sqrt{v_{M\gamma}^4 - 4\gamma_A^2 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta} \right)}, \quad (4.147)$$

onde o sinal da raiz quadrada externa muda a direção de propagação da onda. Comparando com (2.119), a equação acima representa modos MHD rápidos para o sinal positivo na raiz quadrada interna, e lentos quando o sinal é negativo. O leitor pode verificar que para $v_A \ll c$, as equações (4.134) e (4.147) tornam-se (2.112) e (2.119), respectivamente.

A onda com esta velocidade de fase é chamada *onda Alfvén pura*, nomeadamente,

$$v_{ph} = \pm \gamma_A v_A \cos \theta. \quad (4.148)$$

Em outras palavras, temos de (4.147) dois tipos de onda: a onda MHD rápida:

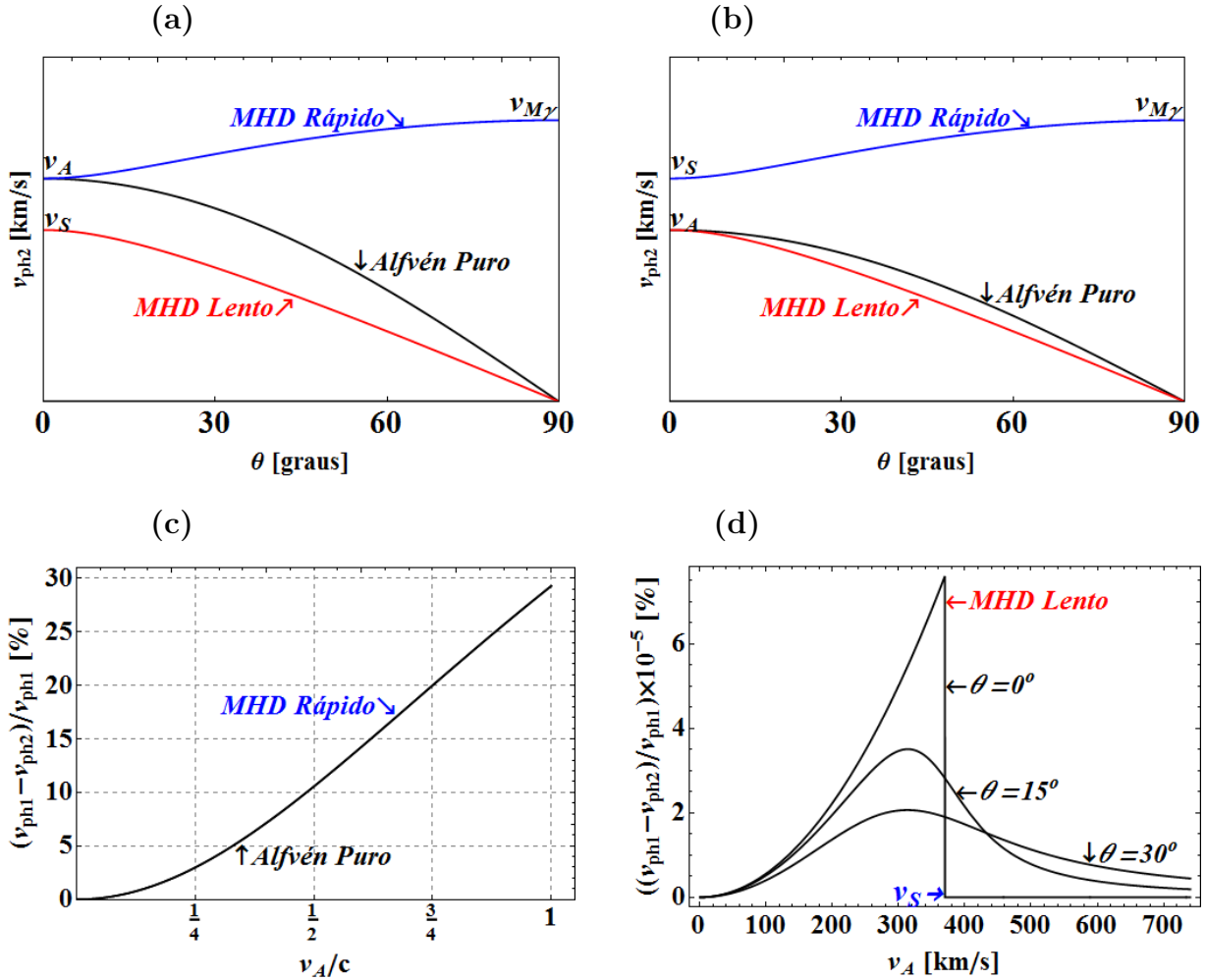
$$v_{ph} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(v_{M\gamma}^2 + \sqrt{v_{M\gamma}^4 - 4\gamma_A^2 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta} \right)}, \quad (4.149)$$

e a onda MHD lenta:

$$v_{ph} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(v_{M\gamma}^2 - \sqrt{v_{M\gamma}^4 - 4\gamma_A^2 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta} \right)}. \quad (4.150)$$

Os painéis (a) e (b) da Figura 26 mostram as variações das velocidades de fase de cada um dos modos de onda. Já nos painéis (c) e (d), exibe-se a porcentagem de variação em cada um dos três modos de onda quando o efeito da corrente de deslocamento é considerado nas expressões da velocidade de fase, influenciada pela variação da velocidade de Alfvén quando $v_A > v_s$.

Figura 26 – As figuras superiores mostram as variações das velocidades de fase de cada um dos modos de onda MHD rápido (cor azul), MHD lento (cor vermelha) e puro (cor preta) em função do ângulo θ entre \vec{k} e \vec{B}_0 , para os casos (a) $v_A > v_s$ e (b) $v_A < v_s$. Os gráficos foram feitos a partir das equações (4.134) e (4.147), mas o resultado seria o mesmo mostrado na Figura 7, p. 389 de Bittencourt (2018a), construído com as equações (2.112) e (2.119). Isto ocorre porque a condição $v_A \ll c$ foi usada. O painel (c) mostra que os modos rápido e puro são sobrepostos, e a forma do gráfico não depende do valor de θ . O painel (d) mostra o modo de onda lento para três valores diferentes do ângulo θ .



Fonte: o autor.

Faremos, agora, uma discussão física sobre a conveniência de incluir ou negligenciar a corrente de deslocamento ao estudar ondas de Alfvén e ondas magnetoacústicas em um determinado sistema físico imerso em um plasma.

Primeiramente, devemos entender o porquê da correção de *Maxwell* à lei de *Ampère*. Esta lei descreve a existência de um campo magnético em torno de um meio condutor como consequência do fluxo de carga elétrica através dele. No entanto, em um circuito elétrico, ao incluir um capacitor elétrico ou capacitor no caminho da corrente elétrica, o

fluxo de carga entre as placas é interrompido, enquanto que um campo magnético continua a existir circundando a região entre as placas. Maxwell elegantemente resolveu esse problema adicionando o termo J_d à lei de *Ampère*. Ou seja, a variação temporal do campo elétrico dentro do capacitor, causada pelas cargas de polaridades opostas acumuladas nas placas metálicas, é responsável pela existência do campo magnético. Esse resultado também foi útil para obter as equações das ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo.

Em segundo lugar, fica evidente que o termo incorporado por *Maxwell* é uma generalização, não uma especificação, de modo que seu uso não invalidará o resultado de determinado modelo. Na verdade, ele descreve completamente os fenômenos eletromagnéticos. O problema surge quando, por conveniência, geralmente para reduzir a complexidade matemática dos modelos (conforme explicado em [Leroy \(1983\)](#)), desejamos ignorar J_d . Na formulação apresentada nesta seção, as equações (4.134) e (4.147) podem ser utilizadas em qualquer plasma que atenda às condições (simplificações) adotadas na equação de *Ohm* (2.92). Deixamos claro que, ao incorporar outros termos na lei de *Ohm*, não invalidamos o uso de J_d , mas teremos um aumento na complexidade do sistema, o que nos força a fazer um estudo numérico do problema, bem como a admitir a inclusão de outros fenômenos físicos como instabilidades e alguns tipos de ondas ([JAUER et al., 2019](#)).

Para negligenciar os cálculos de um fluido magneto-condutor, a ordem de magnitude da velocidade de Alfvén (2.2) e os valores extremos que ela pode adotar devem ser considerados. Se $v_A \ll c$ em todo o volume do espaço-tempo, então J_d pode ser desprezado. Como v_A é diretamente proporcional ao valor do campo magnético e inversamente proporcional à densidade, basta ter o conhecimento prévio dos valores dessas magnitudes em um dado plasma para poder levar em conta ou não o valor de J_d . Por exemplo, em [Leroy \(1983\)](#), o autor considera a atmosfera solar em um estado termodinâmico isotérmico, que permite adotar uma função exponencial da densidade em termos da altitude. Também consideramos um modelo analítico para reproduzir o campo magnético na região de interesse. Neste modelo, como a densidade diminui exponencialmente, velocidades de Alfvén maiores que c podem ser erroneamente obtidas e, como resultado da negligência de J_d , uma subestimação do fluxo de energia através do limite superior surge. Como as ondas de Alfvén não se propagam no vácuo (porque elas dependem da presença de partículas), elas serão refletidas no limite superior de volta para o sistema, o que não é desejado. No entanto, ao considerar J_d , os limites são definidos de tal forma que, além do limite superior, no vácuo, a onda de Alfvén se tornará uma onda eletromagnética e não precisará ser refletida de volta para o sistema. Outro exemplo pode ser encontrado em plasmas relativísticos de elétrons e pósitrons, como em pulsares e em núcleos ativos de galáxias, constituídos por campos magnéticos intensos onde J_d deve ser levado em consideração para estudar a velocidade de fase das ondas ([CRAMER, 2001](#)).

Passemos à discussão física dos modos de ondas MHD, apresentados anteriormente. Para isto, contaremos com o apoio da Figura 26. Nos dois painéis superiores da figura, mostra-se a variação dos modos de onda MHD rápido (cor azul), MHD lento (cor vermelha) e puro (cor preta), todos eles sendo plotados como funções do ângulo θ . O painel (a) corresponde ao caso em que $v_A > v_s$, e o (b) ao caso em que $v_A < v_s$. Os gráficos foram desenhados a partir de (4.134) e de (4.147), considerando que $v_A \ll c$, com θ variando entre 0° e 90° . Devido à condição $v_A \ll c$, o resultado seria o mesmo se utilizássemos (2.112) e (2.119). Este resultado está de acordo com o mostrado na Figura 7, p. 389 de Bittencourt (2018a). Ambas as figuras ajudam a verificar que as deduções apresentadas para obter (2.112) e (2.119), considerando a corrente de deslocamento, estão corretas. A verificação dos resultados é uma etapa importante na construção do conhecimento científico.

Analisando o painel (a) em mais detalhes, podemos ver que se $\theta = 0^\circ$, o modo rápido e o puro têm a mesma velocidade de fase, que é igual à velocidade de Alfvén. Ou seja, trata-se de uma onda de Alfvén movendo-se na direção do campo magnético e oscilando na direção transversal. A velocidade de fase do modo rápido aumenta junto com o valor de θ , até que, em 90° , ela terá o valor $v_{ph} = v_{M\gamma}$, dado por (4.146), e que passa a ser (2.86) quando $v_A \ll c$. Os outros dois modos diminuem até o valor de $v_{ph} = 0$, em 90° . Comparando o painel (b) com o painel (a), vemos que o modo puro não apresenta qualquer alteração. Os modos rápido e lento só são alterados quando $\theta = 0^\circ$; neste caso, para o modo rápido, tem-se $v_{ph} = v_s$, e para o modo lento, $v_{ph} = v_A$.

Nas duas ilustrações abaixo da Figura 26, o objetivo é mostrar como se dá a variação de (4.134) e de (4.147) em relação a (2.112) e a (2.119) quando a velocidade de Alfvén aumenta. Esta seria uma forma de quantificar a importância de se considerar o efeito da corrente de deslocamento no cálculo da velocidade de fase de cada um dos modos de onda MHD. Para realizar essa comparação, usamos a seguinte relação:

$$P(\%) = \frac{v_{ph1} - v_{ph2}}{v_{ph1}} \times 100\%, \quad (4.151)$$

onde o subíndice 1 refere-se a uma das equações (2.112) ou (2.119), enquanto o subíndice 2 refere-se a (4.134) ou (4.147).

A equação (4.151) sempre terá valores positivos, uma vez que o efeito da corrente de deslocamento faz com que seja obtido um limite no valor máximo da velocidade de fase, e portanto $v_{ph1} > v_{ph2}$. Por exemplo, considerando (4.134) com $\theta = 0^\circ$, no caso hipotético em que matematicamente $v_A \rightarrow \infty$, a velocidade de fase será $v_{ph} = c$. Porém, nas mesmas condições, em (2.112) obtemos que $v_{ph} \rightarrow \infty$. Uma maneira mais clara de ver isto é quando assumimos que $v_A = c$, sob as mesmas condições. Teríamos que (4.134) derivaria de $v_{ph} = c/\sqrt{2}$ e (2.112), resultando em que $v_{ph} = c$.

Como um exemplo para fins de comparação, consideremos valores característicos do vento solar no meio interplanetário, próximo à órbita terrestre em baixa atividade

solar. Esses valores são $B = 5$ nT e $\rho = 5$ próton/cm³. Para obter $v_A = c$ com este valor de densidade, a magnitude do campo magnético teria que ser igual a $B = 30\,733$ nT. Ambos os valores estão bastante distantes dos valores reais medidos pelos instrumentos de bordo de espaçonaves no meio interplanetário. Um outro exemplo é o da fotosfera solar, a uma altitude de 490 km, onde existem intervalos de campo magnético muito fortes, da ordem de 0,1 T. Neste caso, as ondas de Alfvén desaparecem (VRANJES; KONO, 2014; VRANJES, 2014).

Como um exemplo didático, na Figura 26c mostramos a porcentagem de variação de (4.151) para os modos de onda MHD puro e rápido em função de uma variação na razão v_A/c muito pequena. Levaremos em consideração o caso em que $v_A > v_s$, pois não faz sentido realizar esta discussão para $v_A < v_s$, uma vez que estaremos sempre na condição $v_A \ll c$, onde o efeito da corrente de deslocamento sobre o valor da velocidade de fase da onda é muito pequeno. O valor de v_A/c foi intencionalmente estendido até o valor máximo, 1, apenas para melhor visualização. Como resultado, mostra-se que os modos puro e rápido estão sobrepostos, pois apresentaram o mesmo comportamento funcional quando variamos v_A/c . Além disso, verificou-se que a forma do gráfico independe do ângulo θ . Observamos que, no intervalo $0 < v_A/c < 1/2$, existe um percentual de variação de 10%. Para $v_A/c \approx 1$, esta porcentagem é de aproximadamente 30%.

Na Figura 26d, plotamos (4.151) para observar o comportamento do modo MHD lento. Este modo, ao contrário dos anteriores, depende do ângulo θ . Quando o ângulo aumenta de 0° para 90° , a porcentagem de variação diminui. Mesmo assim, esta modalidade praticamente não é influenciada pelo efeito da corrente de deslocamento, pois o percentual de variação é da ordem de 10^{-5} %. O valor máximo de (4.151) observado no painel 26d é $\approx 8 \times 10^{-5}$ %, quando $v_A = v_s$ e $\theta = 0^\circ$. Para ângulos maiores, o máximo continua a ser $v_A = v_s$, mas com um valor menor do que no caso $\theta = 0^\circ$.

Em resumo, expusemos a importância de se considerar a corrente de deslocamento na lei de *Ampère-Maxwell* ao deduzir uma equação para a velocidade de um fluido. Embora este seja um tópico bastante conhecido na Física de Plasma, a abordagem aqui apresentada foi pedagógica durante a apresentação do conteúdo. Um cuidado especial foi tomado em mostrar os passos algébricos necessários para desenvolver as equações. Encontramos, na literatura, apenas o desenvolvimento matemático para atingir a velocidade de fase dos modos de onda MHD, quando a corrente de deslocamento não foi considerada, faltando a apresentação dos detalhes ao se considerar esta corrente. Com o objetivo de auxiliar os alunos de Física, mostramos em detalhes o desenvolvimento algébrico para a obtenção dos modos de onda considerando-se a corrente de deslocamento.

Grande parte da discussão desta seção centrou-se nas diferenças numéricas entre as velocidades de fase de cada modo de onda MHD, considerando ou não a corrente de deslocamento, e no caso em que a velocidade de Alfvén aumenta para valores próximos à

velocidade da luz. A velocidade de Alfvén pode aumentar por três razões: um aumento no campo magnético, uma diminuição na densidade ou ambos. Porém, para obter valores próximos a c são necessários valores extremos de campo e densidade, que na prática são difíceis de relacionar com a presença de ondas de Alfvén.

Como resultado principal, mostramos que é muito importante considerar o efeito da corrente de deslocamento ao trabalhar com os modos de onda MHD puro e rápido nos casos em que $v_A > v_g$. Para o modo de onda MHD lento, a corrente de deslocamento praticamente não tem influência no valor da velocidade de fase da onda conforme a velocidade de Alfvén aumenta. Ao considerar a corrente de deslocamento, sugerimos calcular a velocidade magneto-acústica com a expressão (4.146), que definimos como a velocidade magneto-acústica anisotrópico-relativística. O modo elegante de escrever (4.146) é um resultado inovador desta tese.

4.3 Identificação e Caracterização de Pontos Singulares em Soluções Analíticas da Equação de GS

Nesta seção propomos uma metodologia para identificar regiões em torno de pontos singulares com velocidade relativística de Alfvén devida a valores intensos do campo magnético e/ou baixa densidade. Estudaremos os pontos singulares que aparecem nas soluções analíticas propostas nesta tese. Sabemos que excluir regiões em torno de pontos singulares de soluções analíticas é útil para garantir que a condição de *Courant – Friedrichs – Lewy* (CFL) seja satisfeita nas simulações clássicas de MHD (GONZÁLEZ-AVILÉS; GUZMÁN, 2018; GONZÁLEZ-AVILÉS; GUZMÁN; FEDUN, 2017; GONZÁLEZ-AVILÉS *et al.*, 2015), bem como nas proximidades dos pontos singulares, evitando o caso $B \rightarrow \infty$, e como consequência, o caso em que $v_A \rightarrow \infty$. Matematicamente, o que foi exposto acima implica que, muito próximo dos pontos singulares, a velocidade de Alfvén torna-se maior que c , o que do ponto de vista físico, é uma condição a ser evitada. No entanto, à medida que nos afastamos dos pontos singulares, a velocidade de Alfvén diminui. Portanto, a pergunta que pretendemos responder nesta seção é: “até que distância a velocidade de Alfvén deve estar afastada do ponto singular a fim de garantir que ela tenha um valor consistente, relacionado a algum sistema físico em uma simulação MHD clássica?”. Após respondida a questão, surge uma nova pergunta: “na prática, como implementar um método que permita excluir essas regiões do domínio de integração da solução analítica?”. Ainda, supondo que a resposta à pergunta anterior seja positiva, devemos verificar se a solução pode ser útil ou não para obter condições iniciais em modelos MHD e também para aperfeiçoar a solução numérica da equação de GS.

A velocidade *Alfvén* é definida por (2.2). Por outro lado, a velocidade de fase (v_{ph}) é a taxa com que a onda se propaga em algum meio e, em particular, é definida em termos da frequência angular da oscilação (ω) e do número de onda ou constante de propagação

(k). A velocidade de fase das ondas eletromagnéticas no espaço livre é:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (4.152)$$

em que c é a velocidade da luz e ϵ_0 é a permissividade do espaço livre.

Na matéria, são definidas a permeabilidade μ e a permissividade ϵ . Conseqüentemente, a velocidade de fase de uma onda eletromagnética redefine-se como sendo $v_{ph} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Num fluido magneto-condutor, as condições $\mu = \mu_0$ e $\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$ são satisfeitas, em que $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ é a frequência do plasma (FITZPATRICK, 2008).

A velocidade de fase para ondas incidentes no plasma é:

$$\begin{aligned} v_{ph}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon(\omega)}} = \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}. \end{aligned} \quad (4.153)$$

Para uma onda que se propaga na direção perpendicular ao campo magnético, temos $\vec{k} \perp \vec{B}_0$, $\vec{k} \cdot \vec{v}_A = 0$, $\vec{v}_A \cdot \vec{u}_1 = 0$ e $\vec{u}_1 \cdot \vec{k} = u_1 k$. As condições anteriores são usadas para reduzir (4.128), e o resultado é a velocidade de fase da onda magneto-acústica longitudinal com velocidade $v_{M\gamma}$ propagando-se através de \vec{B}_0 . Ou seja, na equação (4.149), do modo de onda MHD rápido, considera-se $\theta = 90^\circ$, e o resultado é o seguinte:

$$v_{ph} = \pm \sqrt{v_{M\gamma}^2}, \quad (4.154)$$

com $v_{M\gamma}$ definido em (4.146), e chamado de velocidade magneto-acústica anisotrópico-relativística. Em (4.146), para $\theta = 90^\circ$, temos:

$$v_{M\gamma}^2 = \gamma_A^2 (v_s^2 + v_A^2), \quad (4.155)$$

com γ_A definido em (4.144).

Podemos redigir a equação (4.154) da seguinte forma:

$$v_{ph} = \pm \frac{c \sqrt{(1 + v_s^2/v_A^2)}}{\sqrt{1 + c^2/v_A^2}}. \quad (4.156)$$

Em (4.144), o sinal à frente de β_A (mais) é oposto ao do fator de *Lorentz* original (menos). Embora v_{ph} possa ser maior que c , essa velocidade em (4.156) é sempre menor do que c . A onda com velocidade de fase definida por (4.154) ou (4.156) tem um campo elétrico associado, $\vec{E} = -\vec{u}_1 \times \vec{B}_0$. Portanto, a onda é semelhante a uma onda eletromagnética porque $\vec{E} \perp \vec{B}_0 \perp \vec{k}$. No entanto, trata-se de uma onda longitudinal, pois $\vec{u}_1 \parallel \vec{k}$. Além disso, essa onda é não dispersiva (independente da frequência). Ao contrário da onda eletromagnética, a onda magneto-acústica tem flutuações de densidade ao longo

da direção de \vec{k} (BITTENCOURT, 2018a). Esta onda pode produzir compressões e rarefações das linhas do campo magnético sem alterar sua direção, permanecendo o fluido condutor “congelado” nas linhas do campo (ALFVÉN, 1942). Diferenças muito grandes entre os valores de pressão do fluido e da pressão magnética podem transformar a onda magneto-acústica em uma onda acústica ou mesmo em uma onda de Alfvén.

Por outro lado, para uma onda que se propaga na direção do campo magnético, temos $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ e $\vec{k} \cdot \vec{v}_A = kv_A$. Nesse caso, da análise de (4.147) e (4.148) (veja também a Figura 26 painéis *a* e *b*, no caso que $\theta = 0^\circ$) duas soluções de (4.128) são possíveis: primeiro, se $\vec{u}_1 \parallel \vec{k}$, obteremos uma onda acústica longitudinal comum com $v_{ph} = \pm v_S$, conhecido como modo longitudinal; em segundo lugar, se $\vec{u}_1 \perp \vec{k}$, então obteremos uma onda transversal, conhecida como onda de Alfvén, como segue:

$$v_{ph} = \pm \frac{c}{\sqrt{1 + c^2/v_A^2}}. \quad (4.157)$$

Outra forma de escrever (4.157) é:

$$v_{ph} = \pm \gamma_A v_A. \quad (4.158)$$

Veja que, para um fluido com a restrição $v_S \ll v_A$, (4.156) é igual a (4.157).

De acordo com (4.157) ou (4.158), a velocidade Alfvén de uma onda que se propaga no espaço poderia ser maior do que a velocidade da luz, e matematicamente essas equações não são indeterminadas. Neste ponto, é aconselhável apresentar três explicações:

1. Se a velocidade de Alfvén tende ao infinito, então a velocidade de fase da onda será igual à velocidade da luz, porém é necessário excluir do domínio da solução toda a região a partir da condição $v_A > c$, em que a onda de Alfvén passaria a ser considerada uma onda eletromagnética, evitando também entrar em conflito com a Teoria da Relatividade Especial;
2. Se a velocidade de Alfvén for muito menor do que a velocidade da luz, então a velocidade de fase da onda será igual à velocidade de Alfvén, ou seja, uma condição não-relativística. Neste caso, teria que ser definido o valor de v_A a partir do qual pode-se considerar que estamos em uma situação não-relativística;
3. Uma condição relativística é considerada quando a velocidade de fase está em uma faixa de valores de um determinado limite (fixado no item anterior) até um valor próximo a $c/\sqrt{2}$, a partir do qual $v_A > c$. Em resumo, se a velocidade de Alfvén for maior que c , trata-se do resultado de uma intensificação rápida e forte do campo magnético por conta da singularidade. Propomos, portanto, excluir esta região das soluções que serão estudadas.

Na Tabela 1, mostramos vários valores de (4.158) em unidades físicas, considerando $\theta = 0$. Neste caso, a velocidade da luz é $c = 299.792.458$ km/s. A primeira coluna mostra valores hipotéticos de β_A em ordem decrescente, de 1, 20 a 0, 01. A segunda coluna mostra os possíveis valores de v_A obtidos de β_A e c . A terceira coluna exibe os valores de v_{ph} obtidos de (4.158). Também para este estudo, poderia ser utilizado (4.156), mas seria necessário fixar um valor para v_S . A última coluna é a razão entre v_A (segunda coluna) e v_{ph} (terceira coluna).

Tabela 1 – Relação entre β_A , v_A , v_{ph} e a proporção v_A/v_{ph} em ordem decrescente, definindo limiares para os intervalos de valores com $v_A \geq c$, ondas relativísticas de Alfvén e ondas não-relativísticas de Alfvén, segundo o modelo aqui adotado. A terceira coluna apresenta os valores v_{ph} obtidos de (4.158), também por (4.148 e 4.149) considerando $\theta = 0$ e $v_A > v_S$. O valor $c = 299.792.458$ km/s é usado. Os valores escolhidos nesta tese são destacados em negrito. Os valores marcados em azul na tabela, separa os valores onde $v_A > c$ (em cima) dos valores relativísticos e não-relativísticos (em baixo).

β_A	$v_A = \beta_A c$ (km/s)	v_{ph} (km/s)	v_A/v_{ph}
1,20	359750,95	230306,95	1,562049935
1,10	329771,70	221828,45	1,486606875
1,00	c	$c/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
0,95	284802,84	206481,89	1,379311422
0,90	269813,21	200550,58	1,345362405
0,85	254823,59	194160,11	1,312440475
0,80	239833,97	187278,86	1,280624847
0,75	224844,34	179875,47	1,250000000
0,70	209854,72	171919,69	1,220655562
0,65	194865,10	163383,40	1,192686044
0,60	179875,47	154241,95	1,166190379
0,55	164885,85	144475,61	1,141271221
0,50	149896,23	134071,26	1,118033989
0,45	134906,61	123024,24	1,096585610
0,40	119916,98	111340,12	1,077032961
0,35	104927,36	99036,57	1,059481005
0,30	89937,74	86144,73	1.044030651
0,25	74948,11	72710,35	1.030776406
0,20	59958,49	58794,14	1.019803903
0,15	44968,87	44471,35	1.011187421
0,10	29979,25	29830,46	1,004987562
0,05	14989,62	14970,92	1,001249220
0,04	11991,70	11982,12	1,000799680
0,03	8993,77	8989,73	1,000449899
0,02	5995,85	5994,65	1,000199980
0,01	2997,92	2997,77	1,000049999

Outro ponto importante de destaque é que estamos considerando que o modo de onda MHD rápido é predominante na lâmina de corrente da magnetocauda, região que

usaremos como caso de estudo. Portanto, considera-se uma aproximação não-relativística em que v_{ph} deve ser igual a v_A quando $\theta = 0^\circ$. Além disso, em um fluido magnetocondutor de baixa frequência, v_{ph} pode ser calculada usando (4.158). Uma condição não relativística é aceita se v_A for muito menor que c . A quarta coluna da Tabela (1) indica que a melhor aproximação possível para esse problema seria considerar os valores $\beta_A \leq 0,30$. Para refinar a escolha de β_A , é preciso considerar a magnitude da velocidade de Alfvén no sistema físico hipotético com o intuito de criar condições iniciais para uma simulação MHD não relativística. Na região da lâmina de corrente de magnetocauda, usada como caso de estudo, o valor médio de v_A é 1516,10 km/s (calculado teoricamente a partir de Kan (1973)); então, um valor extremo de tolerância para velocidades mais altas poderia ser na ordem de vinte vezes esse valor, ou seja, $v_A \approx 29979,25$ km/s. Este valor corresponde a $\beta_A = 0,10$.

É importante destacar que estamos cientes que a fixação do valor $v_A \approx 29979,25$ km/s como sendo o máximo na magneto-cauda é um tema que fica em aberto e que precisa de um estudo mais aprofundado. Este valor pode ser refinado posteriormente, após a inclusão da solução como condição inicial na simulação MHD, como um processo de ensaio e erro. No entanto, deixamos isto como sugestão para um trabalho futuro nesta linha de pesquisa. Se a condição anterior for aplicada a outro sistema físico hipotético, ainda será possível usar valores altos de β_A , maiores que 0,10, até $\beta_A = 0,30$. O exposto na sentença anterior ocorre porque, para $\beta_A = 0,30$, temos como primeira ordem de aproximação $v_A/v_{ph} \approx 1,00$ (ou seja, uma condição que ainda pode ser considerada não relativística), e para $\beta_A > 0,30$, a relação é $v_A/v_{ph} \approx 1,1$ ou superior a essa (ou seja, uma condição relativística).

Em uma condição relativística, em tese, uma determinada onda ainda pode ser considerada alfvênica até o limite $v_{ph} < c$. No entanto, preferimos restringir esse limite a valores mais realísticos, $v_A \approx c$, em que $v_{ph} < c/\sqrt{2}$. Por outro lado, na Tabela 1, o intervalo relativístico é $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ ($0,10 < \beta_A < 1,00$). Como os limiares relativísticos são um tema conflitante na Física, se o leitor não concordar com os limiares definidos na sentença anterior, ainda assim poderá mudar os limiares sem alterar a metodologia proposta de excluir as singularidades. O intuito aqui é mostrar como excluir essas singularidades nas soluções que vêm sendo apresentadas nesta tese. Mudar o limiar de corte vai alterar o domínio de utilidade da solução, mas o método de implementar essa mudança de limiar na solução analítica com a presença de singularidades permanecerá o mesmo.

Até o momento, estabelecemos uma metodologia que nos permite trabalhar com a condição relativística/não-relativística da velocidade de fase da onda de Alfvén em torno de uma possível singularidade magnética analítica. Nesta tese, na seção 4.3.1, vamos calcular, por exemplo, o modelo de Kan – que tem pontos singulares, onde são identificadas

as regiões nas quais $\beta_A \leq 0,10$; $0,10 < \beta_A < 1,00$ e $\beta_A \geq 1,00$.

Uma vez calculada a velocidade da fase, discutimos a faixa de valores desta em termos da velocidade de Alfvén. Por exemplo, em regiões com intenso campo magnético e/ou baixa densidade, a velocidade de Alfvén tende a ser alta ou próxima da velocidade da luz (como exemplo, temos o plasma ao redor de pulsares). Além disso, em algumas soluções analíticas da forma específica da equação de Grad-Shafranov, pontos singulares magnéticos podem aparecer no domínio em que essas soluções são definidas. Mas, de acordo com a metodologia apresentada nesta seção, podemos excluir os pontos singulares do domínio e, portanto, essas soluções analíticas podem ser usadas, por exemplo, como condições iniciais em uma simulação clássica de MHD sem o uso da Relatividade Especial. Além disso, a região onde a velocidade de Alfvén tende a ser maior que a velocidade da luz pode ser excluída da simulação clássica de MHD.

Uma particularidade é a definição de β_A , que relaciona a velocidade de Alfvén e a velocidade da luz no vácuo. Para a análise realizada aqui, consideramos que β_A varia de 0,01 a 1,20, e a velocidade de Alfvén é calculada a partir desses valores. Além disso, obtemos a velocidade de fase a partir da velocidade de Alfvén. Depois disso, comparamos as duas velocidades (fase e Alfvén) para ter uma relação que permita garantir que a propagação da onda no fluido seja devida a uma onda de Alfvén (relativística ou não-relativística), sem exceder o limite $v_A \geq c$. O exposto acima significa que a razão v_A/v_{ph} é aproximadamente 1, ou seja, a razão esperada para o caso não relativístico.

4.3.1 Pontos Singulares no Modelo de Kan

Na solução de *Kan* dada na seção 3.4, o potencial vetorial normalizado, $\Psi(X, Z) = -\frac{A_y(X, Z)}{LB_0}$, é definido pela equação (3.12). Esta equação tem três pontos singulares magnéticos em $(a, 0)$ (lembrando que foi considerado $a = 0$) e $(0, \pm\sqrt{b})$ (doravante, $b = 0,5$).

Para analisar o comportamento do campo magnético, na Figura 27a mostramos um gráfico de fluxo do vetor do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x\hat{i} + B_z\hat{j}$ em função de X e Z. As expressões para as componentes do campo magnético do B_x e B_z tornam-se:

$$B_x = B_0 \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z}, \quad (4.159)$$

$$B_z = -B_0 \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X}. \quad (4.160)$$

Os valores de $B(X, Z)$ e da densidade do fluido, $\rho(X, Z)$, são necessários para calcular a velocidade de Alfvén no plano cartesiano XZ , expressão que já foi dada por (4.159) e (4.160). A intensidade do campo magnético corresponde a $B(X, Z) = \sqrt{B_x^2 + B_z^2}$, e a densidade é a seguinte:

$$\rho(X, Z) = \frac{\bar{m}p(X, Z)}{k_B T} = \frac{\bar{m}B_0^2}{3k_B T \mu_0} e^{(-2\Psi(X, Z))}. \quad (4.161)$$

Na Figura 27, os pontos singulares são marcados em vermelho. Um fato interessante sobre este modelo é que, longe do eixo Z , a morfologia das linhas do campo magnético se assemelha à da cauda da magnetosfera (MANANKOVA; PUDOVKIN, 1996; MANANKOVA; PUDOVKIN, 1999; MANANKOVA; PUDOVKIN; RUNOV, 2000; MANANKOVA, 2003; KOROVINSKIY *et al.*, 2018). Nesse caso, para identificar a região de alta velocidade de Alfvén em torno de cada ponto singular, uma grade retangular centralizada no ponto é fixada. A Tabela 2 mostra os valores usados para implementar a grade retangular para cada ponto singular.

Tabela 2 – Valores da grade retangular usados para identificar a região de alta velocidade de Alfvén para cada ponto singular magnético (X_0, Z_0) na solução de Kan

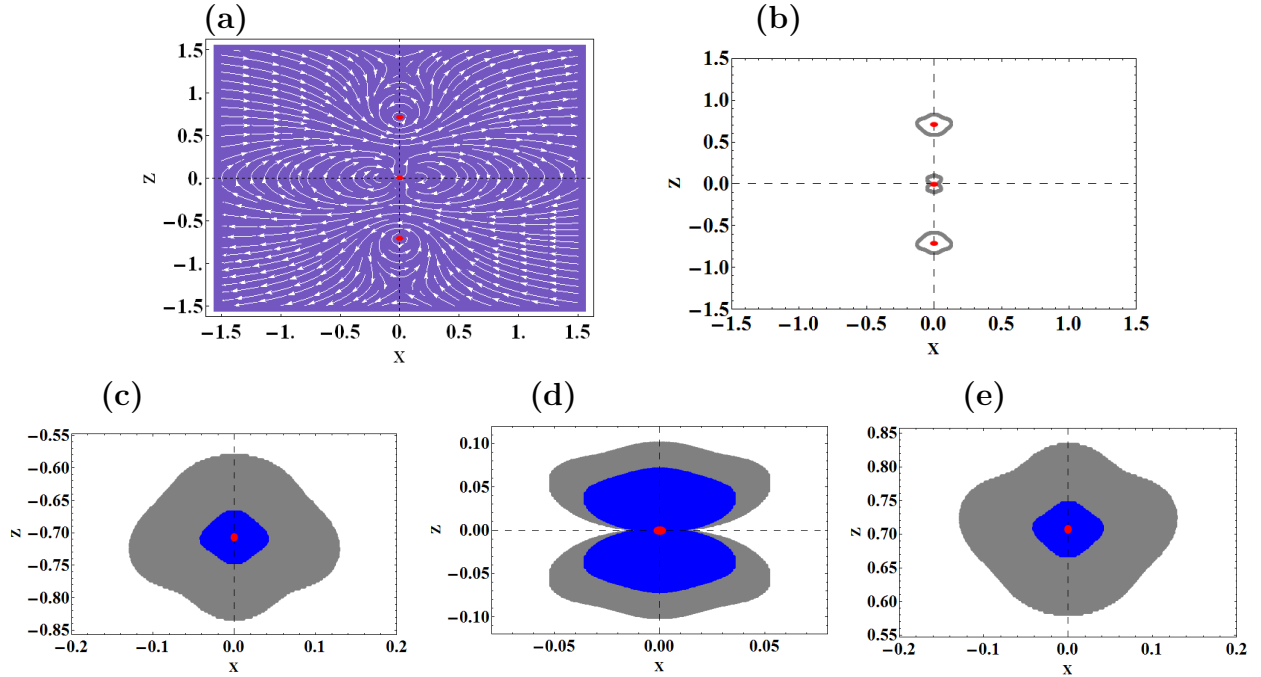
(X_0, Z_0)	X_{min}	X_{max}	ΔX	Z_{min}	Z_{max}	ΔZ	Fig. 27:
$(0, -\sqrt{0,5})$	-0,2	0,2	0,0011	$z_0 - 0,15$	$z_0 + 0,15$	0,0031	painel c
$(0, 0)$	$x_0 - 0,055$	$x_0 + 0,055$	0,0011	-0,13	0,13	0,00031	painel d
$(0, \sqrt{0,5})$	-0,2	0,2	0,0011	$z_0 - 0,15$	$z_0 + 0,15$	0,0031	painel e

A Figura 27b mostra três regiões fechadas em torno de cada ponto singular; fora dos limites, a relação $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ é satisfeita. As regiões são visualizadas com a mesma escala que a Figura 27a. Fora dos contornos fechados, o domínio das ondas não relativísticas de Alfvén é representado. Para visualizar os resultados com mais clareza, cada painel inferior mostra três regiões da seguinte forma:

1. $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (região de cor branca) representa o caso não relativístico;
2. $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (região de cor cinza) mostra o caso relativístico;
3. $v_A \geq c$ (região de cor azul) representa a região que viola a condição relativística para a velocidade de Alfvén.

À guisa de exemplo, veja a Figura 27c, que corresponde aos três intervalos mencionados ao redor do ponto singular $(0, -\sqrt{0,5})$. De maneira semelhante, as três regiões ao redor do ponto $(0, 0)$ ($(0, \sqrt{0,5})$) são mostradas em 27d (27e). Em relação ao eixo X , a Figura 27c é simétrica com 27e. Na Figura 27d, a parte superior é simétrica com a parte inferior.

Figura 27 – Esta figura mostra os resultados para a solução de *Kan*. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um gráfico de fluxo do vetor de campo magnético, $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$, em função de X e Z de (3.12), com (4.159) e (4.160). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (isto é, fora do limite). Os últimos três painéis mostram as regiões onde $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(0, -\sqrt{0,5})$ no painel c, $(0, 0)$ no painel d e $(0, \sqrt{0,5})$ no painel e.

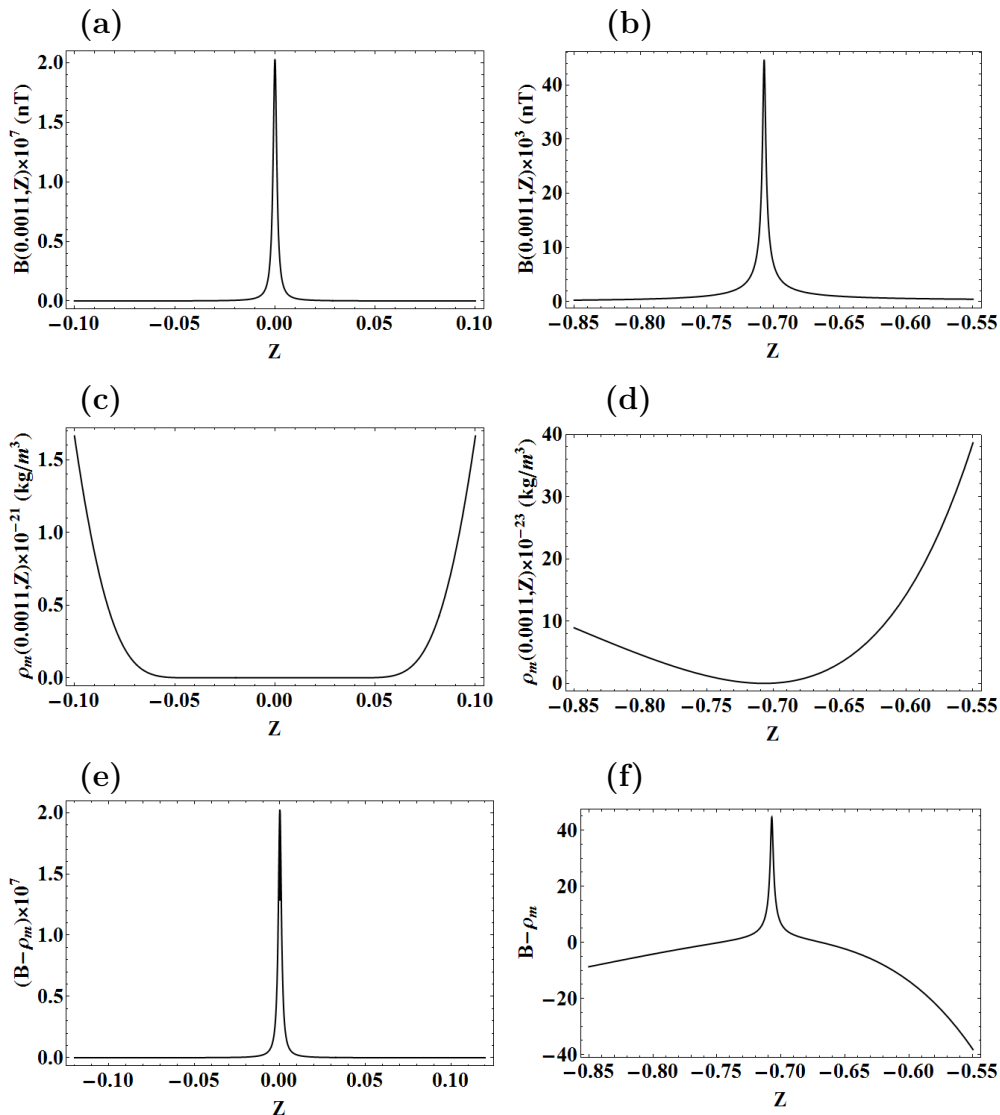


Fonte: o autor.

A Figura 28 mostra a magnitude do campo magnético (ilustrações a e b), a densidade do fluido (ilustrações c e d) e a subtração entre eles (ilustrações e, f) plotados muito perto de cada ponto singular no modelo de *Kan*. Os valores em $X = 0,0011$ e $\forall Z$ são usados para plotar as funções $B(0,0011, Z)$ e $\rho(0,0011, Z)$ versus Z . As figuras da esquerda correspondem a valores próximos do ponto singular $(0, 0)$, e as da direita, de $(0, -\sqrt{0,5})$. No ponto $(0, \sqrt{0,5})$, não mostrado aqui, os gráficos são muito semelhantes aos da direita. As figuras 28e e 28f mostram que o aumento na velocidade da fase relacionada à região relativística é causado por uma combinação de densidade reduzida e aumento da intensidade do campo magnético, respectivamente. Por outro lado, na região do domínio $v_A \geq c$, a velocidade da fase aumenta devido ao rápido aumento da intensidade do campo magnético próximo ao ponto singular.

Em resumo, a metodologia proposta foi capaz de isolar regiões com alta velocidade de fase, relacionadas à velocidade de Alfvén, no modelo de *Kan* em torno de três singularidades magnéticas analíticas.

Figura 28 – Intensidade do campo magnético (figuras a e b), densidade do fluido obtido de (4.161) (figuras c e d) e a subtração entre eles (figuras e e f) plotados a partir do modelo de *Kan*. Para evitar a singularidade magnética em que $B(X, Z)$ tende ao infinito, cada figura mostra um gráfico próximo a uma singularidade nos pontos $(0, 0)$ (figuras a, c e e) e no ponto $(0, -\sqrt{0,5})$ (figuras b, d, e, e f), respectivamente. Os gráficos permitem comparar a contribuição que os valores da magnitude do campo magnético e da densidade do fluido terão ao aumentar a velocidade da fase, relacionada à velocidade de Alfvén, próxima a um ponto singular magnético.



Fonte: o autor.

4.3.2 Pontos Singulares no Modelo de NAVAL

A solução de NAVAL é dada por (3.24), em que b especifica a mudança ao longo do eixo X . A equação (3.24) possui pontos singulares magnéticos em $((2k + 1)\pi/(2b), 0)$, para $k \in \mathbb{Z}$ e π dado em radianos (doravante, $b = 0,5$ e $k = 0$). A Figura 29a mostra um gráfico de variação do vetor campo magnético, \vec{B}_{xz} , em função de X e Z . As duas

singularidades são marcadas em vermelho. Este modelo apresenta ilhas magnéticas nos pontos nulos na origem e do tipo $-X$, localizados acima e abaixo de cada ponto singular magnético.

A Tabela 3 mostra os valores extremos do intervalo de dados usados para localizar regiões de alta velocidade de Alfvén. A Figura 29b mostra duas curvas fechadas em que $\beta_A < 0,10$, cada uma em torno de um ponto singular magnético. Fora dos limites, as velocidades não relativísticas de Alfvén são representadas. Para uma melhor visualização, as regiões são mostradas com a mesma escala que a da Figura 29a. As Figuras 29c e 29d mostram uma ampliação das regiões ao redor dos pontos singulares $(-\pi, 0)$ (ilustração c) e $(\pi, 0)$ (ilustração d). Cada uma das figuras inferiores mostra três regiões, como segue: $\beta_A < 0,10$ (região de cor branca) representa a velocidade não relativística de Alfvén; $0,10 < \beta_A < 1,00$ (região de cor cinza) mostra o caso relativístico e $\beta_A \geq 1,0$ (região de cor azul) é a região com $v_A \geq c$. Ambas as regiões (figuras c e d) são geometricamente iguais.

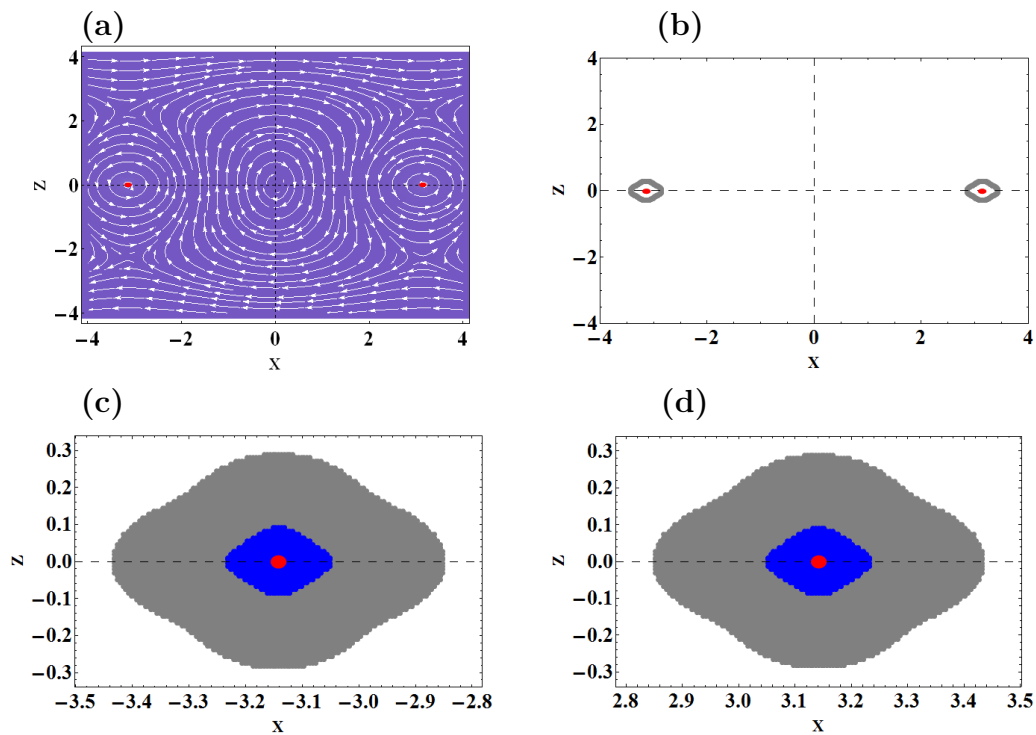
Tabela 3 – Valores da grade retangular usados para identificar a região de alta velocidade de Alfvén, para cada ponto singular magnético (X_0, Z_0) , na solução de NAVAL.

(X_0, Z_0)	X_{min}	X_{max}	ΔX	Z_{min}	Z_{max}	ΔZ	figura (29):
$(\pi, 0)$	$x_0 - 0,5$	$x_0 + 0,5$	0,005	-4	4	0,009	painel c
$(-\pi, 0)$	$x_0 - 0,5$	$x_0 + 0,5$	0,005	-4	4	0,009	painel d

A Figura 30 mostra a magnitude do campo magnético (a), a densidade do fluido (b) e a subtração entre eles (c), plotados muito perto dos pontos singulares no modelo de NAVAL. Os valores em $Z = 0,009$ e $\forall X$ são usados para plotar as funções $B(X, 0,009)$ e $\rho(X, 0,009)$ versus X nas figuras b e c, respectivamente. As figuras correspondem a valores próximos ao ponto singular $(\pi, 0)$. No ponto $(-\pi, 0)$, não mostrado aqui, os gráficos são muito semelhantes aos dos painéis da Figura 30. Vemos que os valores relativísticos da velocidade de Alfvén são uma combinação de densidade reduzida e aumento da intensidade do campo magnético, respectivamente. No entanto, os valores de velocidade de Alfvén superiores a c são causados pelo pico de intensidade do campo magnético próximo ao ponto singular.

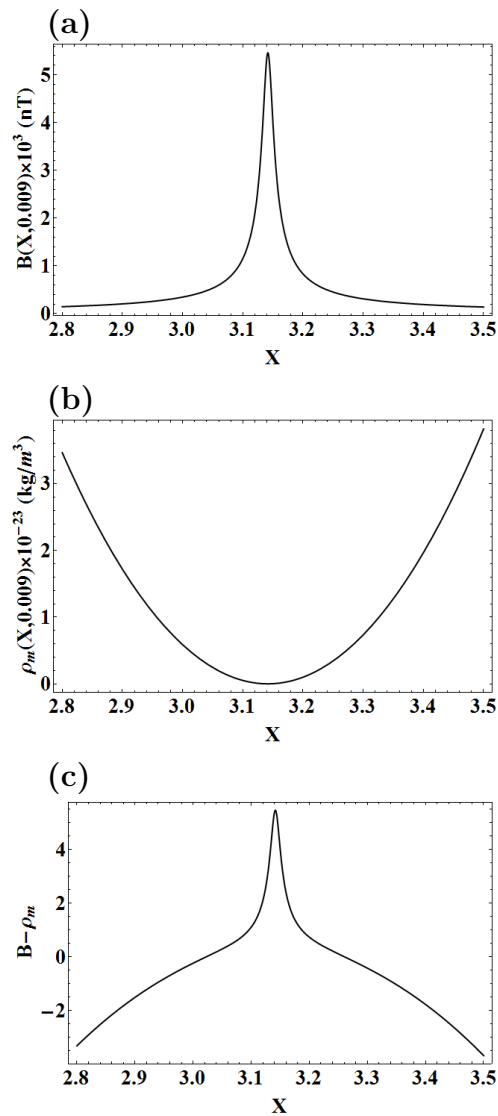
Essa metodologia também foi aplicada para as soluções 1, 2 e 5. Deixaremos os gráficos para consulta no apêndice D em 33, 34 e 35, respectivamente.

Figura 29 – Resultados para a solução de NAVAL. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um perfil de linhas de força do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$ como uma função de X e Z de (3.24) com (4.159) e (4.160). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (ou seja, fora do limite). Os dois últimos painéis mostram as regiões em que $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(-\pi, 0)$ no painel c e $(\pi, 0)$ no painel d.



Fonte: o autor.

Figura 30 – Intensidade do campo magnético (painel a), densidade do fluido de (4.161) (painel b) e a subtração entre eles (painel c), plotados a partir do modelo de NAVAL. Para evitar a singularidade magnética em que $B(X, Z)$ tende ao infinito, cada painel mostra um gráfico próximo à singularidade no ponto $(\pi, 0)$. Perto do ponto $(-\pi, 0)$, não mostrado aqui, os gráficos são semelhantes. Os gráficos permitem comparar a contribuição que os valores da força do campo magnético e da densidade do fluido terão ao aumentar a velocidade da fase, relacionada à velocidade de Alfvén, próxima a um ponto singular magnético.



Fonte: o autor.

5 Conclusões

O objetivo desta tese em um primeiro momento, é apresentar a equação específica de *Grad-Shafranov* para uma posterior revisão das soluções analíticas com e sem singularidades, e também propor novas soluções fazendo a discussão física. Em um segundo momento, propomos uma metodologia para identificar regiões em torno de pontos singulares com velocidade relativística de Alfvén devida a valores intensos do campo magnético e/ou baixa densidade.

A equação de *Grad-Shafranov* foi tratado nas seções 2.2 e 2.3 com todo o rigor físico-matemático e, publicado em [Cristaldo-Oliveira et al. \(2020\)](#) tanto para o caso mais geral, como também para a sua versão simplificada ou específica. A mais geral, que é aplicada quando a densidade de corrente é definida em função da primeira derivada do potencial vetor magnético, não tem solução analítica e pode ser resolvida numericamente como um problema de *Cauchy* (ver seção 2.5). No caso da versão simplificada ou específica, aplicada quando a densidade de corrente se expressa em função da exponencial do potencial vetor magnético, temos solução analítica. Para equação específica da equação GS, levantamos o estado da arte (ver capítulo 3), revisando vários autores e suas soluções, começando por *Walker* e sua fórmula, passando por *Harris*, *Faddev*, *Kan*, *NAVAL* e *Yoon-Lui*. Estas soluções têm em comum o fato de derivarem da fórmula de *Walker*, ou seja, são obtidas mudando-se a função geradora, que é uma função de variável complexa, da qual podemos obter novas soluções.

A primeira contribuição dessa tese são seis novas soluções contendo pontos singulares, encontradas usando a fórmula de *Walker*. Uma dessas soluções foi usada para fazer uma simulação MHD usando o código Newtoniano CAFE em [Ojeda-González et al. \(2020\)](#). Quanto às características e diferenças encontradas nas novas soluções, tiramos algumas conclusões. A solução 1 (ver Figura 16), tem a vantagem de deslocar as ilhas magnéticas, podendo favorecer assim a simulação MHD, mantendo a estrutura da ilha magnética. Na solução 2 (ver Figura 18), o parâmetro f_p faz com que as ilhas magnéticas se aproximem umas das outras, podendo causar lâminas de corrente circular com geometria cilíndrica. Já nas soluções 3 e 4 (ver Figura 20 e 22), vimos que a proximidade de vários pontos singulares pode fazer com que as linhas do campo magnético fiquem complexas de se analisar. A solução 5 (ver Figura 24), por sua vez, tem como característica marcante o fato de ter pouca influência da solução *Yoon-Lui-1*, diferentemente da solução 6 (ver Figura 25), em que conforme variamos o parâmetro ν temos a formação de um anel de corrente e também ilhas magnéticas tanto no eixo X como no eixo Z , a depender também do parâmetro ν . Também no levantamento do estado da arte, exploramos diversas aplicações da equação de GS (ver seção 2.7), à Física Espacial, podendo

ser usados para estudar lâmina de corrente, reconexão magnética, tubo de fluxo e nuvens magnéticas, dentre outros eventos.

O segundo resultado desta tese encontra-se na seção 4.2, onde partindo das equações básicas MHD e, considerando o efeito da corrente de deslocamento J_a , expusemos a importância de se considerar a corrente de deslocamento na lei de *Ampère-Maxwell* ao deduzir uma equação (4.147), para a velocidade de um fluido. Publicamos esse resultado em Ojeda-González *et al.* (2021). No caso específico do plasma presente no interior da magnetosfera, onde a velocidade de Alfvén tem valores muito pequenos quando comparado com a velocidade da luz, as mudanças dos valores da velocidade de fase da onda se mantêm praticamente os mesmos com ou sem a corrente de deslocamento na lei de *Ampères-Maxwell*.

Por fim, a terceira contribuição se encontra na seção 4.3, onde usamos o resultado anterior para caracterizar regiões com velocidade de Alfvén relativísticas ao redor de pontos singulares. Desta forma, propomos uma metodologia para isolar, e posteriormente excluir regiões no entorno das singularidades com velocidade relativística de Alfvén (ver Figuras 27, 29, 33, 34 e 35). Esse resultado está em fase de publicação.

Pensando em trabalhos futuros, pode-se fazer uma simulação MHD usando alguma dessas novas soluções como condição inicial, para tanto, aplica-se primeiro a metodologia para excluir as regiões no entorno das singularidades com velocidade relativística de Alfvén. O método de identificar o limiar relativístico ainda poderia ser melhorado fazendo comparações com outras formulações MHD mais complexas, sendo que aqui somente consideramos MHD ideal. Também pode-se utilizar alguma das novas soluções analíticas da equação de GS para validar os métodos de detecção de lâmina de corrente em dados de satélites no vento solar. Outra possibilidade seria usar as novas soluções para validar métodos de solução numérica da equação de GS, melhorando assim a implementação da solução numérica.

Referências

- ALFVÉN, H. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Nature*, v. 150, p. 405–406, out. 1942. Citado 5 vezes nas páginas 36, 39, 40, 41 e 128.
- ALFVÉN, H. On the Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Arkiv for Astronomi*, v. 29, p. 1–7, 1943. Citado 3 vezes nas páginas 36, 39 e 40.
- ALFVÉN, H. Electric currents in cosmic plasmas. *Reviews of Geophysics*, v. 15, n. 3, p. 271–284, ago. 1977. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- AMBROSINO, G.; ALBANESE, R. Magnetic control of plasma current, position, and shape in tokamaks - a survey of modeling and control approaches. *Control Systems, IEEE*, v. 25, p. 76 – 92, 11 2005. Citado na página 60.
- ANGELOPOULOS, V. The THEMIS Mission. *Space Sci. Rev.*, v. 141, n. 1-4, p. 5–34, dez. 2008. Citado na página 62.
- ARZNER, K.; SCHOLER, M. Kinetic structure of the post plasmoid plasma sheet during magnetotail reconnection. *J. Geophys. Res.*, v. 106, n. A3, p. 3827–3844, Mar 2001. Citado na página 60.
- ATANASIU, C. V. *et al.* Analytical solutions to the Grad-Shafranov equation. *Physics of Plasmas*, v. 11, n. 7, p. 3510–3518, Jul 2004. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 60.
- BECKER, U.; NEUKIRCH, T.; SCHINDLER, K. On the quasistatic development of thin current sheets in magnetotail-like magnetic fields. *J. Geophys. Res.*, v. 106, n. A3, p. 3811–3826, Mar 2001. Citado na página 60.
- BELCHER, J. W.; DAVIS, L.; SMITH, E. J. Large-amplitude alfvén waves in the interplanetary medium: Mariner 5. *Journal of Geophysical Research*, American Geophysical Union (AGU), v. 74, n. 9, p. 2302–2308, may 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1029/2Fja074i009p02302>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 66.
- BIRN, J.; HESSE, M. Geospace Environment Modeling (GEM) magnetic reconnection challenge: Resistive tearing, anisotropic pressure and hall effects. *J. Geophys. Res.*, v. 106, n. A3, p. 3737–3750, Mar 2001. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- BISKAMP, D. Magnetic reconnection via current sheets. *Physics of Fluids*, v. 29, p. 1520–1531, maio 1986. Citado na página 75.
- BITTENCOURT, J. *CHAPTER 15 - MAGNETOHYDRODYNAMICS WAVES*. Fourth edition. Verlag New York, Inc: Originally published by Pergamon Press, New York, 1986, 2018. 375 - 399 p. ISBN 0-387-20975-1. Citado 11 vezes nas páginas 17, 33, 40, 66, 67, 68, 73, 118, 122, 124 e 128.
- BITTENCOURT, J. A. *CHAPTER 9 - MACROSCOPIC EQUATIONS FOR A CONDUCTING FLUIDS*. Fourth edition. Verlag New York, Inc: Originally published by Pergamon Press, New York, 1986, 2018. 219 - 237 p. ISBN 0-387-20975-1. Citado na página 67.

- BOTHMER, V.; RUST, D. M. The field configuration of magnetic clouds and the solar cycle. *GEOPHYSICAL MONOGRAPH*, v. 99, p. 139–146, 1997. ISSN 0065-8448 CODEN : GPMGAD. AGU. Disponível em: <http://www.agu.org/login/no_license.shtml>. Citado na página 56.
- BOTHMER, V.; SCHWENN, R. The structure and origin of magnetic clouds in the solar wind. *Annales Geophysicae*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 16, p. 1–24, 1998. ISSN 0992-7689. 10.1007/s00585-997-0001-x. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00585-997-0001-x>>. Citado na página 56.
- BRITTNACHER, M.; WHIPPLE, E. C. Extension of the Harris magnetic field model to obtain exact, two-dimensional, self-consistent X point structures. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 107, n. A2, p. SMP 3–1–SMP 3–5, 2002. ISSN 2156-2202. Citado na página 76.
- CARTHY, P. J. M. Analytical solutions to the Grad-Shafranov equation for tokamak equilibrium with dissimilar source functions. *Physics of Plasmas*, v. 6, n. 9, p. 3554–3560, Sep 1999. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 60.
- COSTA Jr., E. *et al.* Ondas de Alfvén no meio interplanetário. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 33, p. 1–8, 06 2011. ISSN 1806-1117. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 40.
- COSTAJR, E. *et al.* O vento solar e a atividade geomagnética. *Revista Brasileira de Ensino Física [online]*, v. 33, p. 4301–4301, 2011. Citado na página 37.
- COWLEY, S. W. H. A beginner’s guide to the Earth’s magnetosphere. *Earth in Space*, v. 8, p. 9–13, mar. 1996. Citado na página 37.
- CRAMER, N. F. BOOK REVIEW: The Physics of Alfvén waves. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 44, n. 2, p. 293, fev. 2001. Citado 4 vezes nas páginas 40, 41, 66 e 123.
- CRISTALDO-OLIVEIRA, M. *et al.* Uma Revisão da Teoria Cinética em Física de Plasma para se Obter uma Forma Simplificada da Equação de Grad-Shafranov. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 42, 00 2020. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172020000100494&nrm=iso>. Citado 5 vezes nas páginas 36, 39, 46, 52 e 139.
- CURIEL, E. Singularities and Black Holes. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2021. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021. Citado na página 32.
- DUNGEY, J. W. Interplanetary Magnetic Field and the Auroral Zones. *Physical Review Letters*, v. 6, p. 47–48, jan. 1961. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- ERIKSSON, S. *et al.* Magnetic island formation between large-scale flow vortices at an undulating postnoon magnetopause for northward interplanetary magnetic field. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 114, n. A2, p. A00C17, fev. 2009. Citado na página 64.
- ESCOUBET, C. P.; FEHRINGER, M.; GOLDSTEIN, M. IntroductionThe Cluster mission. *Annales Geophysicae*, v. 19, p. 1197–1200, out. 2001. Citado na página 62.

- FADEEV, V.; KVABTSKHAVA, I.; KOMAROV, N. Self-focusing of local plasma currents. *Nuclear Fusion*, v. 5, n. 202, p. 202–209, 1965. Citado 6 vezes nas páginas 32, 49, 52, 76, 78 e 83.
- FERREIRA, P. P. *et al.* Conceitos básicos sobre a física da formação de tubos de fluxo magnético nas proximidades da Terra. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 39, 00 2017. ISSN 1806-1117. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 39.
- FITZPATRICK, R. *Maxwell's Equations and the Principles of Electromagnetism*. Infinity Science Press, 2008. (Infinity Science Series). ISBN 9781934015209. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-rMeAQAAIAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 127.
- GÉNOT, V. Comment on “a class of exact two-dimensional kinetic current sheet equilibria” by peter h. yoon and anthony t. y. lui. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 110, n. A9, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 29, 48, 86, 87 e 92.
- GIOVANELLI, R. G. A Theory of Chromospheric Flares. *Nature*, v. 158, p. 81–82, jul. 1946. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- GONZÁLEZ, A. O. *et al.* Daubechies wavelet coefficients: a tool to study interplanetary magnetic field fluctuations. *Geofísica Internacional*, v. 53, n. 2, p. 101 – 115, 2014. ISSN 0016-7169. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016716914714941>>. Citado na página 40.
- GONZÁLEZ-AVILÉS, J.; GUZMÁN, F. CAFE-Q: Code Design to Solve the Resistive MHD Equations With Thermal Conductivity. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, v. 46, p. 2378–2385, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 126.
- GONZÁLEZ-AVILÉS, J.; GUZMÁN, F.; FEDUN, V. JET Formation in Solar Atmosphere Due to Magnetic Reconnection. *Astrophys. J.*, v. 836, p. 24, 2017. Citado na página 126.
- GONZÁLEZ-AVILÉS, J. J. *et al.* Newtonian CAFE: a new ideal MHD code to study the solar atmosphere. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 454, p. 1871–1885, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 126.
- GONZÁLEZ-AVILÉS, J. J. *et al.* In situ generation of coronal Alfvén waves by jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 484, p. 1871–1885, 2019. Citado na página 40.
- GONZALEZ, W. D. *et al.* What is a geomagnetic storm? *J. Geophys. Res.*, v. 99, n. A4, p. 5771–5792, abr. 1994. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- GRAD, H.; RUBIN, H. Hydromagnetic equilibria and force free fields. *Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, United Nations, Geneva, v. 31, n. IAEA, p. 190–197, 1956. Citado na página 30.
- HARRIS, E. G. On a plasma sheath separating regions of oppositely directed magnetic field. *Il Nuovo Cimento*, Springer, v. 23, n. 1, p. 115–121, 1962. ISSN 00296341. Disponível em: <<http://www.springerlink.com/index/10.1007/BF02733547>>. Citado 3 vezes nas páginas 32, 76 e 77.

- HASEGAWA, H. *et al.* Reconstruction of two-dimensional magnetopause structures from Cluster observations: verification of method. *Annales Geophysicae*, v. 22, n. 4, p. 1251–1266, abr. 2004. Citado na página 62.
- HASEGAWA, H. *et al.* Magnetic flux rope formation within a magnetosheath hot flow anomaly. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 117, n. A9, p. A09214, set. 2012. Citado na página 61.
- HAU, L.-N.; SONNERUP, B. U. Ö. Two-dimensional coherent structures in the magnetopause: Recovery of static equilibria from single-spacecraft data. *Journal of Geophysical Research*, v. 104, n. A4, p. 6899–6917, 1999. ISSN 0148-0227. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/1999JA900002>>. Citado 12 vezes nas páginas 30, 31, 39, 50, 51, 52, 54, 56, 57, 58, 60 e 61.
- HESSE, M.; BIRN, J.; KUZNETSOVA, M. Collisionless magnetic reconnection: Electron processes and transport modeling. *J. Geophys. Res.*, v. 106, n. A3, p. 3721–3736, Mar 2001. Citado na página 60.
- HU, Q. The grad-shafranov reconstruction in twenty years: 1996–2016. *Science China Earth Sciences*, v. 60, n. 8, p. 1466–1494, Aug 2017. ISSN 1869-1897. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11430-017-9067-2>>. Citado 4 vezes nas páginas 30, 39, 51 e 61.
- HU, Q.; KRUCKER, S. Magnetic field line lengths inside interplanetary magnetic flux ropes. *J Geophys Res-Space Phys*, v. 120, n. 7, p. 5283, ago. 2015. Citado na página 63.
- HU, Q.; QIU, J.; ZHENG, J. Characteristics of Magnetic Flux Ropes from the Sun to the Heliosphere. In: Hu, Q.; Zank, G. P. (Ed.). *Outstanding Problems in Heliophysics: From Coronal Heating to the Edge of the Heliosphere*. [S.l.: s.n.], 2014. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 484), p. 78. Citado na página 64.
- HU, Q. *et al.* Double flux-rope magnetic cloud in the solar wind at 1 AU. *Geophys. Res. Lett.*, v. 30, n. 7, p. 1385, abr. 2003. Citado 3 vezes nas páginas 60, 62 e 63.
- HU, Q. *et al.* Multiple flux rope magnetic ejecta in the solar wind. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 109, n. A18, p. 3102, mar. 2004. Citado 3 vezes nas páginas 51, 62 e 63.
- HU, Q.; SONNERUP, B. Reconstruction of magnetic clouds in the solar wind: Orientations and configurations. *J. Geophys. Res.*, v. 107, n. A7, p. 1142, 15 PP, jul. 2002. ISSN 0148-0227. Citado 4 vezes nas páginas 51, 61, 62 e 64.
- HU, Q.; SONNERUP, B. U. Ö. Magnetopause transects from two spacecraft: A comparison. *Geophys. Res. Lett.*, v. 27, n. 10, p. 1443–1446, maio 2000. Citado na página 61.
- HU, Q.; SONNERUP, B. U. Ö. Reconstruction of magnetic flux ropes in the solar wind. *Geophys. Res. Lett.*, v. 28, n. 3, p. 467–470, jan. 2001. Citado 4 vezes nas páginas 30, 61, 62 e 64.
- HU, Q.; SONNERUP, B. U. Ö. Reconstruction of two-dimensional structures in the magnetopause: Method improvements. *J. Geophys. Res.*, v. 108, n. A1, p. 1011 (9 pp), 2003. Citado na página 51.

- ISAVNIN, A.; KILPUA, E.; KOSKINEN, H. Grad-Shafranov Reconstruction of Magnetic Clouds: Overview and Improvements. *Sol. Phys.*, Springer Netherlands, v. 273, n. 1, p. 205–219, 2011. ISSN 0038-0938. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 64.
- JAUER, P. R. *et al.* A global magnetohydrodynamic simulation study of ultra-low-frequency wave activity in the inner magnetosphere: Corotating interaction region plus alfvénic fluctuations. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 886, n. 1, p. 59, nov 2019. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 123.
- JR, F. S. *et al.* Física de plasma espacial utilizando simulação computacional de partículas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 33, p. 01 – 14, 03 2011. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172011000100010&nrm=iso>. Citado na página 39.
- KAHLER, S. W.; KRUCKER, S.; SZABO, A. Solar energetic electron probes of magnetic cloud field line lengths. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 116, n. A1, p. A01104, jan. 2011. Citado na página 63.
- KAN, J. R. On the structure of the magnetotail current sheet. *Journal of Geophysical Research*, v. 78, n. 19, p. 3773–3781, 1973. ISSN 2156-2202. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/JA078i019p03773>>. Citado 8 vezes nas páginas 30, 31, 45, 76, 78, 79, 83 e 130.
- KAN, J. R. Non-linear tearing structures in equilibrium current sheet. *Planet. Space Sci.*, v. 27, n. 4, p. 351–354, Apr 1979. Citado na página 30.
- KHRABROV, A. V.; SONNERUP, B. U. Ö. DeHoffmann-Teller analysis. *ISSI Scientific Reports Series*, v. 1, p. 221–248, 1998. Citado 6 vezes nas páginas 30, 31, 51, 56, 57 e 58.
- KLAUSNER, V. *et al.* Latitudinal and longitudinal behavior of the geomagnetic field during a disturbed period: A case study using wavelet techniques. *Advances in Space Research*, v. 58, n. 10, p. 2148 – 2163, 2016. ISSN 0273-1177. Space and Geophysical Research related to Latin America - Part 2. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117716000569>>. Citado na página 38.
- KOGA, D. *et al.* Dayside Magnetopause Reconnection: Its Dependence on Solar Wind and Magnetosheath Conditions. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, n/a, n. n/a, 2019. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019JA026889>>. Citado na página 37.
- KOROVINSKIY, D. B. *et al.* On application of asymmetric kan-like exact equilibria to the earth magnetotail modeling. *Ann. Geophys.*, v. 36, n. 2, p. 641–653, 2018. Disponível em: <<https://www.ann-geophys.net/36/641/2018/>>. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 132.
- KUZNETSOVA, M. M.; HESSE, M.; WINSKE, D. Collisionless reconnection supported by nongyrotropic pressure effects in hybrid and particle simulations. *J. Geophys. Res.*, v. 106, n. A3, p. 3799–3810, Mar 2001. Citado na página 60.
- LACKNER, K. Computation of ideal MHD equilibria. *Computer Physics Communications*, v. 12, p. 33, Jan 1976. Citado na página 60.

- LAURINDO-SOUSA, A. N. *et al.* New analytical solution of the equilibrium ampere's law using the walker's method: a didactic example. *Brazilian Journal of Physics*, v. 48, n. 1, p. 67–73, Feb 2018. ISSN 1678-4448. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13538-017-0542-8>>. Citado na página 82.
- LEPPING, R. P.; BEHANNON, K. W. Magnetic field directional discontinuities: 1. Minimum variance errors. *J. Geophys. Res.*, v. 85, n. A9, p. 4695–4704, Sep 1980. Citado na página 56.
- LEROY, B. Propagation of Alfvén waves in an isothermal atmosphere when the displacement current is not neglected. *Astronomy and Astrophysics*, v. 125, n. 2, p. 371–374, set. 1983. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 123.
- LI, H. *et al.* Observations of the field-aligned residual flow inside magnetic cloud structure. *Science in China E: Technological Sciences*, v. 52, n. 9, p. 2555–2566, set. 2009. Citado na página 64.
- LINTON, M. G.; MOLDWIN, M. B. A comparison of the formation and evolution of magnetic flux ropes in solar coronal mass ejections and magnetotail plasmoids. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 114, n. A9, p. A00B09, set. 2009. Citado na página 65.
- LU, S. *et al.* Reconstruction of plasmoid and traveling compression region in the near-Earth magnetotail. *Science in China E: Technological Sciences*, v. 58, n. 2, p. 330–337, fev. 2015. Citado na página 61.
- MA, Y.; ZHANG, H. Detecting motion object by spatial-temporal entropy. In: *Multimedia and Expo, 2001. ICME 2001. IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 265–268. Citado na página 60.
- MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS. *Joseph Liouville biography*. 2019. Disponível em: <<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Liouville.html>>. Acesso em: 25 setembro de 2019. Citado na página 153.
- MANANKOVA, A.; PUDOVKIN, M.; RUNOV, A. Stationary configurations of the two-dimensional current-carrying plasma sheet: Exact solutions. *Geomagn. Aeron.*, AGU, v. 40, n. 4, p. 430–438, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 132.
- MANANKOVA, A. V. Two-dimensional current-carrying plasma sheet in the near-Earth geomagnetic tail region: a quasi-stationary evolution. *Annales Geophysicae*, v. 21, p. 2259–2269, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 132.
- MANANKOVA, A. V.; PUDOVKIN, M. I. Energy characteristics of a two-dimensional current-carrying plasma. *Geomagn. Aeron.*, v. 36, n. 8, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 76, 81 e 132.
- MANANKOVA, A. V.; PUDOVKIN, M. I. The description of a two-dimensional current-carrying plasma sheet in the hydrodynamic approximation of a single-component plasma model. *Geomagn. Aeron.*, v. 39, n. 42, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 132.
- NESS, N. F. The Earth's Magnetic Tail. *Journal Of Geophysical Research*, p. 2989–3005, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

OJEDA G., A. *et al.* Spatio-temporal entropy analysis of the magnetic field to help magnetic cloud characterization. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 118, n. 9, p. 1–12, 2013. Citado na página 43.

OJEDA-GONZÁLEZ, A. Revisão da solução analítica/numérica da equação de grad-shafranov. In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. SBMAC, 2018. (Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC-2017, v. 6), p. 010428–1–010428–2. ISSN 2359-0793. Disponível em: <<https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2094>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 51.

OJEDA-GONZÁLEZ, A. *et al.* Grad-Shafranov Reconstruction: Overview and Improvement of the Numerical Solution Used in Space Physics. *Brazilian Journal of Physics*, v. 45, n. 5, p. 493–509, Oct 2015. Citado 8 vezes nas páginas 30, 42, 44, 50, 51, 52, 53 e 55.

OJEDA-GONZÁLEZ, A. *et al.* Modos de ondas magnetohidrodinâmicas influenciados por la corriente de desplazamiento. *Revista Brasileira de Ensino de Física [online]*, v. 43, n. e20200329, Mar 2021. Citado na página 140.

OJEDA-GONZÁLEZ, A. *et al.* Characterization of the Complex Ejecta Measured In Situ on 19 – 22 March 2001 by Six Different Methods. *Solar Phys.*, v. 292, p. 160, nov 2017a. Citado 3 vezes nas páginas 39, 51 e 56.

OJEDA-GONZÁLEZ, A. *et al.* An Alternative Method for Identifying Interplanetary Magnetic Cloud Regions. *Astrophys. J.*, v. 837, n. 2, p. 156, Mar 2017b. Citado na página 56.

OJEDA-GONZÁLEZ, A.; PRESTES, A.; LAURINDO-SOUSA, A. N. Discussion About the Magnetic Field Dimensionality, Invariant Axis Condition, and Coulomb Gauge to Solve the Grad-Shafranov Equation. *Brazilian Journal of Physics*, v. 46, n. 4, p. 408–414, Aug 2016. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

OJEDA-GONZÁLEZ, A. *et al.* Grad-shafranov equation: MHD simulation of the new solution obtained from the fadeev and naval models. Wiley, jan 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Fessoar.10501505.1>>. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 139.

OJEDA-GONZALEZ., A. *et al.* Analytical Solutions of Grad-shafranov Equation for Studying the Coexistence of 2-D Neutral and Singular Magnetic Points in a Ideal MHD Configuration. v. 00, 2018. Citado na página 36.

OLIVEIRA, M. F. C. *Modelos Analíticos de uma forma Específica da equação de Grad-Shafranov aplicado em Plasmas Espaciais*. 68 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos-SP, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 75.

OTTO, A. Geospace Environment Modeling (GEM) magnetic reconnection challenge: MHD and Hall MHD-constant and current dependent resistivity models. *J. Geophys. Res.*, v. 106, n. A3, p. 3751–3758, Mar 2001. Citado na página 60.

PARKER, E. Sweet's mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids. *Journal of Geophysical Research*, v. 62, n. 4, p. 509–520, 1957. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

- PARNELL, C. E. Magnetic Reconnection: Classical Aspects. v. 553, p. 61, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 35, 36, 37 e 39.
- PHAN, T. D. *et al.* Electron magnetic reconnection without ion coupling in Earth's turbulent magnetosheath. *nat*, v. 557, p. 202–206, maio 2018. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- PRESTES, A.; KLAUSNER, V.; OJEDA-GONZÁLEZ, A. High-intensity, long-duration, continuous ae activity events associated with alfvénic fluctuations in 2003. *Annales Geophysicae*, v. 35, n. 6, p. 1231–1240, 2017. Disponível em: <<https://angeo.copernicus.org/articles/35/1231/2017/>>. Citado na página 40.
- PRIEST, E.; FORBES, T. *Magnetic reconnection. MHD theory and applications*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0-521-48179-1. Citado na página 41.
- PRIEST, E. R.; FORBES, T. G. Magnetic flipping: Reconnection in three dimensions without null points. v. 97, n. A2, p. 1521–1531, 1992. Citado na página 89.
- PRITCHETT, P. L. Geospace Environment Modeling magnetic reconnection challenge: Simulations with a full particle electromagnetic code. *J. Geophys. Res.*, v. 106, n. A3, p. 3783–3798, Mar 2001. Citado na página 60.
- ROSA-OLIVEIRA, R. A. *et al.* New Metric for Minimum Variance Analysis Validation in the Study of Interplanetary Magnetic Clouds. *Solar Phys.*, v. 295, n. 3, p. 45, mar. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 56.
- SCHINDLER, K. *Physics of Space Plasma Activity*. [S.l.]: Physics of Space Plasma Activity, by Karl Schindler, pp. 522. Cambridge University Press, November 2006. ISBN-10: 0521858976. ISBN-13: 9780521858977, 2006. 522 p. Citado 3 vezes nas páginas 31, 39 e 75.
- SCHOLER, M. Magnetic flux transfer at the magnetopause based on single X line bursty reconnection. *Geophysical Research Letters*, v. 15, p. 291–294, abr. 1988. Citado na página 89.
- SCHWENN, R. Space weather: The Solar Perspective. *Living reviews in solar physics*, v. 3, n. 2, p. 1–72, 2006. Citado na página 38.
- SHAFRANOV, V. D. Plasma Equilibrium in a Magnetic Field. *Reviews of Plasma Physics*, v. 2, n. 1, p. 103, Jan 1966. Citado na página 30.
- SHAFRANOV, V. D. In Honor of his 80th Birthday. *Plasma Physics Report*, v. 35, p. 1068–1070, 2009. Citado na página 157.
- SHAY, M. A. *et al.* Alfvénic collisionless magnetic reconnection and the Hall term. *J. Geophys. Res.*, v. 106, n. A3, p. 3759–3772, Mar 2001. Citado na página 60.
- SONNERUP, B.; CAHILL, L. Magnetopause structure and attitude from Explorer 12 observations. *Journal of Geophysical Research*, v. 72, p. 171, 1967. Disponível em: <<http://www.agu.org/pubs/crossref/1967/JZ072i001p00171.shtml>>. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 56.

- SONNERUP, B. U. Ö. . *et al.* Grad-Shafranov reconstruction: An overview. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 111, n. A9, p. A09204, Sep 2006. Citado 4 vezes nas páginas 30, 39, 42 e 44.
- SONNERUP, B. U. Ö.; GUO, M. Magnetopause transects. *Geophys. Res. Lett.*, v. 23, n. 25, p. 3679–3682, jan. 1996. Citado 5 vezes nas páginas 30, 50, 51, 61 e 64.
- SONNERUP, B. U. Ö.; HASEGAWA, H.; PASCHMANN, G. Anatomy of a flux transfer event seen by Cluster. *Geophys. Res. Lett.*, v. 31, p. L11803–L11803, 2004. ISSN 0094-8276. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 61.
- SONNERUP, B. U. Ö.; TEH, W.-L. Reconstruction of two-dimensional coherent MHD structures in a space plasma: The theory. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 113, n. A5, p. A05202, maio 2008. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.
- SONNERUP, B. U. Ö.; TEH, W.-L. Reconstruction of two-dimensional coherent structures in ideal and resistive Hall MHD: The theory. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 114, n. A4, p. A04206, abr. 2009. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.
- SOUSA, A. N. L. *Soluções Analíticas da Equação de Grad-Shafranov e o Estudo de Lâmina de Corrente*. 91 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos-SP, 2018. Disponível em: <<https://biblioteca.univap.br/dados/00003b/00003bc2.pdf>>. Citado 9 vezes nas páginas 41, 42, 48, 49, 50, 75, 79, 100 e 105.
- SOUZA, V. *et al.* Bases teóricas da reconexão magnética. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 38, 00 2016. ISSN 1806-1117. Citado 5 vezes nas páginas 35, 36, 38, 39 e 67.
- SWEET, P. A. The Neutral Point Theory of Solar Flares. In: Lehnert, B. (Ed.). *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*. [S.l.: s.n.], 1958. (IAU Symposium, v. 6), p. 123. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- TEH, W. L. *et al.* THEMIS observations of a secondary magnetic island within the Hall electromagnetic field region at the magnetopause. *Geophys. Res. Lett.*, v. 37, n. 21, p. L21102, nov. 2010. Citado na página 62.
- TEH, W. L.; HAU, L. N. Triple crossings of a string of magnetic islands at duskside magnetopause encountered by AMPTE/IRM satellite on 8 August 1985. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 112, n. A8, p. A08207, ago. 2007. Citado na página 64.
- THOMPSON, W. Chapter 5 - magnetohydrodynamics ii. In: THOMPSON, W. (Ed.). *An Introduction to Plasma Physics (Second Edition)*. Second edition. Pergamon, 1962. p. 65 – 96. ISBN 978-0-08-011180-3. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080111803500084>>. Citado na página 65.
- TREUMANN, R.; BAUMJOHANN, W. Collisionless magnetic reconnection in space plasmas. *Frontiers in Physics*, v. 1, p. 31, 2013. ISSN 2296-424X. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphy.2013.00031>>. Citado na página 39.

- VRANJES, J. Viscosity effects on waves in partially and fully ionized plasma in magnetic field. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 445, n. 2, p. 1614–1624, 10 2014. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stu1887>>. Citado na página 125.
- VRANJES, J.; KONO, M. On the alfvén wave cut-off in partly ionized collisional plasmas. *Physics of Plasmas*, v. 21, n. 1, p. 012110, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4862781>>. Citado na página 125.
- WALKER, G. W. Some Problems Illustrating the Forms of Nebulae. *Royal Society of London Proceedings Series A*, v. 91, p. 410–420, jul. 1915. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/93512>>. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 91.
- WANG, Y. *et al.* On the twists of interplanetary magnetic flux ropes observed at 1 AU. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 121, n. 10, p. 9316–9339, out. 2016. Citado na página 63.
- YOON, P. H.; LUI, A. T. Y. A class of exact two-dimensional kinetic current sheet equilibria. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 110, n. A1, p. A01202, Jan 2005. Citado 13 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32, 36, 48, 75, 76, 79, 81, 83, 85 e 88.
- YOON, P. H.; LUI, A. T. Y. Reply to comment by v. génot on “a class of exact two-dimensional kinetic current sheet equilibria”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 110, n. A9, 2005b. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 79.
- ZAHARIA, S.; Cheng, C. Z. Can an isotropic plasma pressure distribution be in force balance with the T96 model field? *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 108, n. A11, p. 1412, nov. 2003. Citado na página 65.
- ZANK, G. P. *et al.* Particle Acceleration via Reconnection Processes in the Supersonic Solar Wind. *Astrophys. J.*, v. 797, n. 1, p. 28, dez. 2014. Citado na página 64.
- ZHENG, S. B.; WOOTTON, A. J.; SOLANO, E. R. Analytical tokamak equilibrium for shaped plasmas. *Physics of Plasmas*, v. 3, p. 1176–1178, Mar 1996. Citado na página 31.
- ZWEIBEL, E. G.; YAMADA, M. Perspectives on magnetic reconnection. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 472, n. 2196, p. 20160479, Dec 2016. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.

Apêndices

APÊNDICE A – Contexto Histórico

A.1 Joseph Liouville

Figura 31 – Joseph Liouville.



Fonte: <<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Liouville.html>>

Toda essa biografia foi resumida e traduzida de (MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS, 2019).

Liouville nasceu em 24 de março de 1809 em *Saint-Omer*, na França. O capitão do exército de Napoleão era o pai de *Liouville*, e por conta da guerra *Liouville* morou por muito tempo com seu tio. Após a derrota de Napoleão, seu pai se mudou com a família para Toul, em Paris. Lá, *Liouville* estudou uma Matemática mais sofisticada, lendo artigos de *Gergonne* por exemplo, e fez progresso provando alguns resultados geométricos, que foram escritos apesar de nunca terem sido publicados oficialmente.

Liouville ingressou na *École Polytechnique* em 1825, e frequentou o *Cours d'analyse et de mécanique de Ampère* na sessão 1825-26. Ele também participou de cursos de *François Arago* na *École Polytechnique*, bem como de um segundo curso de *Ampère* no *Collège de France*. Embora *Liouville* não pareça ter participado de nenhum dos cursos de *Cauchy*, é claro que *Cauchy* deve ter tido uma forte influência sobre ele. *Liouville* se formou em 1827 e contou com *Prony* e *Poisson* como seus examinadores.

Depois de se formar na *École Polytechnique*, *Liouville* entrou na *École des Ponts et Chaussées*. *Liouville* se casou, e após sua lua de mel em outubro de 1830, ele resolveu renunciar à *École Nationale des Ponts et Chaussées*. Já nesse mesmo período ele escreveu vários artigos sobre Eletrodinâmica, Equações Diferenciais Parciais e Teoria do Calor.

Em 1831, *Liouville* foi nomeado para seu primeiro cargo acadêmico, como assistente de *Claude Mathieu*, nomeado para a cadeira de *Ampère* na *École Polytechnique*. Ele também foi nomeado para várias escolas particulares e para a *École Centrale*. Nesse

período da sua vida ele lecionou muito — 40 horas semanais — em diferentes instituições, onde parece ter lecionado em alto nível para alunos não tão brilhantes.

Em 1836, *Liouville* fundou uma revista de matemática, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Este periódico, às vezes conhecido como “Journal de Liouville”, fez muito pela Matemática na França durante o século XIX. *Liouville* já havia conquistado reputação internacional com artigos publicados no *Crelle’s Journal*, mas ele percebeu que quando confrontado com as publicações dos matemáticos da época, e quando a crítica os comparava isto acirrava alguma rivalidade. Isto o deixou triste, fazendo-o escrever, em 1896, os seguintes dizeres:

“um espírito peculiar de emigração apoderou-se de alguns críticos e os vimos amontoando abusos, um após o outro, dos homens que em vários campos da ciência honraram a França com grande dignidade. ... esse estilo agudo e peremptório ... nunca será meu, pois desonra tanto o caráter quanto o talento daqueles que o adotam”.

Liouville se tornou o favorito para ocupar a cadeira na *École Polytechnique*, que ficou vaga quando Navier morreu em 1836. No entanto, após uma competição acirrada, *Duhamel* foi nomeado. Em 1837, *Liouville* foi nomeado para palestrar no *Collège de France* como substituto de *Biot*. Em 1838, *Liouville* foi nomeado professor de Análise e Mecânica na *École Polytechnique*.

Nem tudo foram flores no caminho *Liouville*. Quando *Lacroix* morreu em 1843, *Liouville* solicitou sua cadeira no *Collège de France*, onde lecionou apenas como substituto de *Biot*. Contudo, após uma eleição apertada, *Libri* foi nomeado. *Liouville* renunciou imediatamente ao *Collège de France*, escrevendo em sua carta de demissão: “Sinto-me profundamente humilhado como pessoa e como geômetra pelos eventos que ocorreram ontem no *Collège de France*. A partir deste momento é impossível para mim palestrar nesta instituição”.

Outro aspecto da vida de *Liouville* foi seu envolvimento na política. Um de seus amigos e colegas matemáticos foi *Arago*, que entrou na Câmara dos Deputados em 1831 e se tornou líder do Partido Republicano. Outros colegas matemáticos também se envolveram com os eventos políticos da época, por exemplo, o Catalão, cujas visões políticas eram semelhantes às visões republicanas de *Liouville*, o que prejudicou um pouco sua carreira matemática. Apesar disto, *Liouville* nunca paralisou suas pesquisas.

Encorajado por *Arago*, *Liouville* se candidatou à Assembleia Constituinte em 1848. Em sua recomendação de *Liouville* como candidato, *Arago* escreveu: “... O Sr. *Liouville* é um dos meus melhores amigos. Ele é um homem muito eminente, patriota, republicano experiente. Deus conceda que a Assembleia Nacional contenha muitos membros desse

calibre”. Eleito em 23 de abril de 1848, *Liouville* ocupou seu lugar entre a maioria republicana moderada. *Liouville* continuou sua carreira política, concorrendo as eleições da Assembleia em 1849, mas a maré virou contra os republicanos moderados, e ele não foi eleito. A derrota eleitoral foi outro ponto de virada na vida de *Liouville*. Assim *Lützen* disse:

“A derrota política mudou a personalidade de *Liouville*. Nas cartas anteriores ele costumava estar deprimido por causa de uma doença e podia expressar sua raiva contra inimigos como *Libri*, mas ele sempre lutava pelo que acreditava ser certo. Após a eleição em 1849, ele renunciou e tornou-se amargo, mesmo com seus velhos amigos. Quando ele se sentou em sua mesa, ele não apenas trabalhou, ... ele também ponderou sobre seu mau destino. ... suas anotações matemáticas foram interrompidas com citações de poetas e filósofos”.

Sua cadeira no *Collège de France* foi declarada vaga em 1850, e *Cauchy* e *Liouville* competiram pelo cargo. Numa disputa acirrada, *Liouville* triunfou e iniciou suas palestras no *Collège de France* em 1851. Embora a produção matemática de *Liouville* tenha sido bastante reduzida enquanto ele esteve envolvido com a política, ela aumentou novamente na década de 1850, apesar dos problemas de saúde. De fato, 1856 e 1857 foram dois dos anos mais profícuos de *Liouville*.

Outro golpe para *Liouville* foi a morte de *Dirichlet* em 1859. Foi um golpe sério para ele matematicamente porque, além de perder um amigo íntimo, ele perdeu seu principal correspondente matemático.

O trabalho matemático de *Liouville* era extremamente amplo, da Física Matemática à Astronomia e à Matemática Pura. Um dos primeiros tópicos que ele estudou, desenvolvido a partir de seus primeiros trabalhos sobre Eletromagnetismo, foi o chamado Cálculo Fracionário. Ele definiu operadores diferenciais de ordem arbitrária, D^t . Geralmente t é um número inteiro, mas nesta teoria desenvolvida por *Liouville* em artigos entre 1832 e 1837, t poderia ser um número racional, irracional, ou geralmente um número complexo.

Liouville investigou critérios para integrais de funções algébricas serem algébricas durante o período de 1832-33. Tendo estabelecido isso em quatro artigos, *Liouville* passou a investigar o problema geral da integração de funções algébricas em termos finitos. Seu trabalho a princípio foi independente do de Abel, mas depois ele aprendeu sobre o trabalho de Abel e incorporou várias ideias em seu próprio trabalho.

Outra área importante pela qual *Liouville* é lembrado hoje é a de Números Transcendentais. O interesse de *Liouville* nisso decorreu da leitura de uma correspondência entre *Goldbach* e *Daniel Bernoulli*. *Liouville* certamente pretendia provar que e é transcenden-

Figura 32 – Vitali Dmitrievich Shafranov.



Fonte: <<https://www.iter.org/of-interest/317>>

suas enormes contribuições na Física do Plasma. Equação esta muito interessante, pois a depender das condições de contorno garante existência de várias soluções não triviais, e vem atraindo desde então a atenção de vários matemáticos. Esta equação foi aplicada com sucesso na Astrofísica, Hidrodinâmica, Meteorologia, Radiofísica, entre outras. Devido a importância desta equação, ela foi incluída no que é denominada pelos físicos como: “A bíblia da teoria Física”.

Quero destacar que ele foi membro da Academia de Ciências da URSS de 1981 até 1997, se tornando membro posteriormente da Academia Russa de Ciências. Este publicou mais de 200 artigos em revistas qualificadas. Também foi chefe do Departamento de Teoria do Plasma do Instituto *Kurchatov*, e além disso ainda era editor chefe das revistas *Plasma Physics Reports* e *Review of Plasma Physics*, por 20 e 25 anos, respectivamente. Ele ganhou vários prêmios russos e estrangeiros, como por exemplo, Prêmio do Estado Soviético (1971) e *Lenin* (1984). Em 2001 se tornou o primeiro físico russo a receber o Prêmio *Alfvéns* e a medalha de Ouro da Sociedade Europeia de Física, além de vários reconhecimentos mundiais por suas pesquisas.

Shafranov é um homem muito modesto, fácil e agradável de se comunicar. A profundidade de seus pensamentos aliada à precisão de suas estimativas faziam qualquer um pensar. Sempre de julgamentos sóbrios, o que sempre foi muito apreciado por seus colegas, também era conhecido por seu talento na forma poética de escrever seus ensaios. Ele faleceu em 2014 na cidade de Moscou. Toda esta biografia foi retirada do artigo [SHAFRANOV \(2009\)](#).

APÊNDICE B – Base Teórica Matemática

Esta parte é usada como material de apoio nos cálculos necessários para se encontrar novas soluções para equação (GS). Vamos definir e enunciar alguns resultados relevantes.

Definição B.0.1 *Define-se uma função exponencial de um número complexo $z = x + iy$, como: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot [\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)]$. Para quaisquer que sejam os números complexos z e w , valem as seguintes propriedades:*

1. $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$;
2. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;
3. $(e^z)^n = e^{zn}$, $n \in \mathbf{Z}$;
4. $e^z \neq 0$;
5. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$;
6. $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2ki$, onde $k \in \mathbf{Z}$.

Definição B.0.2 *As funções hiperbólicas, seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente serão definidas respectivamente, por:*

1. $\operatorname{cosh}(z) = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)$;
2. $\operatorname{senh}(z) = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)$;
3. $\operatorname{tanh}(z) = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \right)$;
4. $\operatorname{csch}(z) = \frac{1}{\operatorname{senh}(z)} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$;
5. $\operatorname{sech}(z) = \frac{1}{\operatorname{cosh}(z)} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}$;
6. $\operatorname{coth}(z) = \frac{\operatorname{cosh}(z)}{\operatorname{senh}(z)} = \frac{1}{\operatorname{tanh}(z)} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$.

Demonstraremos um resultado central para encontrar as singularidades via método de *Génot*. Segue o enunciado:

Teorema B.0.1 *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $\zeta : D \rightarrow \mathbb{C}$ um campo escalar de classe C^2 . Então para qualquer ponto $(X, Z) \in D$,*

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{4\partial^2}{\partial\zeta\partial\zeta^*}.$$

Demonstração B.0.1 *Primeiramente, vamos escrever as funções ζ e ζ^* em função de X e Z na forma:*

$$\zeta = X + iZ,$$

$$\zeta^* = X - iZ.$$

Note que:

$$\frac{\zeta + \zeta^*}{2} = \frac{X + iZ + X - iZ}{2} = \frac{2X}{2} = X,$$

e

$$\frac{\zeta - \zeta^*}{2i} = \frac{X + Zi - (X - iZ)}{2i} = \frac{X - X + iZ + iZ}{2i} = \frac{2iZ}{2i} = Z.$$

Logo, encontramos X e Z em função de ζ :

$$X = \left(\frac{\zeta^* + \zeta}{2} \right),$$

$$Z = \left(\frac{\zeta - \zeta^*}{2i} \right).$$

Usando a Regra da Cadeia, vamos derivar com respeito a ζ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\zeta} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial X}{\partial\zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial\zeta} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{2i} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Analogamente vamos derivar com respeito a ζ^ :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\zeta^*} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial X}{\partial\zeta^*} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial\zeta^*} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(-\frac{1}{2i} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Agora vamos fazer (B.1)+(B.2) e (B.1)-(B.2), conforme segue:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\zeta^*} = \frac{\partial}{\partial X}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\partial}{\partial\zeta^*} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{2}{2i} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\partial}{\partial\zeta^*} \right) i = \frac{\partial}{\partial Z}. \quad (\text{B.4})$$

Elevando ao quadrado (B.3) e (B.4), temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta^*} + \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right)^2, \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} &= i^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right)^2 = - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta^*} + \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right)^2 \right], \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta^*} - \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Por fim, somando (B.5) e (B.6) temos, como queríamos demonstrar, que:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta^*}. \quad (\text{B.7})$$

Em seguida veremos alguns resultados importantes que foram usados neste texto. Alguns serão demonstrados só para efeitos didáticos e outros não, por serem análogos ou fáceis de encontrar.

Definição B.0.3 $|g'(\zeta)| = \sqrt{g(\zeta) \cdot g(\zeta^*)}$.

Propriedade B.0.1 $\cosh^2(bX) - \sinh^2(bX) = 1$

Demonstração B.0.2 *Esse resultado é análogo à identidade trigonométrica fundamental $\cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$. Como estamos tratando do caso hiperbólico, nosso ambiente de trabalho não é a circunferência, e sim a hipérbole, caracterizada por sua equação padrão $x^2 - y^2 = 1$. Fica fácil entender o sinal negativo. Mas a demonstração direta é muito simples, e vale a pena conferir. Vamos começar escrevendo as funções nas suas formas exponenciais:*

$$\cosh^2(bX) - \sinh^2(bX) = \left(\frac{e^{(bX)} + e^{(-bX)}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^{(bX)} - e^{(-bX)}}{2} \right)^2. \quad (\text{B.8})$$

Ao tomar a diferença dos quadrados das funções \cosh e \sinh , obtemos:

$$\cosh^2(bX) - \sinh^2(bX) = \frac{e^{(2bX)} + e^{(-2bX)} + 2}{4} - \frac{[e^{(2bX)} + e^{(-2bX)} - 2]}{4}. \quad (\text{B.9})$$

Portanto, como queríamos demonstrar:

$$\cosh^2(bX) - \sinh^2(bX) = 1, \quad (\text{B.10})$$

Propriedade B.0.2 $|\sinh(ib\zeta)|^2 = \cosh^2(bZ) - \cos^2(bX)$.

Demonstração B.0.3 *Vamos demonstrar este resultado e as outras duas propriedades descritas na sequência são demonstradas de forma análoga. Vamos começar escrevendo na forma exponencial:*

$$|\sinh(ib\zeta)|^2 = \left| \left(\frac{e^{ib\zeta} - e^{-ib\zeta}}{2} \right) \right|^2.$$

Sabendo que $\zeta = X + iZ$, temos:

$$|\sinh(ib\zeta)|^2 = \left| \left(\frac{e^{ibX} \cdot e^{-bZ} - e^{-ibX} \cdot e^{bZ}}{2} \right) \right|^2.$$

Passando novamente a forma trigonométrica e fazendo algumas manipulações, temos:

$$\begin{aligned} |\sinh(ib\zeta)|^2 &= \left| \frac{e^{-bZ}[\cos(bX) + i\sin(bX)] - e^{bZ}[\cos(bX) - i\sin(bX)]}{2} \right|^2, \\ &= \left| \left(\frac{e^{-bZ} - e^{bZ}}{2} \right) [\cos(bX)] - i \left(\frac{e^{bZ} + e^{-bZ}}{2} \right) [\sin(bX)] \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Agora, usando a definição (B.0.2) na equação (B.11), encontramos:

$$|\sinh(ib\zeta)|^2 = | -\sinh(bZ)\cos(bX) - i\cosh(bZ)\sin(bX) |^2. \quad (\text{B.12})$$

Em seguida usaremos a definição (B.0.3) na equação (B.12):

$$|\sinh(ib\zeta)|^2 = \sinh^2(bZ)\cos^2(bX) + \cosh^2(bZ)\sin^2(bX). \quad (\text{B.13})$$

Por fim, usando a propriedade (B.0.1) na equação (B.13), temos:

$$\begin{aligned} |\sinh(ib\zeta)|^2 &= \sinh^2(bZ)\cos^2(bX) + \cosh^2(bZ)\sin^2(bX), \\ &= (\cosh^2(bZ) - 1)\cos^2(bX) + \cosh^2(bZ)\sin^2(bX), \\ &= \cosh^2(bZ)\cos^2(bX) - \cos^2(bX) + \cosh^2(bZ)\sin^2(bX), \\ &= [\cos^2(bX) + \sin^2(bX)]\cosh^2(bZ) - \cos^2(bX). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Portanto, como $\cos^2(bX) + \sin^2(bX) = 1$ na equação (B.14) finalmente temos:

$$|\sinh(ib\zeta)|^2 = \cosh^2(bZ) - \cos^2(bX),$$

Propriedade B.0.3 $|\sinh(b\zeta)|^2 = \cosh^2(bX) - \cos^2(bZ).$

Demonstração B.0.4 *Análoga à demonstração (B.0.3).*

Propriedade B.0.4 $|\cosh(b\zeta)|^2 = \cosh^2(bX) - \sin^2(bZ).$

Demonstração B.0.5 *Análoga à demonstração (B.0.3).*

Propriedade B.0.5 $|\cosh(ib\zeta)|^2 = \cosh^2(bZ) - \operatorname{sen}^2(bX)$

Demonstração B.0.6 *Análoga à demonstração (B.0.3).*

APÊNDICE C – Códigos em Python

Usamos a linguagem de programação *Python* para fazer o trabalho computacional desta monografia, e consideramos a linguagem criada pelo holandês *Guido Van Rossum* em 1991, uma linguagem muito versátil, com ênfase na legibilidade do código, possibilitando assim melhorar muito a estrutura dos programas.

Usamos o código *Python* essencialmente para implementação dos gráficos desta monografia e para fazer alguns testes de solução também. Deixamos aqui um dos códigos de um dos gráficos, a saber, o gráfico de *Faddev*. O intuito é mostrar as bibliotecas e tipo de rotinas que pode-se usar para se obter um gráfico semelhante.

```

1 import numpy as np
2 import math
3 from matplotlib import rc
4 from pylab import *
5 import matplotlib as mpl
6 mpl.rcParams['axes.linewidth'] = 2
7 import matplotlib.ticker as ticker
8 def fmt(x, pos):
9     a, b = '{:.1e}'.format(x).split('e')
10    b = int(b)
11    return r'${} \times 10^{{{}}}$'.format(a, b)
12
13 X=linspace(-11,11,2000)
14 Y=linspace(-5,5,2000)
15 X,Y=meshgrid(X, Y)
16 b=0.5
17 F=0.5
18 B0=4.915*10**(-8)
19 L=10**5
20 m0=4*math.pi*10**(-7)
21
22 def G(x,y):
23     Psi=np.log(F*np.cos(b*x)+np.sqrt(1+F**2)*np.cosh(b*y))
24     return (Psi)
25 Psi = G(X,Y)
26
27 def E(x,y):
28     Bx=B0*((b*np.sqrt(F**2+1)*np.sinh(b*y))/(np.sqrt(F**2+1)*np.cosh(b*
29     y)+F*np.cos(b*x)))
30     By=-B0*(-((b*F*np.sin(b*x))/(np.sqrt(F**2+1)*np.cosh(b*y)+F*np.cos(b
31     *x)))
32     Jz=B0*np.exp(-2*G(x,y))/(L*m0)
33     Jzmax=np.max(Jz)

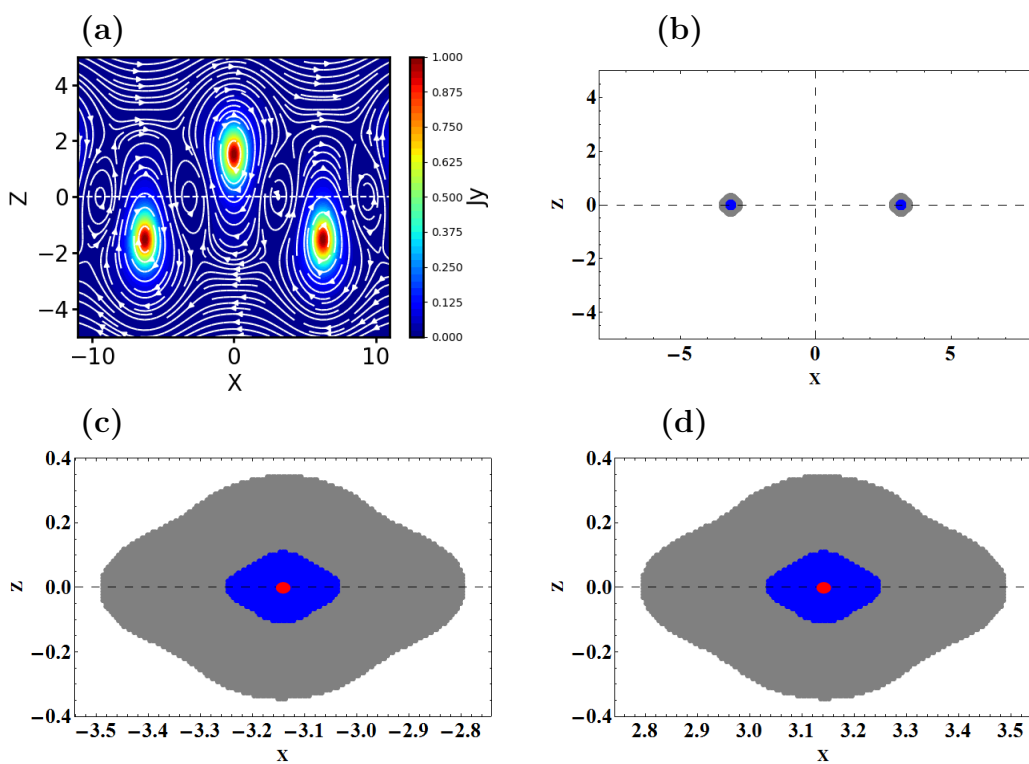
```

```
32     return (Bx,By, Jz/Jzmax)
33
34
35 Ex,Ey,Jz = E(X,Y)
36
37 streamplot(X, Y, Ex, Ey, density=[1.7, 1.7,],color='w')
38
39 axes = plt.gca()
40 axes.tick_params(axis='both',labelsize=20,width=2,length=5)
41 axes.axhline(0,linestyle='--',color='white')
42 plt.xlabel('X',fontsize=20)
43 plt.ylabel('Z',fontsize=20)
44
45 plt.contourf(X,Y,Jz,50,cmap='jet')
46 cb = plt.colorbar()
47 cb.set_label('Jz (A/m^2)',fontsize=20)
48 plt.show()
```

Listing C.1 – Gráfico da solução de Faddev em Python

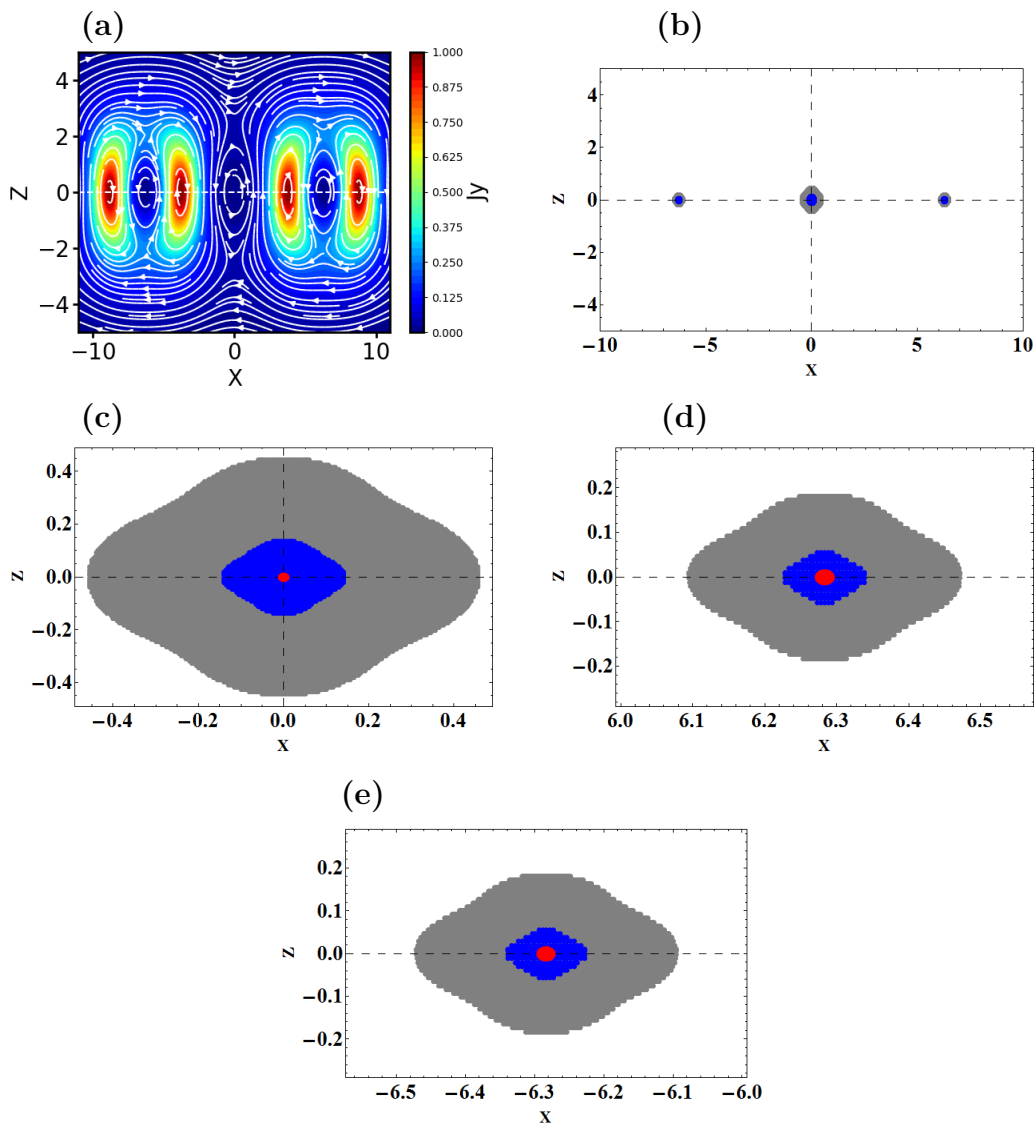
APÊNDICE D – Metodologia Para Excluir Singularidades das Novas Soluções de GS

Figura 33 – Resultados para a solução 1. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um perfil de linhas de força do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$ dada pela equação (4.14). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (ou seja, fora do limite). Os dois últimos painéis mostram as regiões em que $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(-\pi, 0)$ no painel c e $(\pi, 0)$ no painel d.



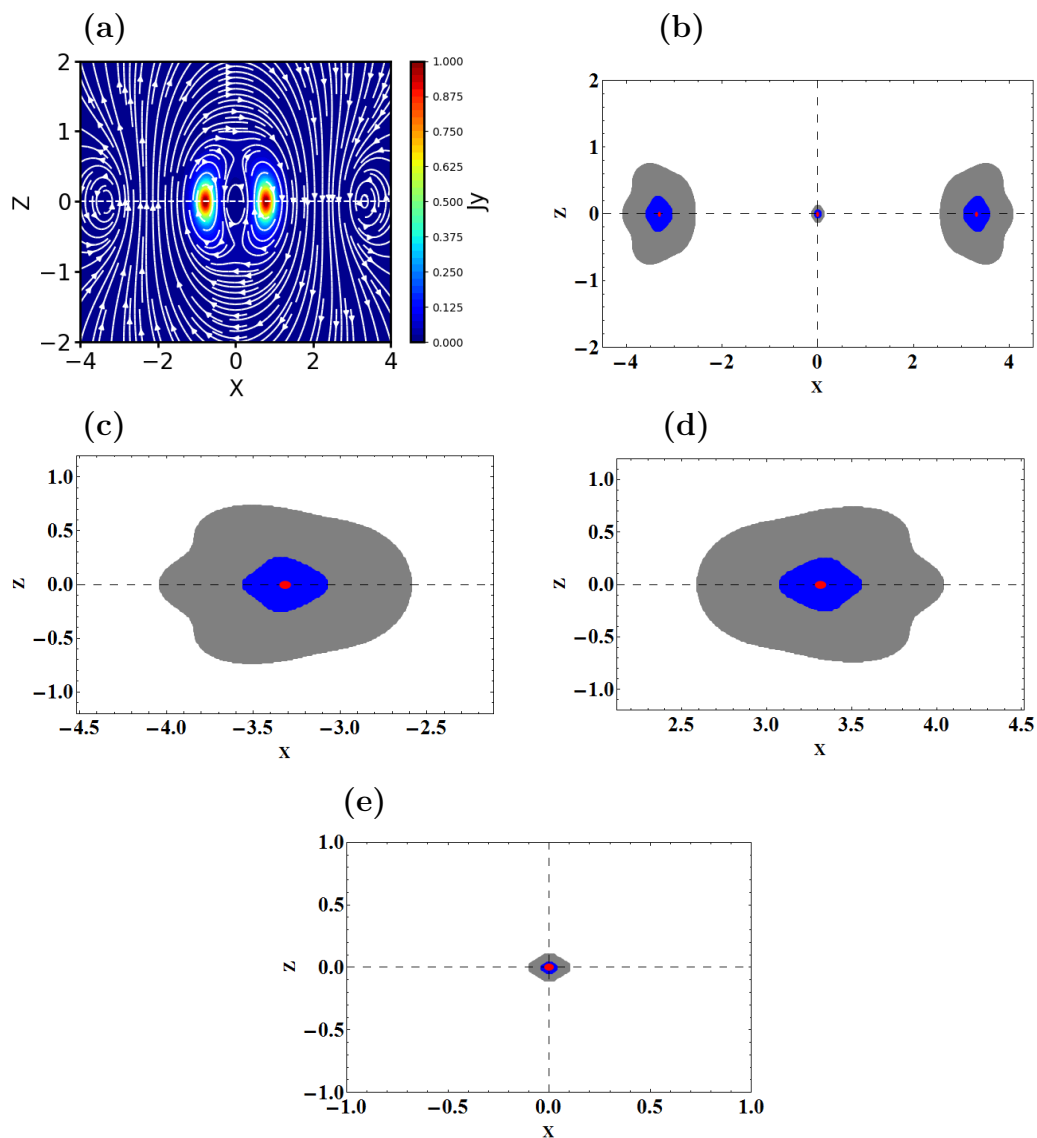
Fonte: o autor.

Figura 34 – Resultados para a solução 2. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um perfil de linhas de força do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$ dada pela equação (4.29). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (ou seja, fora do limite). Os dois últimos painéis mostram as regiões em que $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(0, 0)$ no painel c), $(2\pi, 0)$ no painel d) e $(-2\pi, 0)$ no painel e).



Fonte: o autor.

Figura 35 – Resultados para a solução 5. Os pontos singulares magnéticos são marcados em vermelho. O painel a) mostra um perfil de linhas de força do campo magnético $\vec{B}_{xz} = B_x \hat{i} + B_z \hat{j}$ dada pela equação (4.102). O painel b) mostra o limite em torno de cada ponto singular a partir do qual $v_A/v_{ph} \leq 1,004987562$ (ou seja, fora do limite). Os dois últimos painéis mostram as regiões em que $1,004987562 < v_A/v_{ph} < \sqrt{2}$ (cor cinza) e $v_A \geq c$ (cor azul) ao redor dos pontos singulares $(-\sqrt{11}, 0)$ no painel c, $(\sqrt{11}, 0)$ no painel d e $(0, 0)$ no painel e.



Fonte: o autor.

APÊNDICE E – Produção Científica

A pesquisa precisa ser publicada e divulgada de forma a atingir seu objetivo na comunidade acadêmica. Sendo assim, essa tese rendeu algumas apresentações de trabalho em congressos e simpósios, além de publicações em revistas nacionais e internacionais. Segue nossa produção científica deste trabalho:

- (2019) VII Simfast - Simpósio de Física e Astronomia do Vale do Paraíba
15 a 19 de maio de 2019 - São José dos Campos - SP
Título: **Revisão do Método de Gènot para Localizar as Singularidades nas Soluções Analíticas da Equação Bidimensional de Grad-Shafranov.**
Autores: SANTOS, L. N; OLIVEIRA, M. F. C.
- (2019) VII Simfast - Simpósio de Física e Astronomia do Vale do Paraíba
15 a 19 de maio de 2019 - São José dos Campos - SP
Título: **Revisão para se Obter uma Forma Específica da Equação de Grad-Shafranov.**
Autores: OLIVEIRA, M. F. C; SANTOS, L. N.
- (2020) I ERMAC - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - MS,
14 a 18 de setembro de 2020 - Aquidauana - MS
Título: **Uma Nova Forma de Encontrar a Solução de Harris para Equação Específica de Grad-Shafranov (GS).**
Autores: SANTOS, L. N; Ojeda A, G.
- (2021) VIII SBGEA e VIII SimFAST - Simpósio Brasileiro de Geofísica Espacial e Aeronomia
22 a 26 de março de 2021 - São José dos Campos - SP
Título: **Equação específica de Grad-Shafranov: uma nova solução obtida dos modelos de Yoon-Lui-2 e Yoon-Lui-3.**
Autores: SANTOS, L. N; Ojeda A, G; OLIVEIRA, M. F. C.
- (2020) Artigo publicado (Preprint) na journal of Geophysical Research
Título: **Grad-Shafranov equation: MHD simulation of the new solution obtained from the Fadeev and Naval models.**
Autores: Ojeda A, G; SANTOS, L. N; Gonzalez-Aviles. J. J; GUTBERLET, P. R.

- (2020) Artigo publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física Vol. 42
Título: **Uma Revisão da Teoria Cinética em Física de Plasma para se Obter uma Forma Simplificada da Equação de Grad-Shafranov.**
Autores: M; Cristaldo-Oliveira; A. Ojeda-González; L. N. Santos; A. Prestes; A. N. Laurindo Sousa.
- (2021) Artigo publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física Vol. 43
Título: **Modos de ondas magnetohidrodinámicas influenciados por la corriente de desplazamiento.**
Autores: A. Ojeda-González; J. J. González-Avilés; V. De La Luz; L. N. Santos.