

Universidade do Vale do Paraíba – UNIVAP
Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento - IP&D
Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia

MATHEUS FELIPE CRISTALDO DE OLIVEIRA

**MODELOS ANALÍTICOS DE UMA FORMA ESPECÍFICA DA
EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV APLICADO EM PLASMAS
ESPACIAIS**

São José dos Campos - SP

2020

MATHEUS FELIPE CRISTALDO DE OLIVEIRA

**MODELOS ANALÍTICOS DE UMA FORMA ESPECÍFICA DA
EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV APLICADO EM PLASMAS
ESPACIAIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Universidade do Vale do Paraíba, como complementação dos créditos necessários para obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia.

Orientador: Prof. Dr. Arian Ojeda González

São José dos Campos - SP

2020

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE DIVULGAÇÃO DA OBRA

Ficha catalográfica

Oliveira, Matheus Felipe Cristaldo de
Modelos analíticos de uma forma específica da equação de
Grad-Shafranov aplicado em plasmas espaciais / Matheus Felipe
Cristaldo de Oliveira; orientador, Prof. Dr. Arian Ojeda
González. - São José dos Campos, SP, 2020.

1 CD-ROM, 72 p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico) - Universidade do Vale do
Paraíba, São José dos Campos. Programa de Pós-Graduação em Física
e Astronomia.

Inclui referências

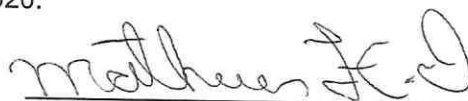
1. Física e Astronomia. 2. Física de plasmas. 3. Equação de
Grad-Shafranov. 4. Astrofísica. I. Ojeda González, Prof. Dr.
Arian, orient. II. Universidade do Vale do Paraíba. Programa de
Pós-Graduação em Física e Astronomia. III. Título.

Eu, Matheus Felipe Cristaldo de Oliveira, autor(a) da obra acima referenciada:

Autorizo a divulgação total ou parcial da obra impressa, digital ou fixada em
outro tipo de mídia, bem como, a sua reprodução total ou parcial, devendo o
usuário da reprodução atribuir os créditos ao autor da obra, citando a fonte.

Declaro, para todos os fins e efeitos de direito, que o Trabalho foi elaborado
respeitando os princípios da moral e da ética e não violou qualquer direito de
propriedade intelectual sob pena de responder civil, criminal, ética e
profissionalmente por meus atos.

São José dos Campos, 25 de Novembro de 2020.



Autor(a) da Obra

Data da defesa: 27 / 08 / 2020

MATHEUS FELIPE CRISTALDO DE OLIVEIRA

**“MODELOS ANALÍTICOS DE UMA FORMA ESPECÍFICA DA EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV
APLICADO EM PLASMAS ESPACIAIS”.**

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, do Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia, do Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento da Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos, SP, pela seguinte banca examinadora:

PROF. DR. SERGIO PILLING GUAPYASSU DE OLIVEIRA

PROF. DR. ARIAN OJEDA GONZÁLEZ

PROF. DR. FRANCISCO CARLOS ROCHA FERNANDES

PROF.ª DR.ª ALINE DE LUCAS – IFSP/Campus de Jacareí - Brasil

Prof.ª Dr.ª Lúcia vieira

Diretora do IP&D – Univap

São José dos Campos, 27 de agosto de 2020.

Matheus Felipe Cristaldo de Oliveira

Modelos Analíticos de uma Forma Específica da Equação de Grad-Shafranov aplicado em Plasmas Espaciais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Universidade do Vale do Paraíba, como complementação dos créditos necessários para obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia.

São José dos Campos - SP, Data da Aprovação: 27 de agosto de 2020

Prof. Dr. Arian Ojeda González
Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP

Prof. Dr. Sergio Pilling Guapyassu de Oliveira
Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP

Prof. Dr. Francisco Carlos Rocha Fernandes
Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP

Profa. Dra. Aline de Lucas
IFSP – Campus de Jacareí /Brasil

São José dos Campos - SP
2020

Ao meu pai Oliveira

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me deu condições para que eu pudesse concluir todo o trabalho. Agradeço todas as pessoas que me ajudaram no período que passei em São José dos Campos, principalmente ao professor Arian pela amizade, orientação, dedicação e paciência. Aos meus amigos Daniela e Marcus pelo companheirismo.

Aos meus pais Oliveira e Maria, e ao meu irmão Andrew pelo incentivo que deram. E a minha amada Niza pelo apoio sem igual que foi fundamental. E por fim agradeço ao povo Brasileiro que paga impostos dando condições para que a CAPES possa fornecer bolsas de estudos.

*“Todas as coisas cooperam para o bem dos que amam a Deus.”
(Apóstolo São Paulo)*

RESUMO

Este trabalho é um estudo de uma pesquisa detalhada abrangendo a área da *Física Espacial*. No qual será elaborada visando uma construção sistemática satisfazendo as teorias aplicadas nas áreas de *Física de Plasma*, *Eletromagnetismo* e a *Teoria Magnetohidrodinâmica* (MHD). Esta construção terá como característica abordar e explicar a construção física-matemática para a obtenção de uma forma específica da equação de *Grad-Shafranov*, que é uma equação diferencial importante para se fazer estudos de fenômenos físicos no plasma geoespacial. As soluções desta equação podem ser obtidas a partir da *fórmula de Walker* de 1915. Estas soluções são analíticas e fornecem informações para possíveis morfologias geométricas que um campo magnético possa assumir em determinadas situações físicas que gerem lâminas de corrente bidimensionais. Vários trabalhos como o de *Harris (1962)*, *Fadeev (1965)*, *Kan (1963)*, *Manankova (2003)*, dentre outros, sugeriram vários tipos destas soluções. Elas, em sua grande maioria, são abordadas, revistas, discutidas e melhoradas no sentido de melhor compreensão das propostas que elas trazem. Essas melhoras são apresentadas em gráficos e discussões, visando propor argumentos claros que possibilitarão melhores interpretações dos modelos analíticos que são decorrentes de várias publicações nesta área. Algumas características geométricas que essas soluções apresentam como os pontos neutros X , O e ponto singular S foram discutidas para salientar a importância de detectar e apresentar esses pontos que podem trazer interpretações dos fenômenos físicos relativos à morfologia do *campo magnético*. Na sequência, é apresentada e sugerida uma nova solução analítica, que possui uma lâmina de corrente em forma cilíndrica e com características de fractais.

Palavras-chaves: Equação de Grad-Shafranov. Lâminas de Corrente. Teoria Cinética de Plasmas. Fórmula de Walker. Soluções Analíticas

ANALYTICAL MODELS OF A SPECIFIC FORM OF THE GRAD-SHAFRANOV EQUATION APPLIED TO SPATIAL PLASMAS

ABSTRACT

This work is a study of a detailed research covering the area of *Space Physics*. In which a systematic construction will be elaborated satisfying the theories applied in the areas of *Plasma Physics*, *Electromagnetism* and the *Magnetohydrodynamic Theory* (MHD). This research will have the characteristic of approaching and explaining the physical-mathematical construction to obtain a specific form of the *Grad-Shafranov equation*, which is an important differential equation for making studies of physical resources in geospatial plasma. The solutions in this equation can be corrected from the 1915 *Walker's formula*. These solutions are analytical and provide information for possible geometric morphologies that a magnetic field can assume in certain physical situations that generate two-dimensional current sheets. Several works, such as *Harris (1962)*, *Fadeev (1965)*, *Kan (1963)*, *Manankova (2003)*, among others, have suggested various types of these solutions. Most of them are approached, reviewed, discussed and improved in order to understand the proposals they bring. These improvements are presented in graphs aiming to propose clear arguments that will allow better interpretations of the analytical models that are derived from several publications in this area. Some geometric characteristics that these solutions present, such as the null points X, O and singular point S, are discussed to highlight the importance of detecting and presenting these points that can bring interpretations of the physical phenomena related to the morphology of the *magnetic field*. In the sequence, a new analytical solution is presented and suggested, which has a cylindrical current sheet with fractal characteristics.

Keywords: Grad-Shafranov Equation. Current sheets. Kinetic theory of plasmas. Walker Formula. Analytical Solutions

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| <p>Figura 1 – O painel da esquerda mostra uma lâmina de corrente entre duas regiões de campo magnético orientados antiparalelamente. O painel da direita apresenta uma lâmina de corrente entre um campo magnético e uma região livre de campo.</p> | 15 |
| <p>Figura 2 – Representação do <i>espaço de fase</i> num plano bidimensional com eixos formados por \vec{r} e \vec{v}. A representação permite visualizar um elemento de volume $d^3r d^3v$ importante para definir uma função de distribuição das partículas no interior do plasma.</p> | 23 |
| <p>Figura 3 – Configuração do campo magnético juntamente com a densidade de corrente normalizada em 2D no modelo de Fadeev. As linhas brancas representam a configuração do campo magnético com o sentido das linhas anti-paralelas. Note que no ponto $(0, 0)$ o valor do campo magnético tende a 0, caracterizando assim o ponto X ou ponto neutro. Em torno dele, é possível ver os pontos O ou ilhas magnéticas caracterizadas pela geometria elíptica do campo. A Densidade de corrente é caracterizada pela barra, ficará cada vez mais intensa a medida que a cor fica vermelha.</p> | 40 |
| <p>Figura 4 – Configuração do campo magnético juntamente com a densidade de corrente normalizada em 2D, no eixo Z há um par de pontos singulares em torno da origem do modelo de Kan com $b = 0,5$.</p> | 42 |
| <p>Figura 5 – Configuração do campo magnético consequente da solução analítica do modelo de Kan (1973). As linhas brancas representam as respectivas linhas do campo magnético antiparalelas, ou seja, possuem sentidos opostos. Isto é esboçado juntamente com a densidade de corrente normalizada em 2D no respectivo modelo com $b = 0,5$. Note que o intervalo de plotagem do campo magnético é diferente da Figura 4, isto foi feito para excluir a origem, pois em sua vinhança se situam os pontos singulares.</p> | 43 |
| <p>Figura 6 – Configuração do campo magnético consequente da solução analítica do modelo de Kan (1973). As linhas brancas representam as respectivas linhas do campo magnético antiparalelas, ou seja, possuem sentidos opostos. Isto é plotado juntamente com a densidade de corrente normalizada em 2D no respectivo modelo com $b = 5$. Note que a morfologia das linhas de campo magnético é diferente da Figura 5, ou seja, as linhas de campo ficam mais alongadas por causa do valor do parâmetro b.</p> | 43 |

| | |
|--|----|
| Figura 7 – Esboço do campo magnético juntamente com a densidade de corrente da solução de Manankova para $a = 0, b = 2$ e $f_p = 0, 1$ no intervalo $0 < X < 8$ | 45 |
| Figura 8 – Esboço do campo magnético juntamente com a densidade de corrente da solução de Manankova para $a = 0, b = 2$ e $f_p = 0, 5$. Dois pontos neutros e uma ilha magnética são esboçados pela solução no intervalo $0 < X < 8$ | 45 |
| Figura 9 – Esboço do campo magnético juntamente com a densidade de corrente da solução de Manankova para $a = 2, b = 2$ e $f_p = 0, 1$ no intervalo $0 < X < 8$ | 46 |
| Figura 10 – Modelo de <i>Kan</i> na solução de H-F-K-M dado por (3.24), no caso $f_p = 0$ (não há ilha magnética), $a = 0$ (singularidade localizada na origem), $b = 2$ e $k = 1$ | 47 |
| Figura 11 – Esboço do campo magnético e da densidade de corrente da solução de H-F-K-M para os valores ($f_p = 0, a = 0, b = 2$) mas com $k = 0, 1$. As linhas de campo se tornam mais alongadas em comparação com a Figura 10. | 48 |
| Figura 12 – Campo magnético e a densidade de corrente da solução 3 de Laurindo-Sousa para $b = 0, 5$ com $B_0 = 49, 15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m). | 49 |
| Figura 13 – Campo magnético e densidade de corrente normalizada do modelo de Brittnacher e Whipple (2002). O parâmetro α determina as coordenadas da localização das duas correntes paralelas, neste caso $\alpha = 2$, assim a densidade de corrente se eleva ao máximo em $X = \pm 2$. Foi plotado para este caso o valor $\beta = 0, 5$, a curvatura das ilhas magnéticas tem contorno aproximadamente semelhante a uma circunferência. | 50 |
| Figura 14 – Campo magnético e densidade de corrente normalizada do modelo de Brittnacher e Whipple (2002). Esta figura é similar à 13, mas neste caso o gráfico está apresentado para $\beta = 5$ | 51 |
| Figura 15 – Configuração do campo magnético e a densidade de corrente normalizada do modelo sugerido por <i>Yoon-Lui-1</i> . É uma distribuição de corrente cilíndrica de comprimento infinito em duas dimensões para $\nu = 1$, $B_0 = 49, 15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m). | 53 |
| Figura 16 – Gráfico do campo magnético no modelo alternativo de linha-X de <i>Yoon-Lui-2</i> . Foi plotado para $a = 3$. No domínio de visualização da solução observam-se duas ilhas magnéticas acima do eixo das abscisas com um ponto neutro X na origem. No eixo Z observam-se duas singularidades magnéticas. | 54 |

| | |
|--|----|
| Figura 17 – Gráfico do campo magnético no modelo alternativo de linha-X de <i>Yoon-Lui-2</i> . Foi plotado para $a = 6$. Note que os pontos singulares localizados no eixo Z , foram afastados do intervalo de plotagem quando comparado com a Figura 16. | 54 |
| Figura 18 – Configuração do campo magnético e a densidade de corrente normalizada do modelo de <i>Yoon-Lui-3</i> com escolha de $a = 0,7$, $B_0 = 49,15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m). | 56 |
| Figura 19 – Configuração do campo magnético e a densidade de corrente normalizada do modelo de <i>Yoon-Lui-3</i> , com escolha de $a = 0,1$ | 57 |
| Figura 20 – Gráficos da solução proposta para valores negativos do parâmetro a como segue: (a) $a = -0,05$; (b) $a = -0,5$; (c) $a = -1,0$ e (d) $a = -2,5$. Cada painel mostra o gráfico de contorno do campo magnético com sua respectiva orientação no plano XZ , superposto com o módulo de J_y . Em todos os painéis existe um ponto singular na origem do sistema de coordenadas. Duas ilhas magnéticas acima do eixo das ordenadas e dois pontos neutros X no eixo das abcissas aparecem nos painéis (a) e (b). Em relação aos painéis (a) e (b), em (d) as ilhas e os pontos X mudam de eixo. No painel (c) existe uma corrente anelar uniformemente estruturada ao redor da origem, ou seja, uma lâmina de corrente circular com geometria cilíndrica ao longo do eixo Y | 61 |
| Figura 21 – Gráficos da solução proposta para o valor nulo e valores positivos do parâmetro a como segue: (a) $a = 0$; (b) $a = 0,05$; (c) $a = 0,5$ e (d) $a = 2,5$. Cada painel mostra o gráfico de contorno do campo magnético com sua respectiva orientação no plano XZ , superposto com o módulo de J_y . Em todos os painéis existe um ponto singular na origem do sistema de coordenadas. Duas ilhas magnéticas acima do eixo das abcissas e dois pontos neutros X no eixo das ordenadas aparecem nos painéis (a), (b) e (c). No painel (a) existe uma corrente anelar uniformemente estruturado ao redor da origem, ou seja, uma lâmina de corrente circular com geometria cilíndrica ao longo do eixo Y | 62 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|------|---------------------------------|
| IMF | - Interplanetary Magnetic Field |
| FTEs | - Flux Transfer Events |
| MMS | - Magnetospheric Multiscale |
| MHD | - Magnetohidrodinâmica |
| GS | - Grad-Shafranov |
| EDP | - Equação Diferencial Parcial |
| PVI | - Problema de Valor Inicial |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|----------------|---|
| q_j | - Carga elétrica |
| \vec{B} | - Vetor Campo magnético |
| \vec{E} | - Vetor Campo elétrico |
| \vec{J} | - Densidade de corrente |
| \vec{A} | - Potencial vetor magnético |
| μ_0 | - Permeabilidade magnética do espaço livre |
| T_j | - Temperatura |
| ∇^2 | - Laplaciano |
| V_j | - Velocidade de deriva |
| A_z | - Componente-z do potencial vetor magnético |
| n_{0j} | - Densidade de partículas |
| f_α | - Função de distribuição |
| \vec{r} | - Vetor posição |
| \vec{v} | - Vetor velocidade |
| $\frac{D}{Dt}$ | - Diferencial total |
| ρ | - Densidade de carga |
| \vec{F} | - Vetor força |
| \vec{I} | - Impulso de uma força |
| \vec{p} | - Momento de uma partícula |
| η | - Resistividade Elétrica |

SUMÁRIO

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 1.1 | Motivação | 14 |
| 1.2 | Importância da Pesquisa | 15 |
| 1.3 | Enunciado do Problema | 16 |
| 1.4 | Objetivo Geral | 19 |
| 1.5 | Objetivos Específicos | 19 |
| 1.6 | Estrutura do Trabalho | 19 |
| 2 | SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV . | 21 |
| 2.1 | <i>Espaço de fase e função de distribuição</i> | 22 |
| 2.2 | Grandezas macroscópicas do plasma | 24 |
| 2.3 | Equação de Boltzmann | 25 |
| 2.4 | Equação de Vlasov | 28 |
| 2.5 | Potencial Vetor Magnético nas Equações de <i>Maxwell</i> | 28 |
| 2.6 | Forma Analítica da Função de Distribuição | 30 |
| 2.7 | Obtenção de uma forma Específica da Equação de GS | 33 |
| 2.8 | Solução Analítica | 35 |
| 2.9 | Singularidades na Solução Analítica | 36 |
| 3 | REVISÃO DE MODELOS ANALÍTICOS | 37 |
| 3.1 | Modelo de Fadeev | 38 |
| 3.2 | Modelo de Kan | 40 |
| 3.3 | Modelo de Manankova | 44 |
| 3.4 | Modelo de H-F-K-M | 46 |
| 3.5 | Modelo de Laurindo-Sousa | 48 |
| 3.6 | Modelo de B-W | 49 |
| 3.7 | Modelo de Yoon-Lui-1 | 52 |
| 3.8 | Modelo de Yoon-Lui-2 | 53 |
| 3.9 | Modelo de Yoon-Lui-3 | 55 |
| 4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO | 58 |
| 4.1 | Solução Proposta | 58 |
| 4.2 | Geometria da Solução | 60 |
| 5 | CONCLUSÕES | 64 |
| | REFERÊNCIAS | 66 |

1 INTRODUÇÃO

Uma *lâmina de corrente* é basicamente uma concentração fina e alongada de corrente em uma região entre dois *campos magnéticos antiparalelos*. Ela está relacionada a uma descontinuidade tangencial em um limite não propagante entre dois plasmas, ou seja, numa linha- X quando o sistema é forçado, por exemplo, em uma evolução *magnetohidrodinâmica ideal* (MHD) (PARNELL, 2000).

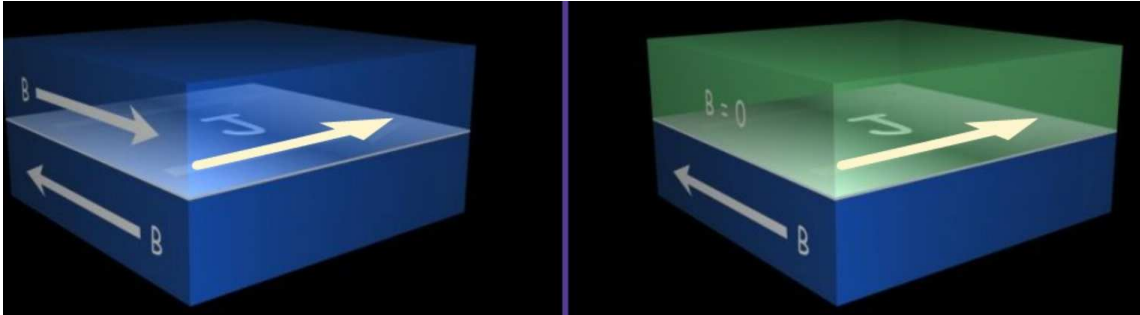
Harris (1962) propôs uma solução unidimensional para um plasma em equilíbrio magnetostático caracterizado pelo sistema de equações de *Vlasov-Maxwell*. A solução de *Harris* é frequentemente usada como um modelo padrão de *lâmina de corrente* para estudar outros modelos de lâminas embutidos em um *campo magnético* em larga escala. Essa solução funcionou como base para criar outras soluções como, por exemplo, *Fadeev, Kan, Manankova*, entre outras, que têm em comum que, sob algumas considerações matemáticas, a solução de *Harris* pode ser recuperada. As soluções acima mencionadas foram propostas nos trabalhos de Fadeev, Kvabtskhava e Komarov (1965), Kan (1973), Manankova e Pudovkin (1996), Manankova e Pudovkin (1999), Manankova, Pudovkin e Runov (2000), Manankova (2003), Laurindo-Sousa et al. (2018). Uma outra solução conhecida como Harris–Fadeev–Kan–Manankova (H-F-K-M) foi proposta por Yoon e Lui (2005). Além disso, existe outro modelo totalmente diferente quando comparado com a solução *Harris*, conhecido como modelo de *Brittnacher–Whipple* (BRITTNACHER; WHIPPLE, 2002), também discutido na seção 3.6 do artigo de Yoon e Lui (2005). Outros três modelos, diferentes aos da família *Harris* e ao modelo de *Brittnacher–Whipple*, foram apresentados nas seções 3.7, 3.8 e 3.9 no trabalho de Yoon e Lui (2005).

Nesta dissertação, estudaremos modelos bidimensionais de *lâminas de corrente* que estão em *equilíbrio cinético* (ver Figura 1), ou seja, elas não evoluem espacial e nem temporalmente. Nesse estado estático, será possível estudar a morfologia do *campo magnético*, os *pontos neutros* e *pontos singulares* e o comportamento de outras magnitudes do plasma.

1.1 MOTIVAÇÃO

Neste trabalho, é feita uma revisão de várias soluções analíticas da forma específica da equação de *Grad-Shafranov*(GS). As soluções apresentadas utilizam a solução genérica proposta por Walker (1915). Estamos motivados a utilizar esse grupo de soluções para estudar a coexistência entre os *pontos neutros* e os *pontos singulares* e, assim, discutir como eles influenciam na distribuição de corrente no interior do plasma. O entendimento físico destas soluções será um fato motivador para tentar propor uma nova solução a partir

Figura 1 – O painel da esquerda mostra uma lâmina de corrente entre duas regiões de campo magnético orientados antiparalelamente. O painel da direita apresenta uma lâmina de corrente entre um campo magnético e uma região livre de campo.



Fonte: The coment program.

da utilização da fórmula de Walker.

1.2 IMPORTÂNCIA DA PESQUISA

No interior da *magnetosfera* da Terra, existem vários sistemas de corrente que fluem através da *magnetopausa* sendo que algumas dessas correntes chegam até a ionosfera de altas latitudes (GONZALEZ et al., 1994). Como exemplo, podem-se citar as correntes da magnetocauda, de Chapman-Ferraro, alinhada ao campo, de Hall e Pedersen. Além disso, temos a corrente de anel, e a lâmina neutra de corrente (KELLEY; HEELIS, 1989). A formação dessas correntes está relacionada com o movimento de elétrons e prótons através das linhas de campo magnético da magnetosfera. Esses sistemas de corrente foram amplamente estudados durante os últimos 50 anos (DUNGEY, 1961; SONNERUP; CAHILL, 1967; SONNERUP; GUO, 1996; COWLEY, 1996) e este trabalho não objetiva estudá-los. Este cenário oportuniza estudar diferentes configurações do campo que gerem lâminas de corrente bidimensionais. Essas lâminas de corrente podem ser encontradas no interior da magnetosfera nas regiões onde acontece reconexão magnética (reconexão diurna, noturna ou nos eventos de transferência de fluxo (*do inglês, flux transfer events*)) (FERREIRA et al., 2017).

O exemplo básico para entender o conceito de lâmina de corrente é a união de um número n de fios paralelos com corrente elétrica i fluindo no mesmo sentido. O plano é a configuração geométrica ideal de uma lâmina de corrente, mas ela também pode girar e retorcer gerando uma superfície curva. Uma lâmina infinita no plano cartesiano (x, y) com corrente fluindo no sentido positivo do eixo x irá gerar um campo magnético paralelo ao eixo y sendo $\vec{B}(0, y, z) = -B_y \hat{j}$ se $z > 0$ e $\vec{B}(0, y, z) = B_y \hat{j}$ se $z < 0$. Segundo a Lei de *Biot-Savart*, o valor do campo magnético diminui quando o módulo de z aumenta. Se a lâmina de corrente não é infinita ao longo do eixo y , o campo magnético irá contornar a

lâmina até se fechar. Por exemplo, com um único fio com corrente, cada linha de campo magnético formará uma circunferência ao redor do fio.

No raciocínio anterior foi necessário ter uma corrente elétrica e fios para gerar um campo magnético. Mas o oposto também é verdadeiro, ou seja, uma configuração de campo magnético pode gerar uma lâmina de corrente. Porém, neste contexto o termo lâmina de corrente é usado para se referir a uma configuração espacial das linhas de campo magnético que força as partículas a fluírem em uma determinada direção. Esta última maneira de obter uma lâmina de corrente tem mais aplicabilidade quando se trabalha com plasmas espaciais (magnetosferas planetárias, atmosfera solar, vento solar) e de laboratório (*tokamak*). Um campo magnético externo pode afetar a neutralidade local do plasma, gerando lâminas de corrente, sendo essas regiões mais propensas a se reconectarem (SCHOLER (1988) e (ou) gerar turbulência (PRIEST; FORBES, 1989; PRIEST; FORBES, 1992; PRIEST; FORBES, 2000; PHAN et al., 2006; PHAN et al., 2018). Ou seja, as lâminas de corrente são importantes porque podem estar relacionadas ao fenômeno de reconexão magnética e/ou turbulência em plasmas espaciais, como, por exemplo na atmosfera solar, o vento solar e a magnetosfera (JI; KULSRUD; YAMADA, 2005; TREUMANN; BAUMJOHANN, 2013; ZWEIBEL; YAMADA, 2016; GONZALEZ et al., 2016).

Num trabalho experimental publicado por Phan et al. (2018), os autores observaram reconexão magnética sem acoplamento de íons na magnetobainha (*magnetosheath em inglês*). As observações foram obtidas com dados das quatro espaçonaves MMS (*Magnetospheric Multiscale em inglês*) que foram lançadas em 2015. No referido trabalho, propôs-se a tese de que a reconexão magnética é consequência da formação de uma lâmina de corrente na escala dos elétrons, o que somente é possível em um plasma turbulento. Os autores concluíram que era necessário aprofundar os estudos teóricos e observacionais neste tipo de reconexão. Isto mostra a importância que o presente trabalho tem no que se refere ao estudo de modelos analíticos com as lâminas de corrente.

1.3 ENUNCIADO DO PROBLEMA

Um tubo de fluxo magnético inclui um único conjunto de linhas de campo. A superfície circundante é definida por um contorno fechado, perpendicular ao campo magnético, que inclui estas linhas de campo. Tal como um elemento de fluido, um tubo de fluxo magnético pode ser distorcido, mas nunca quebrado. Enquanto as linhas de campo magnético mantiverem a "identidade", o tubo de fluxo continua a ser "congelado" no plasma do ambiente, sendo impossível separar o plasma do campo. Em outras palavras, um tubo de fluxo permanece intacto enquanto:

- a) O fluxo magnético fechado pelo contorno mantém-se constante, se o contorno se

move com o plasma;

- b) Todo o plasma que inicialmente se encontra ao longo de uma linha de campo, permanece ao longo dela.

As condições anteriores se resumem no teorema "*frozen-field*" (proposto por Alfvén (1942), Alfvén (1943)) que é válido se $\nabla \times (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = 0$, no qual \vec{u} é a velocidade do plasma, e \vec{E} e \vec{B} são os campos elétrico e magnético respectivamente. O teorema "*frozen-field*" geralmente é considerado válido se as seguintes condições forem satisfeitas:

- a) a resistividade elétrica é muito pequena ($\eta \approx 0$) (condutividade ($\sigma = 1/\eta$) quase infinita como acontece no meio interplanetário);
- b) a densidade de corrente (\vec{J}) é pequena;
- c) as escalas espacial L e temporal t são muito grandes.

Embora o teorema "*frozen-field*" seja válido na maioria das regiões do plasma que estudamos, *ele não é verdadeiro nas lâminas de corrente*, que são regiões estreitas de grande densidade de corrente. Porém, nessas lâminas, a tendência é o aumento da resistividade que, poderia levar às condições ideais para acontecer a reconexão magnética. Sendo este, um dos fenômenos mais eficientes de intercâmbio de energia no interior do plasma em pequena e larga escala (ZWEIBEL; YAMADA, 2016; GONZALEZ et al., 2016).

Na eletrodinâmica através Lei de *Ampère-Maxwell*, está bem estabelecido que uma corrente elétrica num fio ou uma variação de campo elétrico (\vec{E}) produz um campo magnético (\vec{B}):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

sendo μ_0 a permeabilidade magnética do espaço livre, ϵ_0 a permissividade do espaço livre e t tempo. A Lei de *Faraday* em certa forma é o oposto da Lei de *Ampère-Maxwell*, ou seja, um campo magnético variável induz um campo elétrico:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.2)$$

A Lei de Gauss estabelece uma fórmula para calcular o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada. As cargas elétricas se apresentam na natureza em dois tipos, com sinais positivo e negativo, sendo que todo objeto carregado tem um valor quantizado de carga em relação à carga do elétron. Um campo elétrico \vec{E} é estabelecido entre uma carga $+q$ e outra $-q$ separadas no espaço, porém, a lei de Gauss estabelece a existência de "monopolos" elétricos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.3)$$

sendo ρ a densidade de carga elétrica. No entanto, a natureza teve outra "ideia" para gerar o campo magnético, não permitindo a separação das "cargas magnéticas", sempre aparecem juntas em forma de dipolo. Popularmente, na física, se diz que "não existem monopólos magnético", o que leva a linha de campo magnético voltar à fonte em que foi gerada, porém, o fluxo de um campo magnético gerado no interior de uma superfície fechada sempre será zero:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.4)$$

No eletromagnetismo, também é importante a equação de continuidade ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial\rho/\partial t$) e a força de Lorentz ($\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$), no qual \vec{v} é a velocidade da partícula de carga q .

Neste trabalho, são feitas duas considerações nas equações apresentadas com o intuito de obter soluções analíticas para estudar lâminas de corrente. Considera-se que nenhuma grandeza tem dependência temporal ($\partial/\partial t = 0$) nem variação espacial ao longo do eixo cartesiano z ($\partial/\partial z = 0$). Matematicamente, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}' = 0$, porém, segundo a Equação (1.4), é possível escrever o campo magnético em função do potencial vetor magnético \vec{A}' pela relação $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$. Reescrevendo a Equação (1.1), considerando nulas as variações temporais:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}') = \nabla^2 \vec{A}' - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') = -\mu_0 \vec{J}. \quad (1.5)$$

Supondo que o termo $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') = 0$, conhecido como calibre de Coulomb (ver uma discussão sobre esse tópico em Ojeda-González, Prestes e Laurindo-Sousa (2016)), a Equação vetorial (1.5) é formada por um sistema de três equações diferenciais das componentes:

$$\begin{cases} \nabla^2 A'_x &= -\mu_0 J_x, \\ \nabla^2 A'_y &= -\mu_0 J_y, \\ \nabla^2 A'_z &= -\mu_0 J_z. \end{cases} \quad (1.6)$$

Trabalha-se com a componente- y , não é mais necessário utilizar o A'_y , de agora em diante $A'_y = A_y$, com isso,

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu_0 J_y. \quad (1.7)$$

É importante mencionar que a Equação (1.7) terá diferentes soluções de acordo com o modelo de J_y escolhido. Uma dessas soluções é obtida a partir da teoria cinética de plasma, utilizando as equações de *Vlasov-Maxwell* (BITTENCOURT, 2004), num plasma confinado por um campo magnético. O problema é simplificado para um caso magnetohidrodinâmico (MHD) ideal com uma função de distribuição de probabilidades como mostrado no trabalho de Kan (1973), Kan (1979). A situação anterior leva ao problema

de estudar as soluções analíticas para um melhor entendimento da morfologia do campo magnético e das lâminas de corrente nestes modelos.

1.4 OBJETIVO GERAL

Utilizar a solução de Walker (WALKER, 1915) para revisar as soluções analíticas da Equação de Grad-Shafranov, e, desta forma, estudar as lâminas de corrente bidimensionais. Analisar as características dos pontos neutros e dos pontos de singularidade nos modelos analíticos. Propor uma nova solução analítica.

1.5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Apresentar a formulação teórica na área de física de plasma necessária para se obter a lei de *Ampère-Maxwell* em função do potencial vetor magnético e da densidade de corrente.
2. Utilizar teoria cinética para se obter o sistema de equações de Vlasov-Maxwell, definir a expressão da função de distribuição e, finalmente, chegar até uma forma específica da equação de GS.
3. Fazer uma revisão detalhada das soluções analíticas obtidas a partir da fórmula proposta por Walker (1915).
4. Obter o campo magnético resultante de cada solução analítica.
5. Analisar os pontos X, O e S de cada solução.
6. Estudar detalhadamente a física na solução obtida a partir da função genérica $g(\zeta) = \sec(ib\zeta)$ e seu respectivo campo magnético.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está estruturado de forma a propor uma construção explícita de toda a teoria e argumentos que serão abordados que facilite ao leitor melhor compreensão da seguinte forma: **Capítulo 2** é apresentada uma formulação teórica na área de física de plasma necessária para obter a lei de Ampère-Maxwell em função do potencial vetor

magnético e da densidade de corrente. Através de algumas considerações na teoria cinética de plasma, se faz uma construção física-matemática para se obter uma forma específica da equação de *Grad-Shafranov*, sendo mostrado, na sequência, como se obter soluções desta equação.

Capítulo 3 apresenta uma revisão detalhada e novas modificações e generalizações de vários modelos analíticos decorrentes de soluções obtidas pela *fórmula de Walker*. Toda a discussão acerca desses modelos tiveram como base inúmeras referências de trabalhos publicados em artigos de consideráveis relevâncias para toda a comunidade científica, dentre essas referências estão as publicações de *Fadeev*, *Kan*, *Manankova* e *Harris*, sendo esta última um modelo tomado como base para a construção de outros tipos de modelos bidimensionais.

Capítulo 4 apresenta uma nova solução para a equação de *Grad-Shafranov*, que é formulada a partir da *fórmula de Walker*, e esta solução decorreu da escolha de uma específica *função geradora* que atenda ou satisfaça algumas condições matemáticas necessárias, como a necessidade da função escolhida ou definida, ser *analítica*.

Por último, no **Capítulo 5**, são apresentadas as conclusões do trabalho.

2 SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV

O objetivo deste capítulo é apresentar uma formulação teórica na área de física de plasma necessária para obter a lei de *Ampère-Maxwell* em função do potencial vetor magnético e da densidade de corrente. A lei de *Ampère-Maxwell* transforma-se em duas novas equações: *i*) na equação de *Grad-Shafranov* (GS), quando a densidade de corrente é definida em função da primeira derivada do potencial vetor magnético e que não tem solução analítica (KHRABROV; SONNERUP, 1998; HAU; SONNERUP, 1999; SONNERUP et al., 2006); *ii*) em uma forma específica da equação de GS, quando a densidade de corrente se escreve em função do exponencial do potencial vetor magnético e que, neste caso, tem solução analítica (KAN, 1979; YOON; LUI, 2005; SONNERUP et al., 2006; OJEDA-GONZALEZ et al., 2015; HU, 2017; OJEDA-GONZÁLEZ, 2018).

A equação de GS, como apresentada no primeiro caso do parágrafo anterior, deriva-se a partir de considerar um plasma como um fluido único, de alta condutividade, imerso num campo magnético, sem colisões e considerando que no interior do mesmo acontecem fenômenos de baixa frequência que permitem uma aproximação magnetostática. A condição de equilíbrio magnetostático define-se a partir da utilização da segunda lei de Newton em uma amostra de plasma estático no qual as forças gravitacional e magnética e o gradiente de pressão encontram-se com aceleração nula. A força gravitacional é desconsiderada por ser muito pequena em relação as outras duas forças. Porém, a equação de equilíbrio magnetostático, que dá início ao desenvolvimento físico-matemático para obtenção da equação de GS, é a seguinte:

$$\nabla p = \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.1)$$

sendo que p define a pressão cinética do plasma, \vec{J} a densidade de corrente e \vec{B} representa o vetor indução magnética. Pode ser encontrado o desenvolvimento detalhado de todo o formalismo matemático no trabalho de Sonnerup et al. (2006) e no apêndice de Ojeda-Gonzalez et al. (2015). O resultado final leva até a expressão da equação de GS:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu_0 \frac{d}{dA_y} \left(p + \frac{B_y^2}{2\mu_0} \right). \quad (2.2)$$

A forma específica da equação de GS tem a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = e^{-2\Psi(X,Z)} \quad (2.3)$$

no qual $\Psi(X, Z)$ define o potencial vetor magnético normalizado (STURROCK, 1994; KHRABROV; SONNERUP, 1998; HAU; SONNERUP, 1999).

2.1 ESPAÇO DE FASE E FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

Num sistema de coordenadas Cartesianas, a posição do centro de massa das partículas é definida pelo vetor posição:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (2.4)$$

cujos elementos de volume é $d^3r = dx dy dz$. Também, define-se a velocidade linear do centro de massa das partículas, a partir da primeira derivada em função do tempo da Equação (2.4), obtendo-se:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \quad (2.5)$$

cujos elementos de volume é $d^3v = dv_x dv_y dv_z$. O elemento de volume permite definir uma função de distribuição ou distribuição de probabilidade, ou seja, a enumeração das probabilidades de todas as possíveis saídas de um determinado evento que aconteça no interior do plasma.

O plasma possui um grande número de partículas com cargas elétricas positivas, negativas e neutras, mas que macroscopicamente fica neutro. Para descrever as propriedades de um número grande de partículas definem-se quantas delas existem por unidade de volume num espaço de seis dimensões chamado de *espaço de fase*, cujo elemento de volume representa-se por:

$$d\vec{r} \cdot d\vec{v} = dx dy dz dv_x dv_y dv_z = d^3r d^3v. \quad (2.6)$$

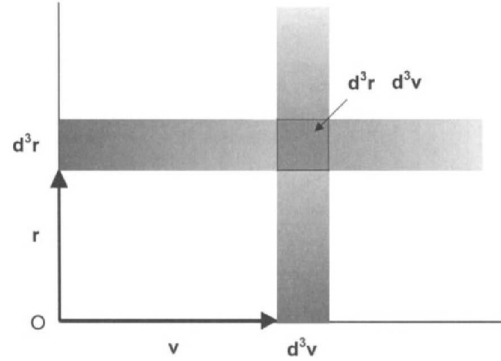
O elemento de volume permite definir uma função de distribuição ou distribuição de probabilidade, ou seja, a enumeração das probabilidades de todas as possíveis saídas de um determinado evento que aconteça no interior do plasma.

É importante ressaltar que do ponto de vista físico, para respeitar os critérios que definem um plasma, o elemento de volume d^3r deve ser: *i)* grande quando comparado com o volume da esfera de Debye com raio λ_D (comprimento de Debye) distância está em que ocorre um equilíbrio entre a energia térmica das partículas, que tende a perturbar a neutralidade elétrica, e a energia potencial eletrostática resultante de qualquer separação de carga, o que tende a restaurar a neutralidade elétrica; *ii)* pequeno com relação à dimensão macroscópica do sistema, definido com a letra L maiúscula. Assim ($\lambda_D < r < L$) garante a neutralidade macroscópica do plasma e que no interior do elemento de volume exista um número significativo de partículas da espécie α .

Em conclusão, as seis coordenadas do *espaço de fase* são (x, y, z, v_x, v_y, v_z) , e seguindo o livro de Bittencourt (2004), a forma mais fácil e didática de representá-lo é num plano bidimensional como mostra a Figura 2.

Após a definição do *espaço de fase*, precisa-se definir uma grandeza física que possibilite representar todas as partículas presentes no interior do plasma. Para isso,

Figura 2 – Representação do *espaço de fase* num plano bidimensional com eixos formados por \vec{r} e \vec{v} . A representação permite visualizar um elemento de volume $d^3r d^3v$ importante para definir uma função de distribuição das partículas no interior do plasma.



Fonte: Bittencourt (2004)

utiliza-se N_α como sendo a quantidade de partículas da espécie ou tipo α na posição \vec{r} , com velocidade \vec{v} no tempo t . Sendo que, $d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é o número de partículas da espécie α que está no interior de um elemento de volume d^3r , com velocidade \vec{v} dentro de d^3v no instante t . E a função de distribuição das partículas da espécie α define-se pela seguinte expressão:

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{d^3r d^3v}, \quad (2.7)$$

para quantificar a densidade de pontos representativos no *espaço de fase*. Do ponto de vista matemático, para ter sentido físico, $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ necessariamente precisará ser contínua, positiva e finita para todo instante t . Sendo que,

$$\lim_{|\vec{v}| \rightarrow \infty} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (2.8)$$

$$\int_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v = 1. \quad (2.9)$$

A função de distribuição, também poderá ter as seguintes propriedades:

Propriedade 2.1.1 *Se f_α depende de \vec{r} o plasma é não-homogêneo. Neste caso, na ausência de uma força externa no decorrer do tempo, as partículas interagem até um estado de equilíbrio térmico. No caso que f_α não dependa da posição do vetor \vec{r} , o plasma considera-se homogêneo.*

Propriedade 2.1.2 *Se no plasma, em qualquer direção a velocidade for a mesma, será chamado de isotrópico, ou seja, f_α somente poderá depender da intensidade do vetor velocidade $v = |\vec{v}|$, caso contrário, se f_α depender da direção de \vec{v} , o plasma é anisotrópico.*

Propriedade 2.1.3 *Um plasma em equilíbrio térmico, por exemplo, é caracterizado por ser homogêneo, isotrópico e independente do tempo.*

Uma vez que se conheça $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$, será possível deduzir todas as magnitudes ou grandezas macroscópicas de interesse físico da espécie α presentes no plasma, o que será o objetivo na seguinte seção.

2.2 GRANDEZAS MACROSCÓPICAS DO PLASMA

A primeira e mais simples grandeza física que se pode definir a partir da função de distribuição $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é a *densidade de partículas com dependência espacial*, representada por $n_\alpha(\vec{r}, t)$ e caracterizada por ser independente da velocidade. Ela representa o número de partículas da espécie α por unidade de volume, podendo ser obtida integrando $d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ sobre todo o espaço de velocidades e dividindo o resultado pelo elemento de volume $d^3 r$, como segue:

$$\begin{aligned} n_\alpha(\vec{r}, t) &= \frac{1}{d^3 r} \int_v d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ &= \int_v \frac{d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{d^3 r} \\ &= \int_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A *Densidade de Partículas* também é chamada de momento de ordem zero.

A segunda grandeza física é a *Velocidade de Fluxo Macroscópica*, também chamada de *Velocidade Média do Plasma*. Esta grandeza é representada por $\vec{v}_\alpha(\vec{r}, t)$ que é a velocidade de fluxo macroscópico do plasma de partículas da espécie α . A fórmula fica definida pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\alpha(\vec{r}, t) &= \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t) d^3 r} \int_v \vec{v} d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ &= \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \int_v \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A *Velocidade Média do Plasma* também é conhecida como momento de primeira ordem.

Seguindo com o raciocínio anterior, é possível obter outras variáveis macroscópicas para a díade de fluxo de momento $\Pi_\alpha(\vec{r}, t)$ (momento de segunda ordem) e para a tríade de fluxo total de energia $\xi_\alpha(\vec{r}, t)$ (momento de terceira ordem). No Capítulo 6 do livro de Bittencourt (2004), define-se uma fórmula genérica para se obter qualquer momento de ordem N como segue:

$$M_{\alpha i j \dots k}^{(N)}(\vec{r}, t) = \int_v v_i v_j \dots v_k f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v. \quad (2.12)$$

Para as deduções físicas apresentadas neste Capítulo, são necessários somente os momentos $n_\alpha(\vec{r}, t)$ e $\vec{v}_\alpha(\vec{r}, t)$. Com as definições anteriores, tem-se todos os ingredientes necessários para definir a equação de Boltzmann.

2.3 EQUAÇÃO DE BOLTZMANN

Para continuar com o raciocínio, é preciso somente dar atenção a uma amostra de partículas idênticas da espécie α dentro do elemento de volume $d^3r d^3v$ no *espaço de fase*, no tempo t . Considera-se que as partículas não interagem entre si, desconsiderando, assim, as interações de curto-alcance responsáveis pelas colisões. Desta maneira, consideram-se somente as interações coulombianas de longo alcance, responsáveis pelo comportamento coletivo do plasma, e que porém serão bem descritas pela Equação de Boltzmann apresentada mais adiante.

No tempo t , as partículas dentro do elemento de volume $d^3r d^3v$ são descritas pela função de distribuição $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Considerando uma pequena variação temporal dt , o sistema de partículas evolui no *espaço de fase* para um novo elemento de volume $d^3r' d^3v'$ com novas coordenadas, isto é, de (\vec{r}, \vec{v}, t) para $(\vec{r}', \vec{v}', t + dt)$. No novo elemento de volume do *espaço de fase*, f_α será descrita em função das novas coordenadas, sendo então definida por $f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt)$. Como foi considerada a ausência de interações internas, pode-se supor que a transição das partículas no *espaço de fase* de um elemento de volume para outro foi possível pela presença de uma força externa \vec{F} . Assim sendo, a variação do vetor posição segue como:

$$\vec{r}'(t + dt) = \vec{r}(t) + \vec{v}dt, \quad (2.13)$$

e a variação do vetor velocidade tem a forma:

$$\vec{v}'(t + dt) = \vec{v}(t) + \vec{a}dt, \quad (2.14)$$

sendo o vetor \vec{a} a aceleração da partícula.

Pela segunda lei de Newton, temos:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_\alpha}, \quad (2.15)$$

sendo m_α a massa da partícula da espécie α . Considerando que não há alterações na quantidade e tipo de partículas de uma determinada espécie nos instantes t e $t + dt$, e que não há colisões entre elas, segue:

$$d^6 N_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) = d^6 N_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (2.16)$$

Sendo necessário que $d^3r' d^3v' = |J| d^3r d^3v$, no qual $|J| = 1$ é o determinante do Jacobi-ano¹, para assim obter a relação da função de distribuição entre os elementos de volume:

¹ ver demonstração na Seção 5.2 do livro de Bittencourt (2004).

$$f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) d^3 r' d^3 v' = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v. \quad (2.17)$$

Da Equação (2.17) segue que,

$$f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) d^3 r' d^3 v' - f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v = 0. \quad (2.18)$$

Utilizando a relação $d^3 r' d^3 v' = d^3 r d^3 v$, pode-se deixar em evidência o termo $d^3 r d^3 v$ na Equação (2.18):

$$[f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) - f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)] d^3 r d^3 v = 0. \quad (2.19)$$

Para prosseguir com o desenvolvimento matemático da Equação (2.19), primeiramente será necessário fazer uma expansão em série de Taylor de $f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt)$ até primeira ordem no tempo t , ou seja, os termos a partir de $(dt)^2$ serão desconsiderados. A expansão em série de Taylor segue a continuação:

$$f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \left[\frac{df_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{dt} \right] dt. \quad (2.20)$$

Utilizando a regra da cadeia no segundo termo da direita da Equação (2.20), segue que,

$$f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} \frac{d\vec{v}}{dt} \right] dt. \quad (2.21)$$

A Equação (2.21) se escreve em função das componente dos vetores \vec{r} e \vec{v} como segue:

$$f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + v_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} \right) + \left(a_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x} + a_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y} + a_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_z} \right) \right] dt. \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.19),

$$\left[f_\alpha + \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + v_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} \right) + \left(a_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x} + a_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y} + a_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_z} \right) \right] dt - f_\alpha \right] d^3 r d^3 v = 0. \quad (2.23)$$

Note que os termos envolvendo f_α se cancelam e que também pode-se reescrever toda a equação em função do operador nabla tanto para \vec{r} ,

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.24)$$

como para \vec{v} ,

$$\nabla_{\vec{v}} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial v_z}. \quad (2.25)$$

Portanto, obteremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{v} \cdot \nabla f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{a} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0. \quad (2.26)$$

A equação (2.26) é chamada *Equação de Boltzmann na ausência de colisões*. Lembrando que a derivada total com respeito ao tempo no espaço de fase é dado pela equação:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla + \vec{a} \cdot \nabla_{\vec{v}}, \quad (2.27)$$

pode-se reescrever a equação de Boltzmann como:

$$\frac{D}{Dt} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0. \quad (2.28)$$

A equação anterior representa um estado de conservação da densidade de pontos, $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, representativos no espaço de fase. Nesta situação, o *teorema de Liouville* pode ser enunciado. Este teorema diz que a quantidade de partículas num determinado instante de tempo t , que estejam contidas no elemento de volume $d^3r d^3v$, continuam estando num instante posterior $t + dt$ em $d^3r' d^3v'$. Isso implica que o Jacobiano $|J|$ entre os elementos de volume no espaço de fase, definido por $d^3r' d^3v' = |J| d^3r d^3v$, seja 1 como foi mencionado no começo da seção. Do ponto de vista físico, o teorema significa que, tanto as colisões, assim como a emissão de energia por radiação e os processos de produção e perda de partículas, tornam-se desprezíveis.

Considerando-se colisões entre as partículas e suas consequências decorrentes, então $d^3r' d^3v' \neq d^3r d^3v$ pois no decorrer do instante dt partículas podem ser perdidas ou ganhas nos respectivos elementos de volume. Isto implica que, o *teorema de Liouville* não é válido para um sistema em que colisões entre as partículas estão presentes. Portanto, a *Equação de Boltzmann para colisões* ficará:

$$\frac{D}{Dt} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \left(\frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} \right)_{coll}, \quad (2.29)$$

o termo que denota colisões na equação é $\left(\frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} \right)_{coll}$. De acordo com Bittencourt (2004), alguns modelos para o termo de colisão são:

- Modelo de *Krook* ou *relaxation model* (o mais simples);
- *Boltzman Collision Integral*;
- *Fokker-Planck collision term*.

A *Equação de Boltzmann sem colisões* se escreve em função da força resultante que atua sobre o plasma para obter a *Equação de Vlasov*.

2.4 EQUAÇÃO DE VLASOV

Retornando à *equação de Boltzmann sem colisões*, e à força total que pode ser utilizada na expressão da aceleração conforme a segunda lei de *Newton*, a Equação (2.26) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{\vec{F}_{total}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0, \quad (2.30)$$

no qual \vec{F}_{total} é a soma das forças externas com as forças internas, tal que essas forças internas decorrem dos campos eletromagnéticos internos \vec{E}_i e \vec{B}_i , resultantes do movimento entre as partículas e que formam a força de *Lorentz*. Substituindo a força externa e a força de *Lorentz* em (2.30), teremos que:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \left[\vec{F}_{ext} + q_\alpha \left(\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i \right) \right] \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0, \quad (2.31)$$

chamada de *equação de Vlasov*, sendo que os campos \vec{E}_i e \vec{B}_i devem satisfazer as leis de *Maxwell*. Com o intuito de simplificar a notação, de agora em diante, utilizaremos $\vec{E}_i = \vec{E}$ e $\vec{B}_i = \vec{B}$.

Para resolver a equação- (2.31), são necessárias a densidade de carga $\rho(\vec{r}, t)$, da densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ e das equações de *Maxwell*, todas elas devem ser resolvidas de uma maneira auto-consistente.

2.5 POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO NAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Para poder definir uma forma analítica de $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$, precisa-se introduzir o uso do potencial vetor magnético nas equações (1.1), (1.2), (1.3), (1.4). A equação (1.4) diz que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, e isto nos permite definir um potencial vetor magnético \vec{A} ,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \implies \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0, \quad (2.32)$$

e pela lei de Faraday temos:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.33)$$

ou seja:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.34)$$

Considerando a identidade matemática $\nabla \times (\nabla C(r)) = 0$, pode-se definir o potencial $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ como sendo o gradiente de uma função escalar $\phi(\vec{r})$, assim:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi, \quad (2.35)$$

sendo que, o campo elétrico fica definido em função do potencial eletrostático e do potencial vetor magnético como segue:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \quad (2.36)$$

Novamente, das equações de Maxwell teremos que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (2.37)$$

e utilizando (2.32),

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (2.38)$$

Usando uma identidade vetorial, teremos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (2.39)$$

Na análise que segue, considera-se um sistema 2,5-D, em que se analisa as variações de uma quantidade física em apenas uma direção, mas esta quantidade pode depender das outras duas variáveis do sistema em estudo. Ou seja, considera-se o eixo y invariante, e nenhuma das grandezas físicas envolvidas no problema dependerão dele, e as respectivas derivadas parciais serão nulas nessa direção. A invariância em um dos eixos de coordenada Cartesiana é uma condição imposta para reduzir a análise matemática do problema, e que vai possibilitar obter uma forma simplificada da equação de GS. Uma explicação detalhada das implicações físicas da condição $\partial/\partial y = 0$ foi discutida no trabalho de Ojeda-González, Prestes e Laurindo-Sousa (2016).

Na Equação (2.39), se o termo $\nabla \cdot \vec{A}$ fosse nulo, facilitaria os cálculos. Isto será possível pela *Liberdade de Calibre de Coulomb*, no entanto, pelo fato de considerar a condição $\partial/\partial y = 0$, segundo Ojeda-González, Prestes e Laurindo-Sousa (2016), não será necessário usar este artifício. O resultado é que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, portanto:

$$\nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (2.40)$$

A implicação geométrica da invariância em y é que as grandezas macroscópicas do sistema somente dependerão de x e z . Conseqüentemente, \vec{E} e \vec{J} estarão na direção y . Poderíamos escrever a equação (2.40) em suas três componentes, adotamos um sistema de coordenadas que futuramente, talvez, possibilite fazer comparações com um corte meridional da magnetocauda (KAN, 1973; MANANKOVA, 2003).

$$\left(\frac{\partial^2 A_y(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y(x, z)}{\partial z^2} \right) = -\mu_0 \left(J_y + \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right), \quad (2.41)$$

O resultado é a equação generalizada de *Ampère-Maxwell*:

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 \left(J_y + \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right), \quad (2.42)$$

que se utiliza como ponto de partida para obter a equação de GS. Em uma situação magnetostática ($\partial/\partial t = 0$), a Equação (2.42) possui a mesma forma que a equação de *Poisson* da eletrostática, e por analogia, concluímos que A_y pode ser calculado através da seguinte equação:

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{J_y(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.43)$$

Do ponto de vista geométrico os vetores \vec{A} e \vec{J} estão orientados na mesma direção.

2.6 FORMA ANALÍTICA DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

Para obter uma expressão de A_y em (2.43) que seja solução de (2.42) é necessário encontrar uma expressão de J_y expressa como uma função exponencial. Desta maneira (2.42) se tornará semelhante à equação encontrada por Liouville em 1853 (SCHINDLER, 2006), em que será possível encontrar, em teoria, infinitas soluções (YOON; LUI, 2005). Fisicamente falando, a maneira mais elegante de fazer o raciocínio anterior é resolvendo o sistema de equações de Vlasov-Maxwell escolhendo uma função de distribuição que se ajuste às propriedades do plasma em estudo.

Neste trabalho considera-se um plasma numa situação ideal em equilíbrio magnetostático. Sendo este um sistema $2,5 - D$, ou seja, existe componente do campo em y mas as grandezas físicas envolvidas no problema somente dependem das variáveis x e z (OJEDA-GONZÁLEZ; PRESTES; Laurindo-Sousa, 2016). Nesta configuração, a corrente elétrica, o campo elétrico e o vetor potencial estão predominantemente na direção de y . O interessante deste problema é que a solução do sistema de equações de Vlasov-Maxwell, nesta situação ideal, terá como resultado a obtenção de lâminas de corrente bidimensional transversal ao plano xz . Sendo esta uma situação que permitirá fazer modelos analíticos de lâminas de corrente para realizar estudos na magnetocauda, como feito por (KAN, 1973; FADEEV; KVABTSKHAVA; KOMAROV, 1965; LAURINDO-SOUSA et al., 2018).

Para iniciar o desenvolvimento do problema, reescrevemos (2.10) e (2.11) para definir as densidades de carga e de corrente como segue:

$$\rho(x, z, t = 0) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(x, z) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \left[\int_v f_{\alpha}(x, z, \vec{v}) d^3v \right] \quad (2.44)$$

e

$$\vec{J}(x, z, t = 0) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(x, z) \vec{v}_{\alpha}(x, z) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \left[\int_v \vec{v} f_{\alpha}(x, z, \vec{v}) d^3v \right]. \quad (2.45)$$

O plasma considerado neste problema é pouco denso e frio, perto de não existir colisões. Sendo assim, se considera nula a força externa na *equação de Vlasov* (ver (2.31)). Supõe-se para efeito de cálculo que não há variações temporais, isto implica que $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$. Com as considerações anteriores, o sistema de equações de Vlasov-Maxwell é formado por três equações, isto é,

$$\vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \left[q_\alpha \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \right] \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0, \quad (2.46)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_\alpha \left[\int_{\vec{v}} f_\alpha(x, z, \vec{v}) d^3v \right], \quad (2.47)$$

e

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \sum_{\alpha} q_\alpha \left[\int_{\vec{v}} \vec{v} f_\alpha(x, z, \vec{v}) d^3v \right]. \quad (2.48)$$

Em termodinâmica, num sistema com múltiplos estados em equilíbrio termodinâmico, é utilizado um fator de ponderação para determinar a probabilidade relativa de um estado i . O fator de ponderação recebe o nome de *fator de Boltzmann*, que em si mesmo não é uma probabilidade porque não está normalizado. Dividindo o *fator de Boltzmann* pela probabilidade de todos os estados possíveis do sistema, se obtém a distribuição de Boltzmann. Esse fator relaciona a energia do estado i (Ω_i) com a energia térmica do sistema por meio da expressão $\exp[-\Omega_i/k_B T]$, sendo k_B a constante de Boltzmann e T a temperatura. Utilizando o *fator de Boltzmann* pode-se desenvolver a estatística de *Maxwell-Boltzmann*, a qual considera que, num plasma em equilíbrio termodinâmico, as partículas da espécie α são caracterizadas por uma função contínua de velocidades dada pela seguinte expressão:

$$f_\alpha(v_x, v_y, v_z) = f_\alpha(\vec{v}) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_\alpha}{2k_B T_\alpha} \vec{v}^2 \right]. \quad (2.49)$$

Sendo que o numerador do *fator de Boltzmann* é a energia cinética total das partículas (K_α). A equação (2.49) satisfaz a condição de normalização:

$$\int_{\vec{v}} f_\alpha(\vec{v}) d^3v = 1. \quad (2.50)$$

A Equação (2.49), assim como se apresenta, depende apenas do módulo da velocidade. Não depende da posição \vec{r} , que poderá ser introduzida usando o *fator de Boltzmann* para definir uma função de distribuição espacial da densidade de partículas $n_\alpha(x, z)$. Isto é,

$$n_\alpha(\vec{r}) = n_{0_\alpha} \exp \left[\pm \frac{V_\alpha(\vec{r})}{k_B T_\alpha} \right], \quad (2.51)$$

em que n_{0_α} é a densidade total de partículas no interior de uma esfera de raio r . Note que o numerador do argumento da exponencial no *fator de Boltzmann*, será uma função que depende apenas da energia potencial total das partículas ($V_\alpha(x, z)$).

Voltando ao problema inicial, representado pela função de distribuição $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$, podemos utilizar um método de separação de variáveis como segue:

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_\alpha(\vec{r}, t) f_\alpha(\vec{v}, t). \quad (2.52)$$

Segundo Harris (1962) e posteriormente usado nos trabalhos de Kan (1973), Kan (1979), Yoon e Lui (2005), para se obter uma expressão final de (2.52), ainda acrescentam-se duas considerações: *i*) os íons positivos se movimentam com uma velocidade de deriva U_i no sentido positivo do eixo y e os elétrons com velocidade U_e no sentido oposto, mas para manter a mesma notação, ela aparecerá nas equações como U_α ; *ii*) a função de distribuição para satisfazer o sistema de equações de Vlasov-Maxwell deverá depender de constantes de movimento, ou seja da Hamiltoniana (H) e do momento Canônico \vec{p} . Logo, a dependência funcional em (2.52) passará a ser $f_\alpha(x, z, \vec{v}) = f_\alpha(H, p_y)$.

Fazendo uma revisão da Mecânica Clássica, definem-se coordenadas canônicas como sendo p_i e q_i . Estas coordenadas estão relacionadas por meio da Lagrangeana $L(q_i, q'_i, t)$, sendo $p_i = \partial L / \partial q'_i$. Define-se a Hamiltoniana a partir da equação $H = \sum_i [p_i q'_i] - L$.

Considerando a força de Lorentz:

$$\vec{F}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}) = q_\alpha \left[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right], \quad (2.53)$$

a Lagrangeana relacionada com esta força é

$$L_\alpha(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}^2 + q_\alpha \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - q_\alpha \phi(\vec{r}), \quad (2.54)$$

na qual $\phi(\vec{r})$ é o potencial elétrico. O momento canônico desta Lagrangiana define-se como:

$$\vec{p}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}) = m_\alpha \vec{v} + q_\alpha \vec{A}(\vec{r}). \quad (2.55)$$

Logo, a partir de (2.54) e (2.55), considerando a velocidade de deriva (U_α) em y , que surge como consequência da geometria aqui adotada, pois terá um gradiente de campo magnético (∇B_y) sempre contido no plano xz e majoritariamente direcionado ao longo de z , o resultado de (2.52) ficará:

$$f_\alpha(x, z, \vec{v}) = n_{0\alpha} \exp \left[-\frac{q_\alpha \phi(\vec{r}) - q_\alpha U_\alpha A_y(x, z)}{k_B T_\alpha} \right] \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_\alpha}{2k_B T_\alpha} [v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2 + v_z^2] \right]. \quad (2.56)$$

Fazendo alguns ajustes algébricos no argumento do exponencial, teremos,

$$f_\alpha(x, z, \vec{v}) = n_{0\alpha} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{-m_\alpha}{2k_B T_\alpha} (v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2 + v_z^2) - \frac{q_\alpha \phi - q_\alpha U_\alpha A_y}{k_B T_\alpha} \right]. \quad (2.57)$$

A Equação (2.57) é a expressão final da forma analítica da função de distribuição que será utilizada no sistema de equações de *Vlasov-Maxwell* para se obter uma forma específica da equação de GS.

2.7 OBTENÇÃO DE UMA FORMA ESPECÍFICA DA EQUAÇÃO DE GS

Substituindo $f_j(x, z, \vec{v})$ (representada em (2.57)) em (2.48), teremos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{0\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k_B T_{\alpha}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\int_v \left[v_y \exp \left(\frac{-m_{\alpha}}{2k_B T_{\alpha}} (v_x^2 + (v_y - U_{\alpha})^2 + v_z^2) - \Theta \right) \right] d^3v, \end{aligned} \quad (2.58)$$

para reduzir a expressão foi considerado que $\Theta = \frac{q_{\alpha}\phi - q_{\alpha}U_{\alpha}A_y}{k_B T_{\alpha}}$.

Aplicando a propriedade $\exp[A+B] = \exp[A]\exp[B]$ no termo da direita de (2.58) com U_{α} constante e considerando que o potencial A_y é constante por y não variar, resta somente três integrais a serem resolvidas que ficam da forma:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{m_{\alpha}v_x^2}{2k_B T_{\alpha}} \right] dv_x, \quad (2.59)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} v_y \exp \left[-\frac{m_{\alpha}(v_y - U_{\alpha})^2}{2k_B T_{\alpha}} \right] dv_y, \quad (2.60)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{m_{\alpha}v_z^2}{2k_B T_{\alpha}} \right] dv_z. \quad (2.61)$$

Elas podem ser resolvidas utilizando a propriedade matemática:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) dx = \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.62)$$

Portanto as integrais ficarão da forma:

$$I_1 = I_3 = \left(\frac{\pi}{\frac{m_{\alpha}}{2k_B T_{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\pi k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.63)$$

$$I_2 = U_{\alpha} \left(\frac{\pi}{\frac{m_{\alpha}}{2k_B T_{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{2}} = U_{\alpha} \left(\frac{2\pi k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.64)$$

logo, substituindo o resultado de I_1 , I_2 e I_3 em (2.58), a expressão de J_y ficará:

$$J_y(x, z) = \sum_{\alpha} n_{0\alpha} q_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k_B T_{\alpha}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2\pi k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(U_{\alpha} \frac{2\pi k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp[-\Theta] \quad (2.65)$$

e utilizando a propriedade matemática de multiplicação de potências de mesma base:

$$J_y(x, z) = \sum_{\alpha} n_{0\alpha} q_{\alpha} U_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k_B T_{\alpha}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2\pi k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp[-\Theta]. \quad (2.66)$$

Perceba que, em (2.66), temos dois termos que podem ser simplificados, portanto:

$$J_y(x, z) = \sum_{\alpha} n_{0\alpha} q_{\alpha} U_{\alpha} \exp[-\Theta]. \quad (2.67)$$

Assim, a expressão $\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$ ficará da seguinte forma:

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 \sum_{\alpha} n_{0\alpha} q_{\alpha} U_{\alpha} \exp[-\Theta]. \quad (2.68)$$

Para continuar com o raciocínio, substitui-se (2.57) em (2.47), isto é,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{0\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k_B T_{\alpha}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\int_v \left[\exp \left(\frac{-m_{\alpha}}{2k_B T_{\alpha}} (v_x^2 + (v_y - U_{\alpha})^2 + v_z^2) - \Theta \right) \right] d^3v, \end{aligned} \quad (2.69)$$

O resultado das integrais dentro do argumento do somatório é o mesmo apresentado para resolver (2.58), porém o resultado será:

$$\rho(x, z) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{0\alpha} \exp[-\Theta] \quad (2.70)$$

Expandindo o somatório para os dois tipos α de partículas, sendo i de íons e e de elétrons:

$$\rho(x, z) = q_i n_{0i} \exp[-\Theta_i] - q_e n_{0e} \exp[-\Theta_e], \quad (2.71)$$

em que foi atribuída carga negativa ao elétron.

Utilizando a propriedade de neutralidade macroscópica do plasma, fica evidente que $\rho(x, z)$ precisará se anular, mas isso somente será possível quando são satisfeitas as seguintes condições:

$$|q_i| = |q_e| = q, \quad (2.72)$$

$$n_{0i} = n_{0e} = n_0, \quad (2.73)$$

$$\frac{U_i}{T_i} = -\frac{U_e}{T_e}, \quad (2.74)$$

$$\phi(x, z) = 0. \quad (2.75)$$

Logo, retornando na Equação (2.68) com essas condições, teremos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_y &= -\mu_0 q n_0 \left(\frac{U_i k_B T_i}{k_B T_i} - \frac{U_e k_B T_e}{k_B T_e} \right) \exp \left[\frac{q U_i}{k_B T_i} A_y \right] \\ &= -2\mu_0 q n_0 k_B (T_i + T_e) \frac{q U_i}{2k_B T_i} \exp \left[\frac{q U_i}{k_B T_i} A_y \right].\end{aligned}\quad (2.76)$$

Introduzindo duas constantes: $B_0^2 = 2\mu_0 n_0 k_B (T_i + T_e)$, que é o campo magnético assintótico e $L = \frac{2k_B T_i}{q U_i B_0}$, a Equação (2.76) fica:

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_y &= -B_0 \frac{1}{\frac{2T_i k_B}{q U_i B_0}} \exp \left[\frac{q B_0 U_i}{2k_B T_i} \frac{2A_y}{B_0} \right] \\ &= -\frac{B_0}{L} \exp \left[\frac{1}{L} \frac{2A_y}{B_0} \right] \\ &= -\frac{B_0}{L} \exp [-2\Psi],\end{aligned}\quad (2.77)$$

sendo $\Psi = -\frac{A_y}{LB_0}$. Portanto:

$$\nabla^2 A_y = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (-LB_0 \Psi) = -\frac{B_0}{L} \exp [-2\Psi].\quad (2.78)$$

Fazendo ajustes algébricos, teremos

$$\nabla^2 A_y = \left(\frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{x}{L}\right)^2} + \frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{z}{L}\right)^2} \right) \Psi = \exp [-2\Psi].\quad (2.79)$$

Introduzindo novas variáveis que não possuem dimensões: $\frac{x}{L} = X$ e $\frac{z}{L} = Z$, teremos:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = \exp [-2\Psi].\quad (2.80)$$

Sendo que,

$$J_y(X, Z) = \frac{B_0}{L\mu_0} \exp (-2\Psi).\quad (2.81)$$

A expressão $\nabla^2 \Psi = \exp[-2\Psi]$ é chamada de forma específica da Equação de GS, como foi apresentada em (2.3). Perceba que encontrando-se o valor de Ψ em (2.80), será possível determinar J_y de (2.81). A solução analítica da forma específica da Equação de GS será abordada na próxima seção.

2.8 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A Equação (2.80) é uma equação diferencial parcial (PDE) não-linear de segunda ordem conhecida como equação de Liouville (dependendo do contexto, às vezes, também é chamada de equação de Liouville-Bratu-Gelfand) (SCHINDLER, 2006), mas que também é chamada de equação de GS (ver Yoon e Lui (2005)). Para o caso bidimensional a solução

geral foi obtida por Liouville em 1853 (BISKAMP, 1986; SCHINDLER, 2006). De forma independente, a mesma solução foi apresentada por Walker (1915) com uma aplicação na Astrofísica. Dependendo da área do conhecimento (YOON; LUI, 2005; MANANKOVA; PUDOVKIN, 1996; MANANKOVA; PUDOVKIN, 1999; MANANKOVA; PUDOVKIN; RUNOV, 2000; MANANKOVA, 2003; KOROVINSKIY et al., 2018), a solução no contexto da teoria das funções de variável complexa é chamada de solução de Walker. Ele obteve uma função geradora $g(\zeta)$, sendo $\zeta = X + iZ$, que permite estudar uma variedade de soluções e modelos de lâminas de corrente. Essa solução é,

$$\exp[-2\Psi] = \frac{4|g'(\zeta)|^2}{(1 + |g(\zeta)|^2)^2}. \quad (2.82)$$

No Capítulo 3, explica-se, por meio de exemplos de funções geradoras existentes na literatura, como utilizar (2.82) para obter uma variedade de soluções de (2.80).

2.9 SINGULARIDADES NA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Analisar os pontos singulares e zeros das soluções de (2.80) é muito importante porque eles estão relacionados com a morfologia do campo magnético. Essa morfologia é responsável pelo deslocamento de partículas no interior do plasma e pela existência de regiões de máximo e mínimo da densidade de corrente e que também podem estar relacionados com lâminas de corrente. Um método para obter diretamente os pontos singulares a partir da função geradora foi apresentado por GÉNOT (2005). No método de Génov, a Equação (2.3) escreve-se da seguinte maneira:

$$\Delta\Psi = -\Delta\ln[|g'(\zeta)|] + \frac{4|g'(\zeta)|^2}{[1 + |g(\zeta)|^2]^2}, \quad (2.83)$$

no qual $\Delta = \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Z^2 = 4\partial^2/\partial\zeta\partial\zeta^*$ representa o Laplaciano. Os zeros e polos da função $g'(\zeta)$ correspondem aos pontos singulares da solução $\Psi(X, Z)$. Para qualquer que seja a função geradora $g(\zeta)$, temos que:

$$\Delta\ln|g'(\zeta)| = 0. \quad (2.84)$$

Portanto, (2.84) implica que sempre a equação (2.83) se reduz em (2.80).

Recentemente, o orientador deste trabalho e colaboradores submeteram um artigo no qual são redefinidos os pontos de singularidade em duas categorias, (a) os polos de $|g'(\zeta)| = 0$ foram chamados pontos de singularidade tipo- S_1 , (b) os zeros foram chamados pontos tipo- S_2 . Sendo que a densidade de corrente (J_y) é infinita no ponto S_2 e zero em S_1 .

No próximo capítulo será realizada uma revisão de soluções analíticas da Equação (2.80).

3 REVISÃO DE MODELOS ANALÍTICOS

Neste capítulo, serão apresentadas soluções de *Grad-Shafranov* pela fórmula de *Walker* (WALKER, 1915). Por ser uma *Equação Diferencial*¹, será necessário utilizar métodos matemáticos para determinar a solução desta equação. Ou seja, consiste em achar valores para uma expressão de Ψ , isto dependerá da definição de uma específica *função geradora*².

A função geradora precisa necessariamente estar em variável complexa, pois a fórmula de *Walker* é definida em variáveis complexas. Em consequência, a teoria de *funções analíticas*, que é abordada por Churchill e Brown (1984), será crucial para a obtenção de um determinado valor esperado para Ψ .

Uma função analítica é uma função que pode ser localmente expandida em *séries de Taylor* em torno de um determinado ponto (CHURCHILL; BROWN, 1984). As condições de *Cauchy-Riemann* são necessárias para se verificar se uma determinada função é analítica, mas essas condições não são suficientes. Walker (1915), utilizando esses conceitos matemáticos, formulou (2.82). Pode-se escolher infinitos tipos de expressões matemáticas para $g(\zeta)$, mas, segundo Yoon e Lui (2005), nem todas terão um significado físico esperado.

O interesse em uma expressão exata ou aproximada para Ψ , tem como finalidade essencial a determinação da geometria do campo magnético específico para cada tipo de solução. Segundo Priest e Forbes (2000), as componentes do campo magnéticos são definidas em função de uma solução encontrada de (2.82) a partir de uma $g(\zeta)$ escolhida.

As componentes em 2-D são definidas como:

$$B_x = B_0 \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad (3.1)$$

$$B_z = -B_0 \frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad (3.2)$$

sendo B_0 uma constante.

As lâminas de corrente são regiões importantes, pois são locais de energização de partículas, e também são frequentes limites entre plasmas com propriedades diferentes. Em uma extensa gama bibliográfica, é enfatizado que, nessas lâminas de corrente o campo magnético é pequeno, e a mudança de direção das partículas pode ser grande e o campo

¹ Ela possibilita a determinação de uma função incógnita dentro de uma expressão que envolva suas derivadas (G.ZILL; CULLEN., 2000).

² É uma série cujos coeficientes codificam informações sobre uma sucessão a_n .

elétrico pode conseqüentemente desempenhar um papel dominante no movimento das partículas (BRITTNACHER; WHIPPLE, 2002).

Observou-se que tudo isto ocorre especialmente em pontos neutros ou linhas neutras, no qual o campo magnético se anula. Isto direcionou a atenção dos cientistas nestas regiões como possíveis locais para transformação de energia magnética em energia cinética de partículas, através do mecanismo de reconexão magnética (HUGHES, 1995; CHIAN; MUÑOZ, 2011; PRIEST; FORBES, 2000; PHAN et al., 2018; MASUDA et al., 1994; INNES et al., 1997; GOSLING et al., 2005; GOSLING et al., 2007; PHAN et al., 2006; Li, 2008; FORBES; ACTON, 1996).

Já houve diferentes abordagens para a teoria de lâminas de corrente, a mais citada e utilizada foi a solução analítica de Harris (1962) em uma dimensão (1-D), esse trabalho tem sido a base para vários estudos complementares. Harris explorou o fato de que qualquer função das constantes do movimento $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v})$ é uma solução de (2.31).

Kan (1973) mostrou como obter soluções em 2-D usando as formulações de Harris (1962) e empregando um esquema sugerido por Walker (1915), Benford e Book (1971), mas por conta de algumas características que não possuem significados físicos, não houve muita aplicação em situações reais, como a aplicação magnetosférica.

Os modelos bidimensionais devem ser especialmente úteis em várias aplicações na física espacial, uma delas é a aplicação desses para validar o método numérico da equação de Grad-Shafranov utilizado para reconstruir cortes transversais de tubos magnéticos na magnetosfera e no vento solar a partir de dados de satélite (SONNERUP; GUO, 1996; HAU; SONNERUP, 1999; HU; SONNERUP, 2001; HU et al., 2004; HU, 2017).

3.1 MODELO DE FADEEV

O modelo em que Fadeev, Kvabtskhava e Komarov (1965) foram os precursores, é obtido utilizando a seguinte função geradora:

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{1 + f_p^2 e^{i\zeta}}, \quad (3.3)$$

supondo-a como a função, que necessariamente precisará ser usada na fórmula de Walker (2.82), para que se ache o valor das componentes do campo magnético e o valor de sua densidade de corrente, conforme (3.1), (3.2) e (2.81), que será solução de (2.80), abordada no Capítulo anterior.

Esse modelo representa um ciclo infinito de ilhas magnéticas ao redor de pontos tipo- O acima do eixo- X do plano Cartesiano. Ainda no eixo- X , entre cada par de ilhas magnéticas, encontra-se um ponto tipo- X onde o campo magnético é nulo. Esta estrutura de densidade de corrente filamentada, ou seja, com valor máximo no centro de cada ilha magnética, poderão ser observadas no esboço da solução Ψ .

O tamanho das ilhas será definido conforme um valor estipulado para f_p (YOON; LUI, 2005). O módulo ao quadrado da função (3.3) e de sua respectiva derivada, serão necessários para o desenvolvimento dos cálculos. Portanto, segue os referentes termos para serem substituídos em (2.82):

$$g'(\zeta) = f_p + \sqrt{(1 + f_p^2)}e^{i\zeta} = \left(i\sqrt{(1 + f_p^2)} \right) e^{i\zeta}, \quad (3.4)$$

o módulo ao quadrado da derivada de (3.4) será:

$$|g'(\zeta)|^2 = \left(\sqrt{(1 + f_p^2)}e^{-Z} \right)^2. \quad (3.5)$$

Fazendo o módulo ao quadrado de (3.3):

$$|g(\zeta)|^2 = f_p^2 + 2f_p\sqrt{(1 + f_p^2)}e^{(-Z)} \cos(X) + (1 + f_p^2)e^{(-2Z)}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em (2.82):

$$e^{-2\Psi} = \frac{4 \left(\sqrt{(1 + f_p^2)}e^{-Z} \right)^2}{\left(1 + f_p^2 + 2f_p\sqrt{(1 + f_p^2)}e^{(-Z)} \cos(X) + (1 + f_p^2)e^{(-2Z)} \right)^2}. \quad (3.7)$$

Passando o ln e dividindo por -2 respectivamente nos dois lados de (3.7) e simplificando-a, o resultado esperado será:

$$\Psi = \ln \left(f_p \cos X + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh Z \right), \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.1) e (3.2), as componentes necessárias para verificarmos o campo magnético dessa solução, logo:

$$B_x = \frac{B_0 \sqrt{1 + f_p^2} \sinh(Z)}{f_p \cos(X) + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh(Z)}, \quad (3.9)$$

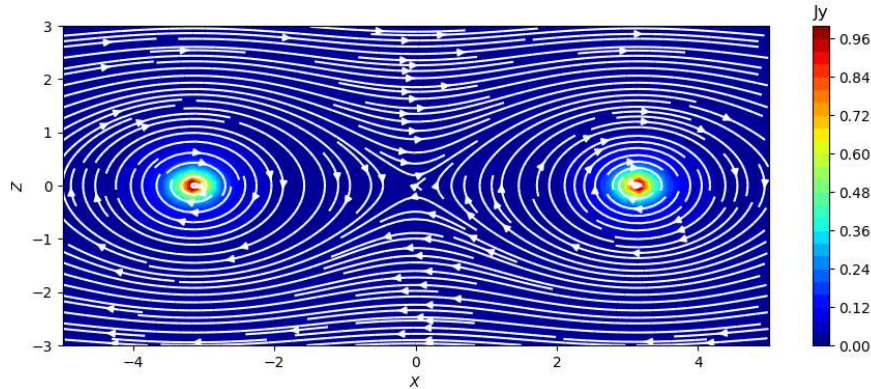
$$B_z = \frac{B_0 f_p \sin(X)}{f_p \cos(X) + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh(Z)}. \quad (3.10)$$

No Capítulo 2, vimos que para determinar o valor da densidade de corrente J_y basta utilizar (2.81) (GRAD; RUBIN, 1956), segue que:

$$J_y = \frac{B_0}{L\mu_0 \left(f_p \cos(X) + \sqrt{(1 + f_p^2)} \cosh(Z) \right)^2}. \quad (3.11)$$

A Figura 3 mostra a plotagem de $\vec{B}_{xy} = B_x \hat{i} + B_z \hat{k}$ (em Tesla) em função das variáveis adimensionais X e Z . Este tipo de figura permite visualizar a direção e sentido

Figura 3 – Configuração do campo magnético juntamente com a densidade de corrente normalizada em 2D no modelo de Fadeev. As linhas brancas representam a configuração do campo magnético com o sentido das linhas anti-paralelas. Note que no ponto $(0, 0)$ o valor do campo magnético tende a 0, caracterizando assim o ponto X ou ponto neutro. Em torno dele, é possível ver os pontos O ou ilhas magnéticas caracterizadas pela geometria elíptica do campo. A Densidade de corrente é caracterizada pela barra, ficará cada vez mais intensa a medida que a cor fica vermelha.



Fonte: o autor.

das linhas de campo magnético, permitindo identificar claramente as ilhas magnéticas e o ponto X localizado na origem. A figura anterior foi superposta com o módulo de J_y em unidades de A/m^2 , a intensidade de J_y é caracterizada pela barra, no qual ficará cada vez mais intensa a medida que a cor fica vermelha. A densidade de corrente é máxima no interior das ilhas magnéticas. Para realizar os cálculos dos valores mostrados na figura, foram utilizados os valores $B_0 = 49,15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, $f_p = 0,5$ e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m) característicos da magnetocauda, segundo o trabalho de Kan (1973). No entanto, todos os valores dos gráficos, que serão mostrados neste capítulo, estarão normalizados entre 0 e 1.

3.2 MODELO DE KAN

No modelo original de Kan (1973), o autor empregou dois parâmetros ajustáveis, mas é essencialmente um modelo de um parâmetro. A função geradora da solução *Kan* é:

$$g(\zeta) = e^{i\zeta - \frac{ib}{\xi}}. \quad (3.12)$$

Quando essa função geradora foi proposta em sua publicação original (KAN, 1973), o denominador dentro do argumento da função exponencial no lado direito, é substituído por $\xi = \zeta - a$. Entretanto, o parâmetro a desloca toda a solução ao longo do eixo X .

Como Kan aplicou sua solução somente em um *domínio*³ restrito 2-D, vamos trabalhar com $a = 0$ e, assim, limitando a aplicabilidade das soluções de acordo com a intenção original de Kan, também seguindo a sugestão de Yoon e Lui (2005).

Os procedimentos matemáticos utilizados para se achar as devidas expressões decorrentes de $g(\zeta)$ para utilizar em (2.82), serão feitos a seguir. Neste caso, a função geradora está definida por (3.12), logo:

$$g'(\zeta) = \left(i + \frac{ib}{\zeta^2} \right) g(\zeta). \quad (3.13)$$

Implicando que o módulo ao quadrado de (3.13) será:

$$|g'(\zeta)|^2 = \left| i + \frac{ib}{\zeta^2} \right|^2 |g(\zeta)|^2. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (2.82) temos:

$$\Psi = \ln \left[\frac{|g(\zeta)|^{-1} + |g(\zeta)|}{2} \frac{1}{\left| i + \frac{ib}{(\zeta-a)^2} \right|} \right]. \quad (3.15)$$

Em que a solução é:

$$\Psi = \ln \frac{\cosh \left(Z \left(1 + \frac{b}{R^2} \right) \right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{b}{R^2} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4}}}, \quad R^2 = X^2 + Z^2. \quad (3.16)$$

Observação 3.2.1 No trabalho de Laurindo-Sousa (2018) é possível ver o desenvolvimento matemático de (3.15) até (3.16).

Substituindo (3.16) em (3.1), (3.2) e (2.81) temos:

$$B_x = \frac{B_0 \left((b(X^2 - Z^2) + R^4) \tanh \left(Z \left(1 + \frac{b}{R^2} \right) \right) + \frac{2bZR^2(b+3X^2-Z^2)}{2Z^2(X^2-b)+(b+X^2)^2+Z^4} \right)}{R^4}, \quad (3.17)$$

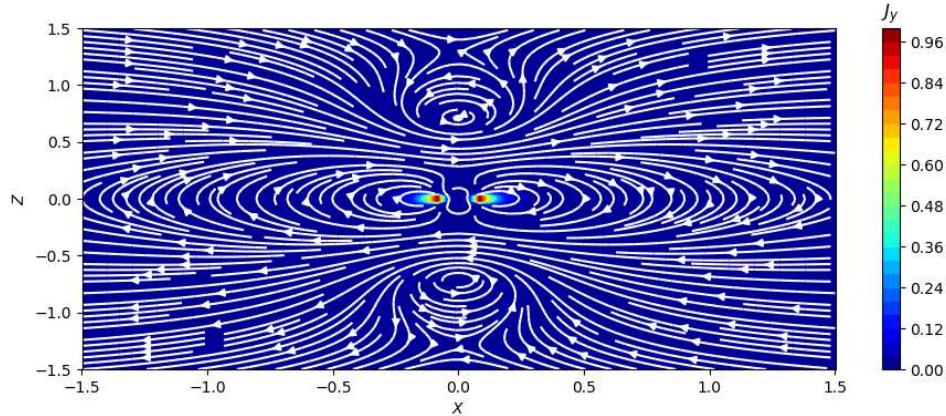
$$B_z = \frac{2bB_0 \left(Z \tanh \left(Z \left(1 + \frac{b}{R^2} \right) \right) - \frac{R^2(b+X^2-3Z^2)}{2Z^2(X^2-b)+(b+X^2)^2+Z^4} \right)}{R^4}, \quad (3.18)$$

e

$$J_y = \frac{B_0 \left(\left(1 + \frac{b}{R^2} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R^4} \right) \operatorname{sech}^2 \left(Z \left(1 + \frac{b}{R^2} \right) \right)}{L\mu_0}. \quad (3.19)$$

³ É um conjunto de possíveis valores que uma determinada função possa ser definida (LIMA, 1989).

Figura 4 – Configuração do campo magnético juntamente com a densidade de corrente normalizada em 2D, no eixo Z há um par de pontos singulares em torno da origem do modelo de Kan com $b = 0,5$.



Fonte: o autor.

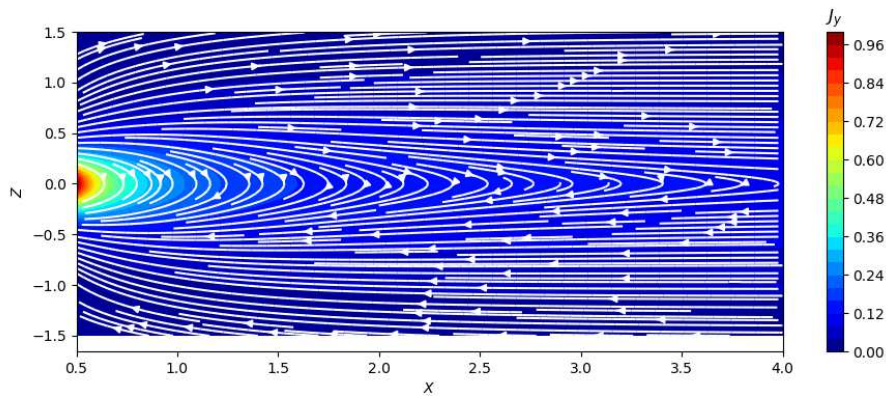
Na Figura 4, o tipo de gráfico é o mesmo utilizado na solução de Fadeev. Neste caso o gráfico é mostrado para $b = 0,5$ com os mesmos valores de B_0 , L e μ_0 utilizados na Figura 3. O esboço desse modelo foi feito intencionalmente perto da origem do plano XZ , para se destacar a estrutura das linhas de campo magnético e o valor de J_y perto da origem $(0, 0)$. O campo magnético apresenta a forma de um dipolo magnético similar à morfologia do campo geomagnético e a densidade de corrente tem dois picos de máximo bem perto da origem, acima do eixo X antes de tornar-se indefinida em $(0, 0)$. Esses máximos de J_y se assemelham com os cinturões de radiação do campo geomagnético. Esse comportamento próximo à origem é peculiar por causa do argumento da estrutura da função logarítmica em (3.16), sendo amplamente discutido na publicação de Yoon e Lui (2005). Por esse fato, este modelo é utilizado para representar, analiticamente o campo geomagnético, ver por exemplo o trabalho de Korovinskiy et al. (2018). Na solução de Kan, se observamos a Equação (3.16) há três pontos singulares, a saber $(a, 0)$ (lembrando que considera-se $a = 0$) e $(0, \pm\sqrt{b})$.

O quão próximo se queira chegar até a origem é uma escolha inteiramente arbitrária, e no modelo de Kan (1973) original esta escolha é controlada pelo parâmetro c .

Nas figuras 5 e 6, foram representados o modelo de Kan para o espaço X positivo, correspondente a $X > 0,5$. Duas opções do parâmetro b são usadas, a saber $b = 0,5$ e $b = 5$. Esse modelo é caracterizado por um campo magnético alargado para altos valores de X independentemente do valor de Z .

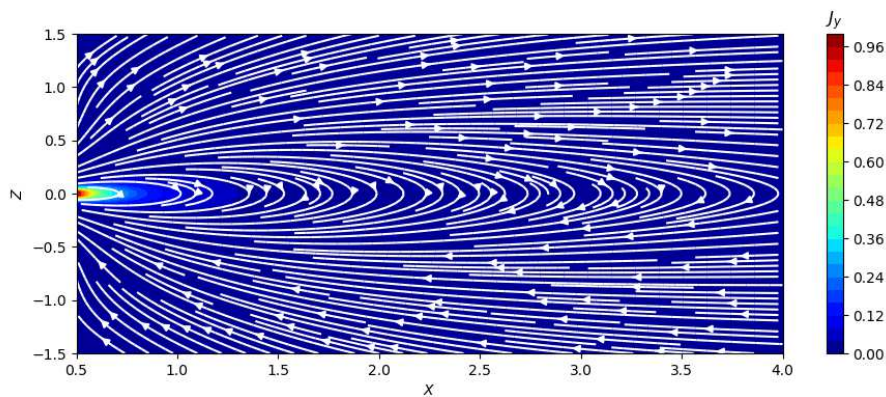
Um comportamento particular dessa solução, torna-se mais enfatizado perto da origem e com o aumento do valor de b . Segundo Yoon e Lui (2005), estritamente por

Figura 5 – Configuração do campo magnético consequente da solução analítica do modelo de Kan (1973). As linhas brancas representam as respectivas linhas do campo magnético antiparalelas, ou seja, possuem sentidos opostos. Isto é esboçado juntamente com a densidade de corrente normalizada em 2D no respectivo modelo com $b = 0,5$. Note que o intervalo de plotagem do campo magnético é diferente da Figura 4, isto foi feito para excluir a origem, pois em sua vinhança se situam os pontos singulares.



Fonte: o autor.

Figura 6 – Configuração do campo magnético consequente da solução analítica do modelo de Kan (1973). As linhas brancas representam as respectivas linhas do campo magnético antiparalelas, ou seja, possuem sentidos opostos. Isto é plotado juntamente com a densidade de corrente normalizada em 2D no respectivo modelo com $b = 5$. Note que o morfologia das linhas de campo magnético é diferente da Figura 5, ou seja, as linhas de campo ficam mais alongadas por causa do valor do parâmetro b .



Fonte: o autor.

causa do ângulo de alargamento próximo à origem (≈ 0 graus em relação ao eixo X), o modelo de Kan tem uma restrição em representar o comportamento do campo magnético parecido a um dipolo próximo do planeta Terra.

3.3 MODELO DE MANANKOVA

Esse modelo foi publicado em Manankova e Pudovkin (1996), Manankova e Pudovkin (1999), Manankova, Pudovkin e Runov (2000) no qual reuniram as referências de Kan e Fadeev e sugeriram uma específica formulação para a função geradora da seguinte forma:

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{1 + f_p^2} e^{(i\zeta - \frac{ib}{\zeta - a})}. \quad (3.20)$$

Na Equação (3.20), o termo da solução de Fadeev é incluído ao considerar $b = 0$, ou seja, este termo será responsável pela inserção, nesta nova solução, de ilhas magnéticas com um ponto X entre elas. O denominador do segundo termo dentro do exponencial é a relação $\zeta - a$, que agora faz toda diferença, e por isso agora não é conveniente considerar $a = 0$, porque o parâmetro a pode ser ajustado para deslocar as ilhas e o ponto neutro X convenientemente ao longo do eixo das abscissas.

Seguindo passos matemáticos similares às seções anteriores e substituindo o resultado de $|g(\zeta)|^2$ e $|g(\zeta)'|^2$ em (2.82), o resultado é:

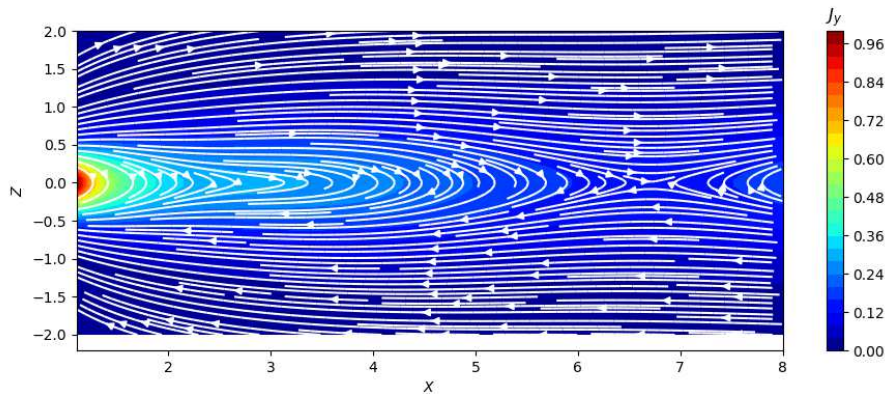
$$\Psi = \ln \frac{f_p \cos \left(X - \frac{b(X-a)}{R_0^2} \right) + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh \left(Z \left(1 + \frac{b}{R_0^2} \right) \right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{b}{R_0^2} \right)^2 - \frac{4bZ^2}{R_0^4}}}, \quad R_0^2 = (X-a)^2 + Z^2. \quad (3.21)$$

O gráfico de (3.21) foi esboçado na Figura 7, ele se mostra semelhante ao modelo de Kan (1973) (Figura 3) na região perto da origem, em que ambas possuem uma particularidade que vai ser abordada mais adiante. Repare que, nesse caso, o modelo descreve uma lâmina de corrente esticada na região próxima à origem do sistema de coordenadas $(0, 0)$, em que de forma aplicada, pode ser representada pela região próximo à Terra (MANANKOVA, 2003).

Neste caso, foram mantidos os mesmos valores para a e b , mas utilizamos $f_p = 0,5$, com $B_0 = 49,15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m). Note que este valor produz uma estrutura de ponto O ou ilha magnética estacionária na cauda.

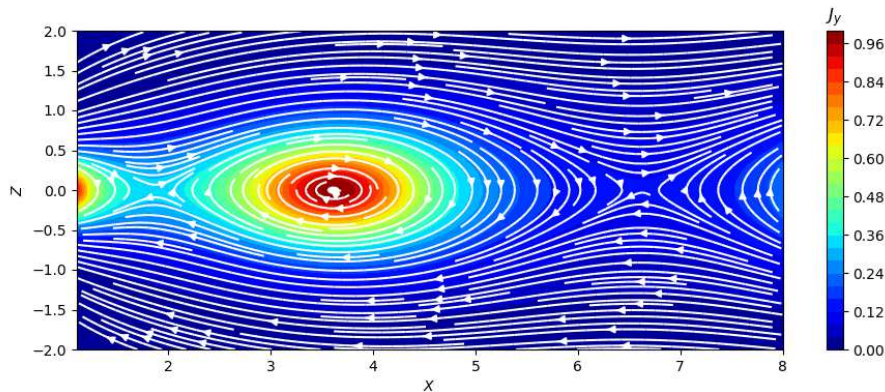
No modelo de *Kan*, a escolha de b significou a imagem da função de toda a estrutura ao longo do eixo X . No modelo de Manankova, a estrutura do ponto O é fixada ao longo do eixo X , a escolha de b resulta em uma distância relativa entre a estrutura do ponto O e os pontos singulares (LUI et al., 2008).

Figura 7 – Esboço do campo magnético juntamente com a densidade de corrente da solução de Manankova para $a = 0, b = 2$ e $f_p = 0, 1$ no intervalo $0 < X < 8$.



Fonte: o autor.

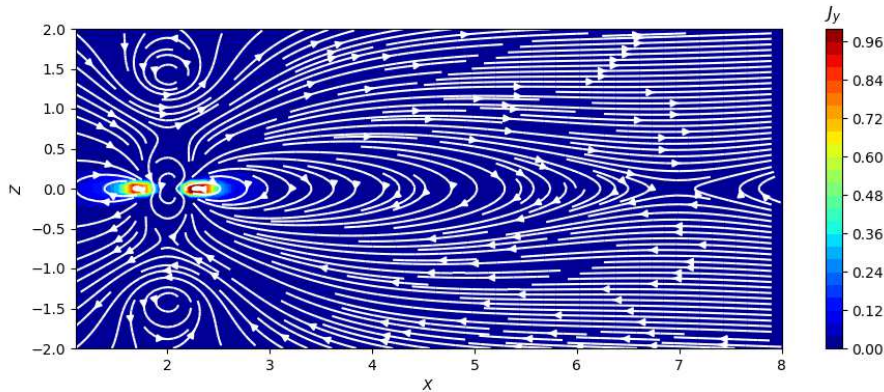
Figura 8 – Esboço do campo magnético juntamente com a densidade de corrente da solução de Manankova para $a = 0, b = 2$ e $f_p = 0, 5$. Dois pontos neutros e uma ilha magnética são esboçados pela solução no intervalo $0 < X < 8$.



Fonte: o autor.

Assim, o parâmetro b pode ser ajustado para deslocar as ilhas magnéticas em relação à origem. No entanto, a escolha de a desloca toda a solução em relação à origem, mas não exclui pontos singulares que ficam localizados na imagem da função na direção do eixo Z . A Figura 9 mostra a dinâmica da variação do parâmetro a nos mesmos intervalos de domínio e imagem mostrados anteriormente, com $a = 2$. Pode-se observar toda a estrutura dos pontos singulares na direção do eixo Z em $X = 2$ juntamente com um ponto nulo magnético nas vizinhanças de $X = 7$, no qual as orientações das linhas do campo magnético estão antiparalelas, podendo caracterizar uma reconexão magnética. Na próxima solução o problema de pontos singulares principalmente entre $-2 < Z < 2$ é suavizado.

Figura 9 – Esboço do campo magnético juntamente com a densidade de corrente da solução de Manankova para $a = 2, b = 2$ e $f_p = 0, 1$ no intervalo $0 < X < 8$.



Fonte: o autor.

3.4 MODELO DE H-F-K-M

Esse modelo é uma generalização das soluções de *Harris* (HARRIS, 1962), *Fadeev, Kan e Manankova* (H-F-K-M). O modelo de *Harris* é uma solução de uma dimensão, sendo considerada pela comunidade científica a mais fácil das soluções, isso porque ela está contida nas outras quando se fazem algumas considerações. As soluções de *Fadeev, Kan e Manankova* podem ser transformadas na solução de *Harris* (LAURINDO-SOUSA, 2018).

A forma da solução matemática decorrente da publicação de Harris (1962) é $\Psi = \ln(\text{sech}^{-1}(Z))$, que teve como função geradora $g(\zeta) = e^{i\zeta}$. O trabalho de Laurindo-Sousa (2018) mostra detalhadamente os métodos matemáticos utilizados em (2.82) para se chegar na devida solução.

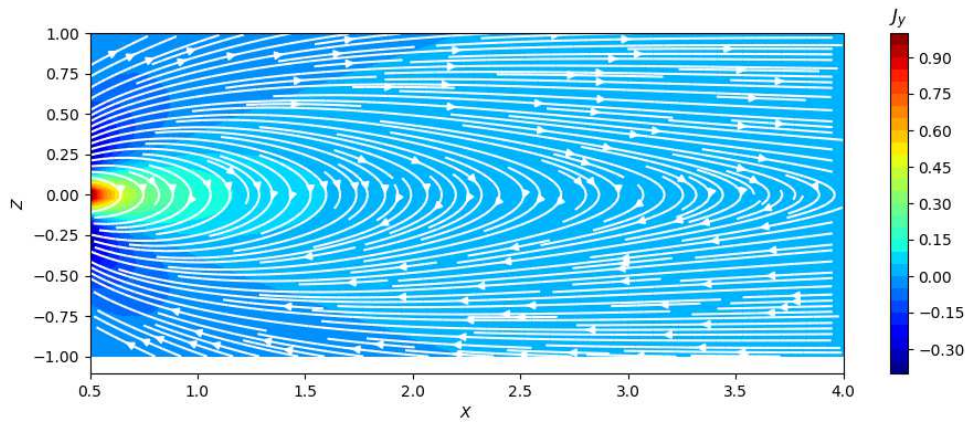
No modelo de Kan (1973) e Manankova, Pudovkin e Runov (2000), a divergência no ponto $(X, Z) = (a, 0)$ é controlada pelo fator $\frac{ib}{\zeta - a}$ na função geradora, que se reflete no termo R^{-1} na solução Ψ , sendo $R = \sqrt{(X - a)^2 + Z^2}$. No artigo de Yoon e Lui (2005) na *Secção 3.5*, foi sugerida uma função geradora que mantém a divergência mas modifica a excentricidade das linhas de campo magnético em R^{-1} . O anterior se fez acrescentando um expoente k arbitrário na função geradora, isto é:

$$g(\zeta) = f_p + \sqrt{1 + f_p^2} \exp\left(i\zeta - \frac{ib}{(\zeta - a)^k}\right). \quad (3.22)$$

Fica evidente que se assumir o valor $k = 1$ o modelo de Manankova e Pudovkin (1996) é recuperado. A derivada de (3.22) em relação à variável complexa ζ é como segue:

$$g'(\zeta) = i\sqrt{1 + f_p^2} \left(1 + \frac{kb}{(\zeta - a)^{k+1}}\right) \exp\left(i\zeta - \frac{ib}{(\zeta - a)^k}\right). \quad (3.23)$$

Figura 10 – Modelo de *Kan* na solução de H-F-K-M dado por (3.24), no caso $f_p = 0$ (não há ilha magnética), $a = 0$ (singularidade localizada na origem), $b = 2$ e $k = 1$.



Fonte: o autor.

Realizando os mesmos procedimentos matemáticos feitos anteriormente em (2.82), a solução de (3.22) desejada será:

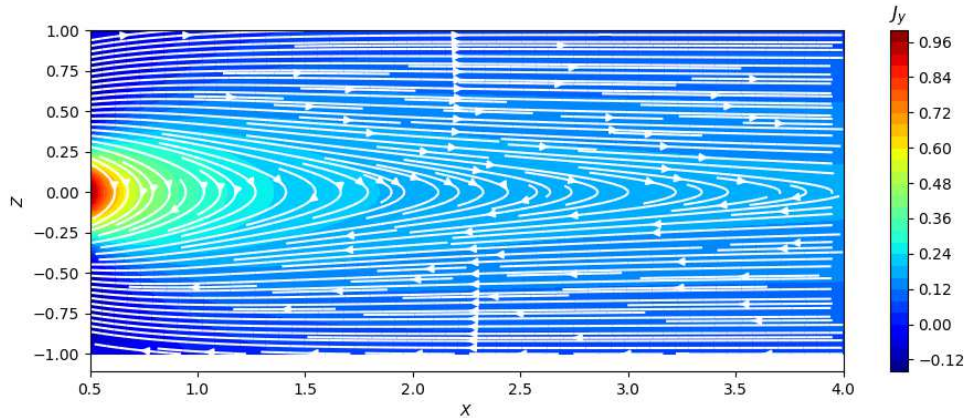
$$\Psi = \ln \frac{f_p \cos(a + R \cos \theta - \frac{b \cos k\theta}{R^k}) + \sqrt{1 + f_p^2} \cosh(R \sin \theta + \frac{b \sin k\theta}{R^k})}{\sqrt{(1 + \frac{kb}{R^{k+1}})^2 - (\frac{4kb}{R^{k+1}}) \sin^2 \frac{(k+1)\theta}{2}}}, \quad (3.24)$$

com $\theta = \tan^{-1} \frac{Z}{X-a}$.

Essa é uma generalização direta do modelo de *Manankova*, que foi construído e formalizado a partir dos modelos anteriores de *Harris*, *Fadeev* e *Kan*. É possível comparar este com os anteriores de *Kan* ou *Manankova* escolhendo alguns parâmetros, no caso em que $f_p = 0$ e $k = 1$ torna-se o modelo de *Kan* (LUI, 2011), com $f_p \neq 0$ e $k = 1$ transforma-se no modelo de *Manankova*.

Por uma questão de simplicidade, pode-se colocar o ponto singular na origem $a = 0$, além das restrições $f_p = 0$ e $b = 2$. Tendo essas condições impostas, haverá condições de comparar o particular modelo generalizado H-F-K-M, com o modelo de *Kan* fazendo $k = 1$. O modelo de *Kan* foi novamente visualizado com as considerações anteriores na Figura 10, em contraste a esta, a Figura 11 mostra a solução de H-F-K-M para o caso em que $k = 0, 1$. Como se pode perceber, o único que muda entre ambas figuras é o comportamento da excentricidade das linhas de campo próximo ao ponto singular $(X, Z) = (a, 0)$. Os restantes dois pontos singulares $(0, +\sqrt{b})$ e $(0, -\sqrt{b})$, conhecidos desde as soluções de *Kan* e *Manankova*, continuam os mesmos na solução H-F-K-M sem que o valor de k mude a localização. A escolha desse respectivo valor de k reajusta as linhas de campo magnético do modelo que possui uma semelhança mais familiar com a configuração geométrica da magnetocauda.

Figura 11 – Esboço do campo magnético e da densidade de corrente da solução de H-F-K-M para os valores ($f_p = 0, a = 0, b = 2$) mas com $k = 0, 1$. As linhas de campo se tornam mais alongadas em comparação com a Figura 10.



Fonte: o autor.

3.5 MODELO DE LAURINDO-SOUSA

Laurindo-Sousa et al. (2018) apresentou quatro soluções inéditas utilizando funções hiperbólicas como generalizações do modelo de Harris (1962). São modelos semelhantes em alguns aspectos, principalmente com relação à dinâmica do campo magnético juntamente com densidade de corrente, criando uma cadeia de ilhas magnéticas intercaladas com pontos singulares na direção de um dos eixos. O modelo também apresenta pontos neutros X afastados dos eixos.

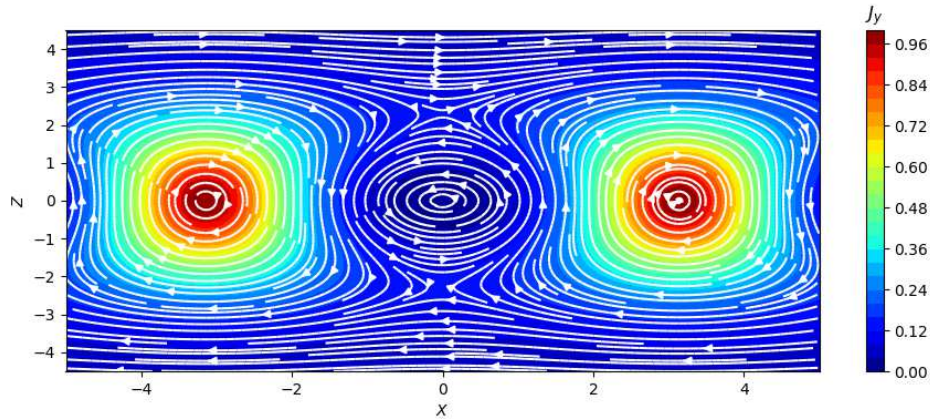
As funções geradoras utilizadas foram:

1. $g(\zeta) = \cosh(b\zeta)$,
2. $g(\zeta) = \sinh(b\zeta)$,
3. $g(\zeta) = \cosh(ib\zeta)$,
4. $g(\zeta) = \sinh(ib\zeta)$,

no qual sendo utilizada a fórmula de Walker (2.82), resultaram nas seguintes soluções respectivamente:

1. $\Psi = \ln \frac{\cosh^2(bX) + \cos^2(bZ)}{2b\sqrt{\cosh^2(bX) - \cos^2(bZ)}}$,
2. $\Psi = \ln \frac{\cosh^2(bX) + \sin^2(bY)}{2b\sqrt{\cosh^2(bX) - \sin^2(bZ)}}$,
3. $\Psi = \ln \frac{\cosh^2(bZ) + \cos^2(bX)}{2b\sqrt{\cosh^2(bZ) - \cos^2(bX)}}$,

Figura 12 – Campo magnético e a densidade de corrente da solução 3 de Laurindo-Sousa para $b = 0,5$ com $B_0 = 49,15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m).



Fonte: o autor.

$$4. \Psi = \ln \frac{\cosh^2(bZ) + \sin^2(bX)}{2b\sqrt{\cosh^2(bZ) - \sin^2(bX)}}.$$

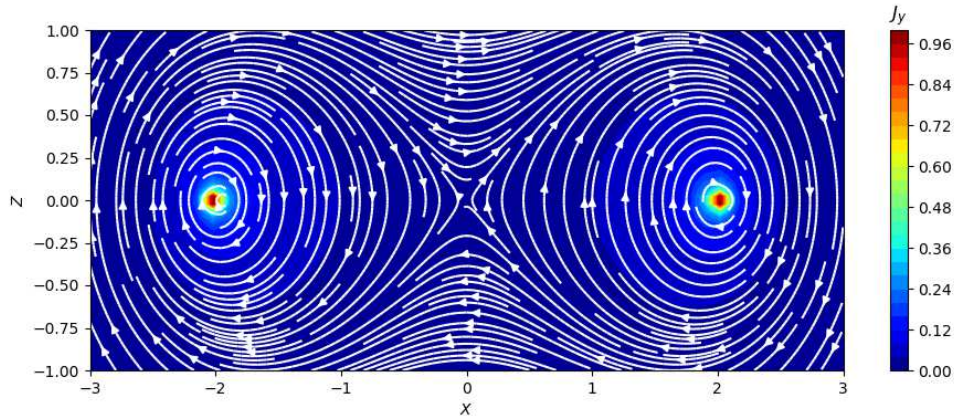
Os modelos 1 e 3 produzem ilhas magnéticas ou pontos-O com relação à origem do sistema de coordenadas num intervalo periódico aproximadamente de $(\approx \pm 3, 0)$, significando que em um determinado domínio de valores, seja ele na direção X ou Z , será produzido um ciclo do pico da densidade de corrente em união com o mínimo do campo magnético correspondente a esse intervalo, se estendendo ao infinito. As soluções 1 e 3 se diferenciam somente no fator i (unidade imaginária), pois quando ele é multiplicado dentro do argumento da função geradora ocorre uma rotação de 90° da projeção que é representada no plano XZ .

Na Figura 12 é mostrada a terceira solução para $g(\zeta) = \cosh(ib\zeta)$. A figura mostra semelhança com o modelo de *Fadeev* em relação à presença de cadeias de ilhas magnéticas ao longo do eixo X . É observado que os pontos de singularidades também são esboçados na direção X , essas singularidades podem ser localizadas em $(k\pi/b, 0)$ sendo k um número inteiro. Quando o valor de b for aumentado, o tamanho das ilhas magnéticas é modificado. À medida que b cresce, as ilhas diminuem, assim, alterando o tamanho do período, ou seja, a distância relativa entre elas que era de $(\approx \pm 3, 0)$ passando a ser sistematicamente menor. Já os modelos 2 e 4 somente se diferenciam na posição das ilhas e pontos singulares.

3.6 MODELO DE B-W

O modelo de Brittnacher e Whipple (2002) (B-W) é uma solução totalmente diferente quando confrontado diretamente com a solução de Harris (1962). Ele não se reduz ao modelo de *Harris* em nenhuma situação de delimitação. Esse modelo descreve um par isolado de correntes que são paralelas entre si, contendo um ponto no qual o campo mag-

Figura 13 – Campo magnético e densidade de corrente normalizada do modelo de Brittnacher e Whipple (2002). O parâmetro α determina as coordenadas da localização das duas correntes paralelas, nesta caso $\alpha = 2$, assim a densidade de corrente se eleva ao máximo em $X = \pm 2$. Foi plotado para este caso o valor $\beta = 0,5$, a curvatura das ilhas magnéticas tem contorno aproximadamente semelhante a uma circunferência.



Fonte: o autor.

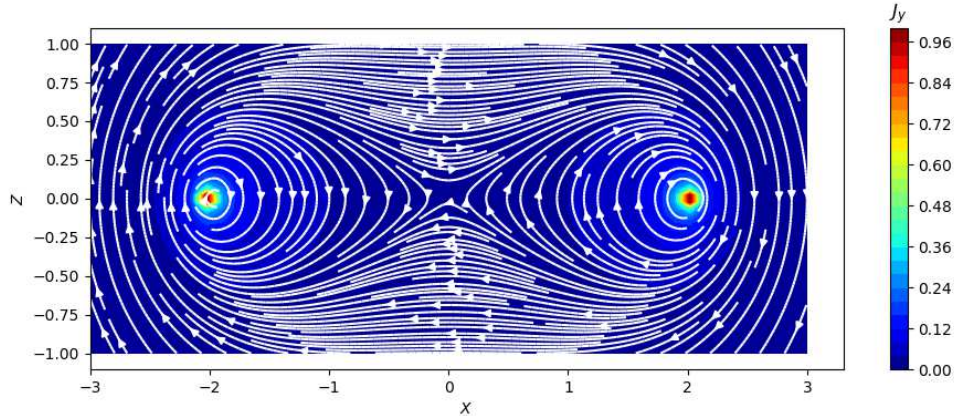
nético se anula, caracterizando um ponto neutro tipo X . Sendo que esse referido ponto, fica no centro de duas ilhas magnéticas ou pontos O , mas que tem uma limitação, segundo Yoon e Lui (2005) a densidade de corrente diverge no centro das ilhas. Entretanto, não é possível visualizar de forma geométrica esta divergência porque o programa utilizado fez uma interpolação que exclui a singularidade para assim poder visualizar os valores de J_y próximos dela. Tirando a divergência de J_y , o modelo terá certa similaridade com a solução de *Fadeev*.

Segundo Yoon e Lui (2005), em um sentido matemático, o modelo abordado também pode ser derivado da fórmula de *Walker*. Porém, o modelo de *B-W* seguiu o método analítico apresentado por Kan (1973). Um dos objetivos do modelo B-W foi demonstrar que uma abordagem analítica é útil para configurações que envolvem mais de uma dimensão quando comparado com a modelo de *Harris* e assim, obter soluções contendo um único ponto X . Neste sentido, este modelo é diferente do apresentado por *Fadeev*, donde existia uma periodicidade na representação dos ponto X ao longo do eixo das abscissas.

Para Brittnacher e Whipple (2002), este modelo pode ser convenientemente utilizado para interpretar dados magnetosféricos, no qual o foco seja o ponto X ou suas vizinhanças. Já para estudar ilhas magnéticas ou cortes transversais em tubos magnéticos, este modelo não é adequado porque no centro das ilhas magnéticas J_y diverge. Na prática, em uma configuração bidimensional, os pontos X geralmente aparecem isolados em uma região do geo-espaco entre tubos magnéticos (FERREIRA et al., 2017).

A função geradora definida para o modelo de Brittnacher e Whipple (2002) é uma

Figura 14 – Campo magnético e densidade de corrente normalizada do modelo de Brittnacher e Whipple (2002). Esta figura é similar à 13, mas neste caso o gráfico está apresentado para $\beta = 5$.



Fonte: o autor.

função exponencial que não depende diretamente da variável $\zeta = X + iZ$, se não que depende de uma função composta $\rho(\zeta)$. Neste contexto, a função geradora é a seguinte:

$$g(\zeta) = e^{(-\beta\rho(\zeta))}, \quad (3.25)$$

em que a escolha de $\rho(\zeta)$ é feita conforme a definição de transformação de coordenadas elípticas com $\zeta(\rho) = \alpha \cosh(\rho)$, ou pode-se dizer equivalentemente:

$$\rho(\zeta) = \cosh^{-1} \left(\frac{\zeta}{\alpha} \right). \quad (3.26)$$

Utilizando uma propriedade matemática da função \cosh^{-1} , também pode-se escrever:

$$\rho(\zeta) = \ln \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}}{\alpha}. \quad (3.27)$$

O parâmetro α determina a localização relativa do par de correntes paralelas, ao mesmo tempo em que o parâmetro β determina a forma da elipticidade dos pontos O .

O processo de derivação detalhada de (3.25) é dado em Brittnacher e Whipple (2002). O resultado se dá da forma:

$$\Psi = \ln \frac{\sqrt{r_+ r_-} \cosh(\beta\xi)}{\beta}, \quad (3.28)$$

com $r_{\pm} = \sqrt{(X \pm \alpha)^2 + Z^2}$, $\xi = \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1})$ e $\tau = \frac{r_+ + r_-}{2\alpha}$.

Será mostrado os gráficos do campo magnéticos e a densidade de corrente para diferentes parâmetros para o modelo de Brittnacher e Whipple (2002). Para visualizar o anterior, as Figuras 13 e 14 são mostradas para os valores $\beta = 0,5$ e $\beta = 5$, as constantes B_0, L e μ_0 foram mantidas como nos modelos anteriores no qual fazem parte de (3.1),

(3.2) e (2.81). Como o parâmetro α simplesmente determina a distância relativa entre os dois centros das correntes paralelas, optou-se por não variar esse parâmetro, entretanto, foi escolhido um valor fixo $\alpha = 2$. Em consequência disto, na Figura 13 a densidade de corrente fica representada na região do plano bidimensional nas vizinhanças dos pontos $X = \pm 2$. Já o parâmetro β estabelece o formato da elipticidade dos pontos O ou ilhas magnéticas (KHRABROV; SONNERUP, 1998). Observou-se que para valores baixos de β , a estrutura da ilha magnética torna-se aproximadamente uma curvatura de circunferência, isto ocorre diminuindo o valor de β gradativamente, enquanto que para valores altos de β , as ilhas tornam-se alongadas.

Na Figura 14, visivelmente as linhas das ilhas magnéticas estão mais esticadas em comparação com o gráfico mostrado em 13. Isto dá liberdade para fazer vários ajustes de β conforme as necessidades se modelar determinado tipo específico da configuração de linhas de campo magnético.

3.7 MODELO DE YOON-LUI-1

Esse modelo foi abordado em Yoon e Lui (2005), sendo uma solução que migrou uma das clássicas formulações originalmente feitas e discutidas por Walker (1915) e que foi produzida num contexto no qual, a aplicação original foi intencionalmente feita para o ramo de estrutura galáctica, e não na física do plasma. Várias funções geradoras foram discutidas por Walker (1915), e foi uma dessas que foi possível traduzir para o contexto da física espacial, que devidamente culminou sendo uma distribuição de corrente cilíndrica de comprimento infinito (LUI et al., 2008).

A função geradora sugerida foi a seguinte:

$$g(\zeta) = \zeta^\nu, \quad (3.29)$$

sendo ν um número inteiro. Sua derivada será:

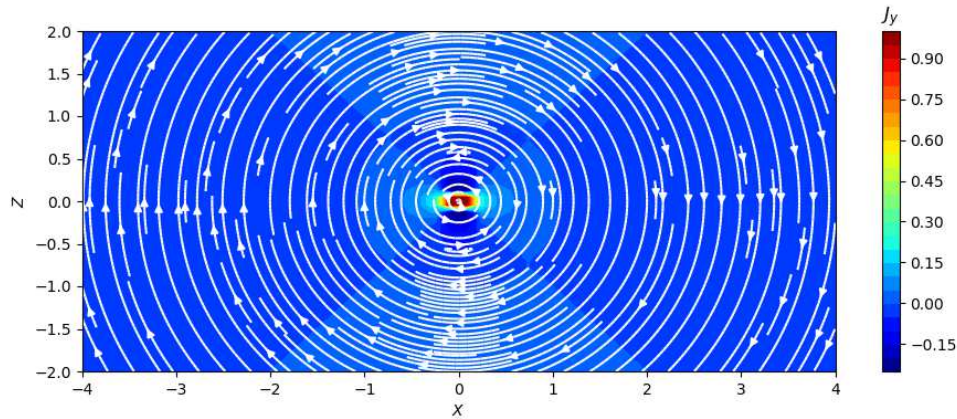
$$g'(\zeta) = \nu\zeta^{\nu-1}. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.29) e (3.30) em (2.82) resultará:

$$\Psi = \ln \frac{R(R^\nu + R^{-\nu})}{2\nu}, \quad \text{com } R = \sqrt{X^2 + Z^2}. \quad (3.31)$$

O gráfico deste modelo está visualizado na Figura 15 considerando o valor de $\nu = 1$. Este modelo têm a peculiaridade de mostrar uma ilha magnética isolada na origem do sistema de coordenadas em que $R = 0$. Somente que o valor da densidade de corrente J_y é diretamente afetado pelo parâmetro ν . Para ter uma ilha magnética com valor máximo de J_y em $R = 0$ somente pode ser utilizado o valor $\nu = 1$, por isso foi o escolhido para mostrar o modelo na Figura 15. Para $\nu > 1$ o valor de J_y se mantém convergente em

Figura 15 – Configuração do campo magnético e a densidade de corrente normalizada do modelo sugerido por *Yoon-Lui-1*. É uma distribuição de corrente cilíndrica de comprimento infinito em duas dimensões para $\nu = 1$, $B_0 = 49,15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m).



Fonte: o autor.

$R = 0$ mas fica nulo, sendo que o valor máximo será encontrado ao redor de $R = 0$. Quanto maior seja o valor de ν mais afastado de $R = 0$ estará o valor de J_y . No caso de $\nu > 1$, J_y passará a ter uma singularidade em $R = 0$, ou seja será divergente na origem. Do ponto de vista físico, ao aplicar este resultado analítico na análise de um tubo de campo, deve-se utilizar $\nu = 1$. Isto porque num tubo magnético, em uma configuração tipo ilha magnética, a densidade de corrente também será máxima no centro.

3.8 MODELO DE YOON-LUI-2

Essa foi outra formulação sugerida por Yoon e Lui (2005), no qual eles discutem um modelo alternativo de ponto X , em que a densidade de corrente no centro das ilhas magnéticas vizinhas é finita. Isto porque no modelo de Brittnacher e Whipple (2002), a estrutura de equilíbrio contendo um ponto X é caracterizada por um par de correntes paralelas em que a densidade de corrente diverge nos dois centros das ilhas magnéticas.

Há uma desvantagem na utilização desse modelo, pois ele contém duas singularidades magnéticas acima do eixo Z , como será mostrado na visualização desse modelo. A função geradora dessa solução é:

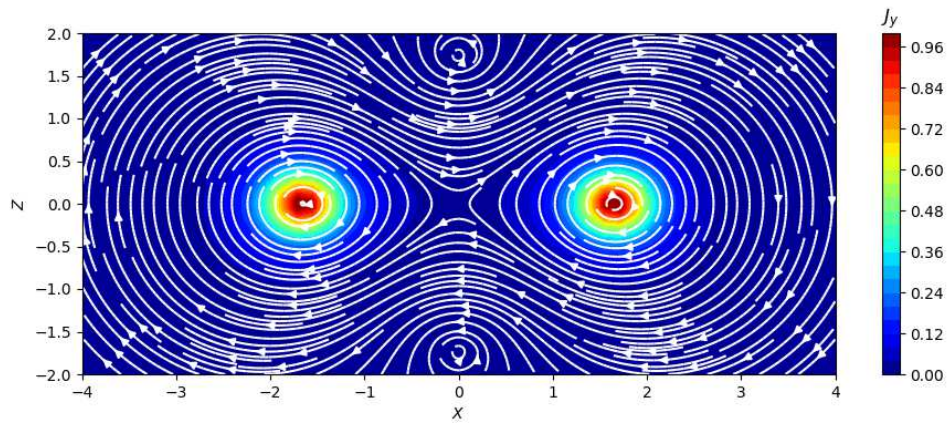
$$g(\zeta) = \zeta - \frac{a}{\zeta}, \quad (3.32)$$

substituindo (3.32) em (2.82), segue o resultado:

$$\Psi = \ln \frac{(R^2 + a)^2 + R^2 - 4aX^2}{2[(R^2 + a)^2 - 4aZ^2]^{1/2}}, \quad (3.33)$$

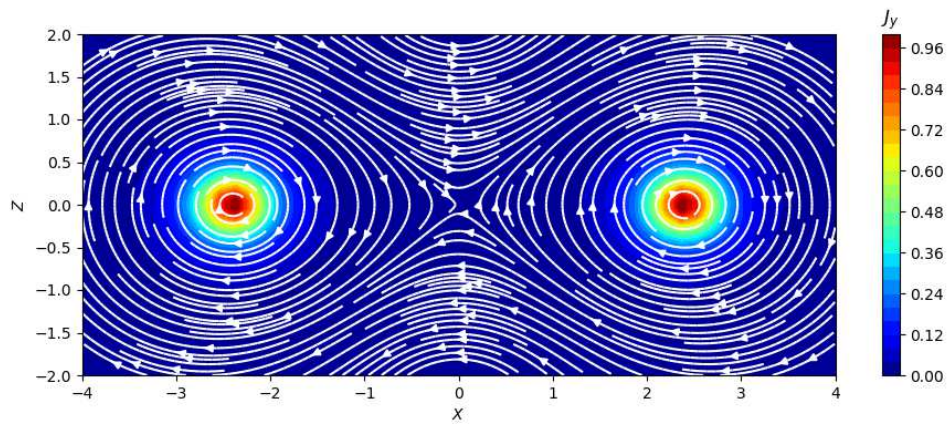
onde $R^2 = X^2 + Z^2$.

Figura 16 – Gráfico do campo magnético no modelo alternativo de linha-X de *Yonn-Lui-2*. Foi plotado para $a = 3$. No domínio de visualização da solução observam-se duas ilhas magnéticas acima do eixo das abscisas com um ponto neutro X na origem. No eixo Z observam-se duas singularidades magnéticas.



Fonte: o autor.

Figura 17 – Gráfico do campo magnético no modelo alternativo de linha-X de *Yonn-Lui-2*. Foi plotado para $a = 6$. Note que os pontos singulares localizados no eixo Z , foram afastados do intervalo de plotagem quando comparado com a Figura 16.



Fonte: o autor.

Continuando com o modelo adotado neste capítulo, mostramos a solução deste modelo representado pela Equação (3.33). Num primeiro momento, na Figura 17 mostra-se (3.33) com $a = 3$. Perceba que acima do eixo X estão localizadas duas ilhas magnéticas em $X = \pm\sqrt{a}$ com densidade de correntes finitas entrando no plano. Na origem do sistema de coordenadas, entre as duas ilhas magnéticas, está localizado o único ponto neutro X no domínio da solução. Outro aspecto peculiar é a existência no eixo Z de duas estruturas magnéticas com campo orientado no sentido oposto ao visualizado nas ilhas magnéticas. Este tipo de estrutura é característica de uma singularidade magnética com densidade de corrente nula no centro. Este tipo de singularidade é o mesmo que apareceu na solução de Kan em $(0, \pm\sqrt{b})$. Esta singularidade não é desejada quando um modelo analítico se utiliza, por exemplo, para gerar as condições iniciais em simulação MHD ou nos testes para melhorar a solução numérica da equação de Grad-Shafranov (OJEDA-GONZALEZ et al., 2015). Na solução de Kan optou-se por dividir o domínio, de forma que o eixo Z fosse excluído. O modelo Yoon-Lui-2 possibilita fazer esta exclusão de singularidades de uma forma mais elegante. Na Figura 17, se mostra o resultado desta exclusão de singularidade, que se fez de uma forma muito simples, somente considerando $a = 6$. Ou seja, aumentando o valor de a afastamos as duas singularidades da origem, mas, ao mesmo tempo, também afastamos as duas ilhas magnéticas.

3.9 MODELO DE YOON-LUI-3

Mais uma vez, Yoon e Lui (2005) sugerem uma solução que é uma generalização de distribuição de corrente cilíndrica de comprimento infinito no eixo Y , abordado anteriormente nos modelos alternativos de Yoon-Lui-1 e 2 que foi uma nova reformulação para física de plasma, de uma das soluções formuladas por Walker (1915). A função geradora proposta para essa referida estrutura é:

$$g(\zeta) = \frac{\zeta}{(1 - a^2\zeta^2)}, \quad (3.34)$$

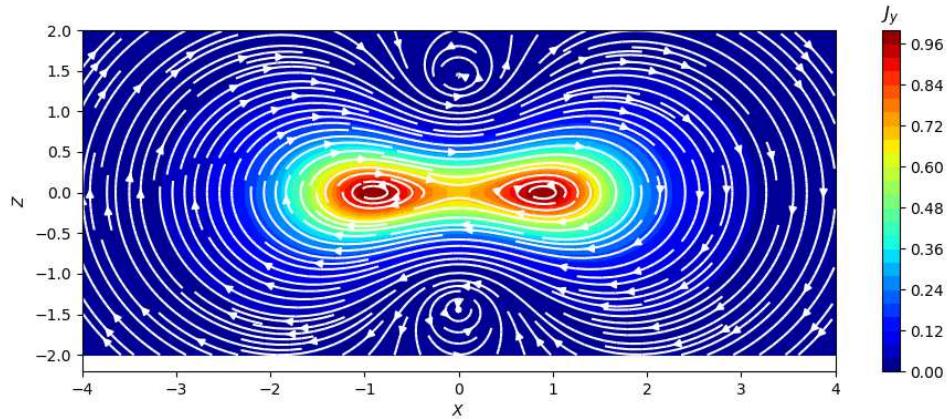
e substituindo Equação (3.34) em Equação (2.82), a solução esperada será:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S(S + R^2)^2}{2T} \right), \quad (3.35)$$

sendo: $S = (1 - a^2R^2)^2 + (2aZ)^2$, $T = (1 - a^4R^4)^2 + (4a^2XZ)^2$, com $R^2 = X^2 + Z^2$.

Mostrando o mesmo tipo de gráfico das seções anteriores, na Figura 18 representa-se a forma geométrica obtida a partir de (3.35). Esta figura tem muita semelhança com o modelo Yoon-Lui-2 mostrado na figura 16. Do ponto de vista geométrico, este modelo apresenta rotacionalidade idêntica do campo magnético, mantendo a presença de um ponto X na origem, duas ilhas magnéticas acima do eixo das abscissas e dois pontos singulares no eixo das ordenadas. Nesta novo modelo, o parâmetro a continua sendo utilizado para variar as posições dos pontos singulares e das ilhas magnéticas.

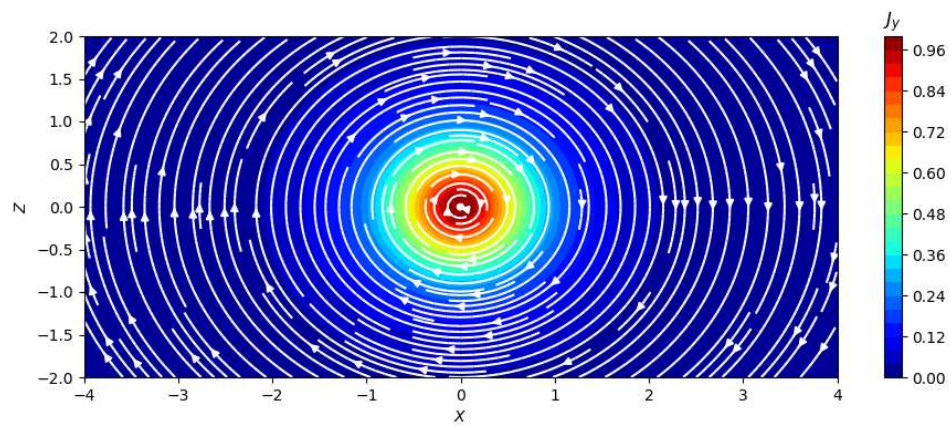
Figura 18 – Configuração do campo magnético e a densidade de corrente normalizada do modelo de *Yoon-Lui-3* com escolha de $a = 0,7$, $B_0 = 49,15 \times 10^{-9}$ (T), $L = 10^5$ m, e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (T A/m).



Fonte: o autor.

No modelo *Yoon-Lui-2*, o aumento do parâmetro a afastava da origem tanto as ilhas como os pontos singulares. Uma diminuição de a ocasionava o efeito contrário. A presença de um ponto neutro X entre duas ilhas magnéticas provoca uma instabilidade chamada de coalescência, ou seja, as duas ilhas podem se juntar e formar uma única ilha magnética (PRIEST; FORBES, 1992; SCHOLER, 1988). Em *Yoon-Lui-2* isto não aconteceu porque os pontos singulares impossibilitavam a manifestação da instabilidade de coalescência quando a diminui. O maior mérito do modelo *Yoon-Lui-3* é que a diminuição do parâmetro a traz as ilhas para a origem e afasta as singularidades da origem, ou seja, cria as condições ideais para se desenvolver instabilidade de coalescência onde as duas ilhas irão se transformar em uma única e gigantesca ilha magnética. Na Figura 19, mostra-se o modelo de *Yoon-Lui-3* considerando $a = 0,1$. As duas ilhas da Figura 18 se transformam em uma única ilha bem estruturada, com densidade de corrente finita e máxima no centro da ilha. O domínio de visualização da ilha se apresenta sem nenhuma singularidade, sendo este um fato importante na aplicabilidade do modelo.

Figura 19 – Configuração do campo magnético e a densidade de corrente normalizada do modelo de *Yoon-Lui-3*, com escolha de $a = 0, 1$.



Fonte: o autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo será apresentada uma nova solução com o objetivo de estudar lâminas de corrente com uma geometria diferente. Ou seja, uma solução que apresenta uma lâmina de corrente concêntrica em relação à origem e cuja geometria possa ser manipulada por meio de variação de um único parâmetro.

4.1 SOLUÇÃO PROPOSTA

Para propor uma nova solução, é necessário que a função geradora esteja definida em variáveis complexas e que seja analítica para poder satisfazer as condições indispensáveis na obtenção de Ψ . Desta maneira, a função geradora $g(\zeta)$ fornecerá um determinado tipo de morfologia magnética provinda da fórmula de *Walker* (WALKER, 1915), que irá satisfazer, no plano dos números complexos, as condições anteriormente citadas.

Levando em consideração os modelos de Yoon-Lui-2 e de Yoon-Lui-3 discutidos no capítulo anterior, supomos uma maneira de juntar ambos modelos para obter uma nova solução. Ambos modelos tinham em comum a dependência do parâmetro a para afastar as singularidades do domínio de integração. Ou seja, aumentando-se o valor de a , as singularidades presentes acima do eixo Z eram afastadas da origem do sistema de coordenadas. Em ambos modelos, para a escolha de um determinado valor de a , um ponto neutro X aparece na origem e duas ilhas magnéticas aparecem acima do eixo X .

Percebe-se que o aumento de a no modelo de Yoon-Lui-2 afasta as duas ilhas, enquanto em Yoon-Lui-3 as ilhas se juntam para formar uma única ilha na origem do sistema de coordenadas. Neste sentido, surgiu a curiosidade de explorar ambos efeitos propondo uma nova função geradora obtida da multiplicação de (3.32) e (3.34).

A multiplicação de ambas funções ainda resultará em uma função analítica conforme Churchill e Brown (1984), podendo atender as condições necessárias para a busca de uma nova solução. Sendo assim, seja:

$$g(\zeta) = \left(\zeta - \frac{a}{\zeta} \right) \cdot \left(\frac{\zeta}{1 - a^2 \zeta^2} \right) \quad (4.1)$$

$$= \left(\frac{\zeta^2 - a}{\zeta} \right) \cdot \left(\frac{\zeta}{1 - a^2 \zeta^2} \right). \quad (4.2)$$

Portanto a função geradora que será utilizada é:

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^2 - a}{1 - a^2 \zeta^2}. \quad (4.3)$$

Segundo a fórmula de *Walker* é preciso obter o quadrado do módulo da derivada de (4.3),

logo ela será:

$$\begin{aligned}
 g'(\zeta) &= \frac{2\zeta(1 - a^2\zeta^2) - (\zeta^2 - a)(-2a^2\zeta)}{(1 - a^2\zeta^2)^2} \\
 &= \frac{2\zeta - 2a^2\zeta^3 + 2a^2\zeta^3 - 2a^3\zeta}{(1 - a^2\zeta^2)^2} \\
 &= \frac{2(1 - a^3)\zeta}{(1 - a^2\zeta^2)^2}, \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

implicando que:

$$|g'(\zeta)|^2 = \frac{2^2(1 - a^3)^2 \zeta \zeta^*}{(1 - a^2\zeta^2)^2 \cdot (1 - a^2\zeta^{*2})^2} \tag{4.5}$$

$$= \frac{4(1 - a^3)^2 (X^2 + Z^2)}{C}. \tag{4.6}$$

Com C valendo:

$$\begin{aligned}
 C &= [(1 - a^2\zeta^2)(1 - a^2\zeta^{*2})]^2 \\
 &= [1 - a\zeta^{*2} - a^2\zeta^2 + a^4(\zeta\zeta^*)]^2 \\
 &= [1 - a^2(\zeta^{*2} + \zeta^2) + a^4(X^2 + Z^2)]^2 \\
 &= [1 - a^2(X^2 - 2iXZ - Z^2 + X^2 + 2iXZ - Z^2) + a^4(X^2 + Z^2)]^2 \\
 &= [1 - a^2(2X^2 - 2Z^2) + a^4(X^2 + Z^2)]^2 \\
 &= [1 - 2a^2(X^2 - Z^2) + a^4(X^2 + Z^2)]^2 \\
 &= [1 + a^2(a^2(X^2 + Z^2)^2 - 2(X^2 - Z^2))]^2. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Portanto, a Equação (4.6) ficará da forma:

$$|g'(\zeta)|^2 = \frac{4(1 - a^3)^2 (X^2 + Z^2)}{[1 + a^2(a^2(X^2 + Z^2)^2 - 2(X^2 - Z^2))]^2}. \tag{4.8}$$

Agora é preciso calcular uma expressão para $|g(\zeta)|^2$, sendo esta:

$$\begin{aligned}
 |g(\zeta)|^2 &= g(\zeta) \cdot g(\zeta^*) \\
 &= \left(\frac{\zeta^2 - a}{1 - a^2\zeta^2} \right) \cdot \left(\frac{\zeta^{*2} - a}{1 - a^2\zeta^{*2}} \right) \\
 &= \left(\frac{(X + iZ)^2 - a}{1 - a^2(X + iZ)^2} \right) \cdot \left(\frac{(X - iZ)^2 - a}{1 - a^2(X - iZ)^2} \right) \\
 &= \left(\frac{X^2 + 2iXZ - Z^2 - a}{1 - a^2(X^2 + 2iXZ - Z^2)} \right) \cdot \left(\frac{X^2 - 2iXZ - Z^2 - a}{1 - a^2(X^2 - 2iXZ - Z^2)} \right) \\
 &= \left(\frac{(X^2 - Z^2 - a) + i(2XZ)}{[1 - a^2(X^2 - Z^2)] - i(2a^2XZ)} \right) \cdot \left(\frac{(X^2 - Z^2 - a) - i(2XZ)}{[1 - a^2(X^2 - Z^2)] + i(2a^2XZ)} \right) \\
 &= \frac{(X^2 - Z^2 - a)^2 + 4X^2Z^2}{[1 - a^2(X^2 - Z^2)]^2 + 4a^4X^2Z^2}. \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Perceba que conforme (2.82) a Ψ será:

$$\Psi = \ln \left[\frac{1 + |g(\zeta)|^2}{2|g'(\zeta)|} \right], \quad (4.10)$$

portanto substituindo (4.8) e (4.9) em (4.10):

$$\Psi = \ln \left[\frac{1 + \frac{(X^2 - Z^2 - a)^2 + 4X^2 Z^2}{[1 - a^2(X^2 - Z^2)]^2 + 4a^4 X^2 Z^2}}{\frac{4(1 - a^3)\sqrt{(X^2 + Z^2)}}{1 + a^2(a^2(X^2 + Z^2)^2 - 2(X^2 - Z^2))}} \right]. \quad (4.11)$$

Fazendo algumas alterações algébricas em (4.11):

$$\Psi = \ln \left[\frac{\left[(1 - a^2(X^2 - Z^2))^2 + (X^2 - Z^2 - a)^2 + 4X^2 Z^2 (a^4 + 1) \right] \left[1 + a^2 (a^2(X^2 + Z^2)^2 - 2(X^2 - Z^2)) \right]}{4(1 - a^3)\sqrt{(X^2 + Z^2)} \left[(1 - a^2(X^2 - Z^2))^2 + 4a^4 X^2 Z^2 \right]} \right]. \quad (4.12)$$

Três parâmetros são inseridos para simplificar a forma de escrever de (4.12), isto é:

$$R^2 = X^2 + Z^2, \quad (4.13)$$

$$U^2 = 4X^2 Z^2, \quad (4.14)$$

$$T^2 = X^2 - Z^2. \quad (4.15)$$

A expressão final de Equação (4.12) fica:

$$\Psi = \ln \left[\frac{\left[(1 - a^2 T^2)^2 + (T^2 - a)^2 + U^2 (a^4 + 1) \right] \left[1 + a^2 (a^2 R^4 - 2T^2) \right]}{4(1 - a^3) R \left[(1 - a^2 T^2)^2 + a^4 U^2 \right]} \right]. \quad (4.16)$$

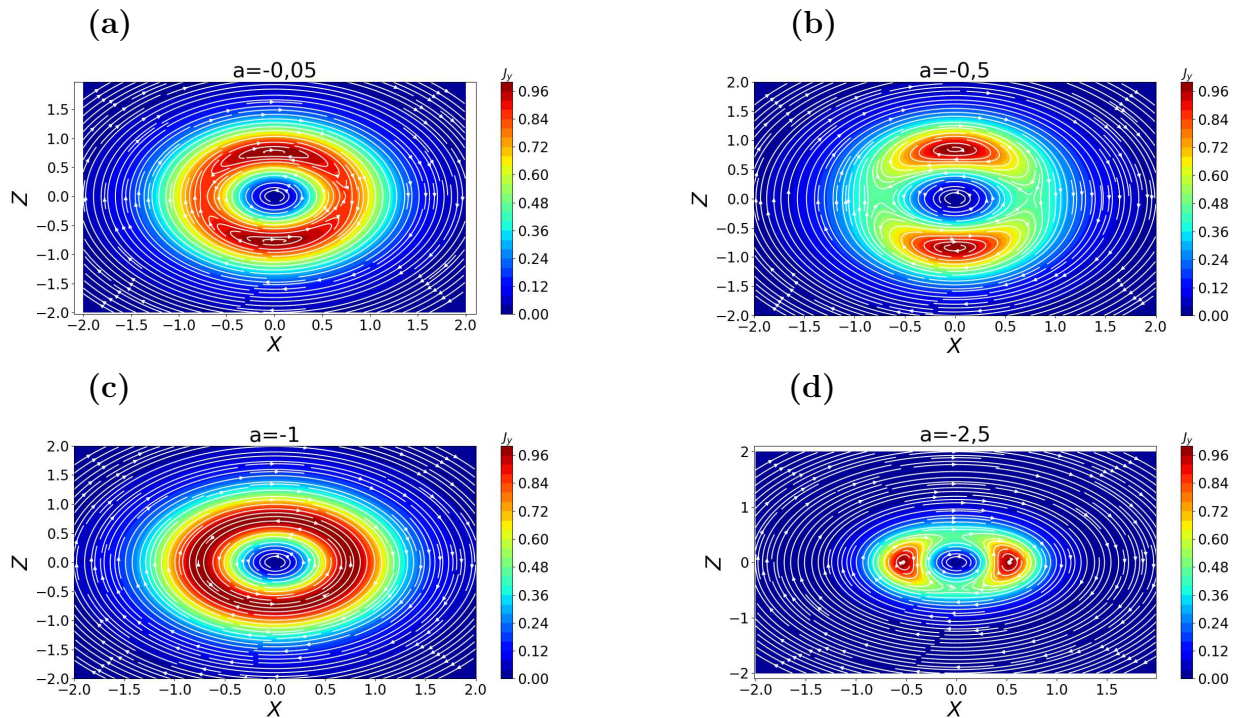
Substituindo Equação (4.16) nas Equações (3.1), (3.2) e (2.81) serão obtidas as componentes do campo magnético e a densidade de corrente respectivamente.

4.2 GEOMETRIA DA SOLUÇÃO

A solução encontrada em (4.16) apresenta duas singularidades, ou seja, valores que indeterminam o denominador da função. Quando se anula o parâmetro R , significa que existe uma indeterminação na origem. A outra singularidade aparece em $a = 1$. A singularidade em $R = 0$ não pode ser deslocada alterando o parâmetro a . Isto é uma deficiência do modelo se comparado com os modelos Yoon-Lui-2 e 3, nas quais as singularidades podiam ser deslocadas variando o parâmetro a .

Para ter mais detalhes da geometria do modelo é necessário mostrar os resultados gráficos, utilizando o mesmo tipo de visualização apresentada durante todo o capítulo anterior. Desta maneira, pode-se comparar a nova solução, caso seja necessário, com as soluções revisadas no Capítulo 3.

Figura 20 – Gráficos da solução proposta para valores negativos do parâmetro a como segue: (a) $a = -0,05$; (b) $a = -0,5$; (c) $a = -1,0$ e (d) $a = -2,5$. Cada painel mostra o gráfico de contorno do campo magnético com sua respectiva orientação no plano XZ , superposto com o módulo de J_y . Em todos os painéis existe um ponto singular na origem do sistema de coordenadas. Duas ilhas magnéticas acima do eixo das ordenadas e dois pontos neutros X no eixo das abscissas aparecem nos painéis (a) e (b). Em relação aos painéis (a) e (b), em (d) as ilhas e os pontos X mudam de eixo. No painel (c) existe uma corrente anelar uniformemente estruturada ao redor da origem, ou seja, uma lâmina de corrente circular com geometria cilíndrica ao longo do eixo Y .

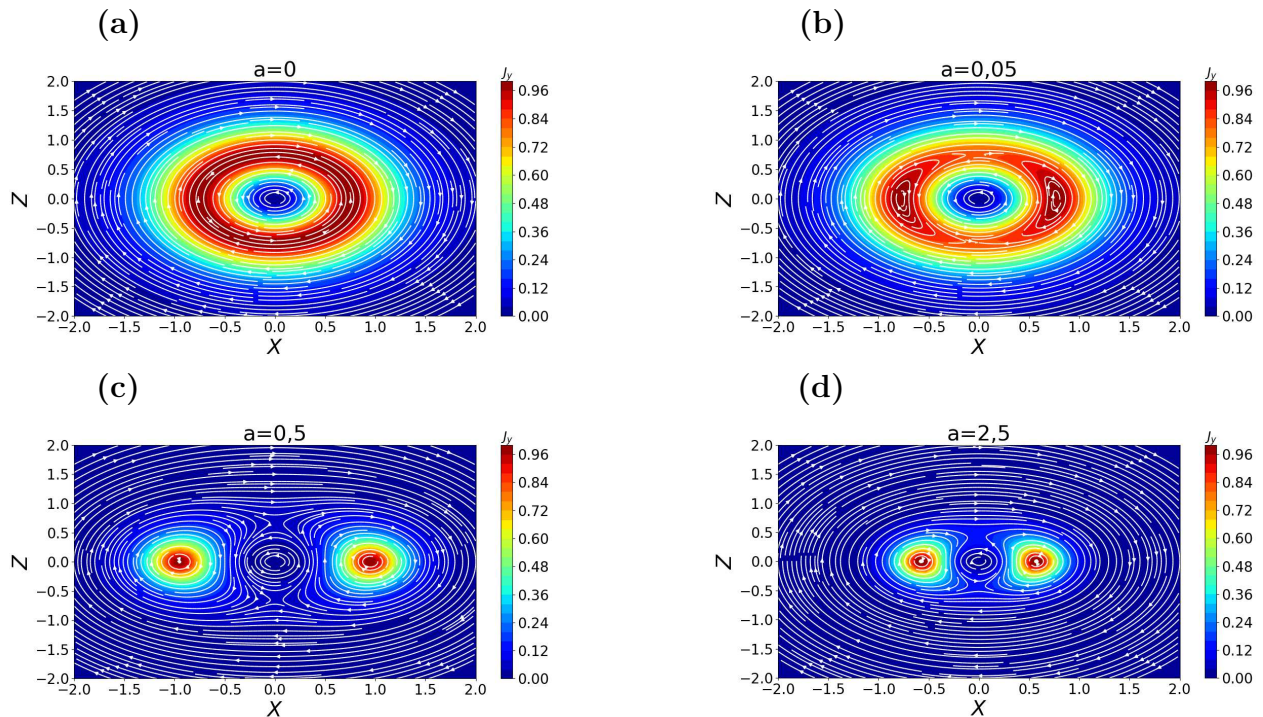


Fonte: O Autor

A Figura 20 está composta por quatro painéis que somente diferem no valor adotado do parâmetro a como segue: (a) $a = -0,05$; (b) $a = -0,5$; (c) $a = -1,0$ e (d) $a = -2,5$. A superposição do campo vetorial em XZ com o módulo da componente Y da densidade de corrente, possibilita a localização dos pontos singulares, das ilhas magnéticas, dos pontos X e da lâmina de corrente. Todas as estruturas citadas na sentença anterior aparecem neste modelo, somente temos que fazer uma escolha adequada do parâmetro a .

Começamos a análise deste modelo escolhendo um valor de a entre 0 e -1 . O painel (a) mostra que para $a = -0,05$, duas ilhas magnéticas aparecem simetricamente acima do eixo Z . As ilhas estão comprimindo a estrutura magnética formada pelo ponto singular localizado na origem. As linhas do campo magnético na região de contato entre cada ilha com o ponto singular apresentam o mesmo sentido. No entanto, acima do eixo das abscissas aparecem simetricamente dois pontos neutros X , eles causam a coalescência das ilhas magnéticas quando o valor do parâmetro a se aproxima de zero.

Figura 21 – Gráficos da solução proposta para o valor nulo e valores positivos do parâmetro a como segue: (a) $a = 0$; (b) $a = 0,05$; (c) $a = 0,5$ e (d) $a = 2,5$. Cada painel mostra o gráfico de contorno do campo magnético com sua respectiva orientação no plano XZ , superposto com o módulo de J_y . Em todos os painéis existe um ponto singular na origem do sistema de coordenadas. Duas ilhas magnéticas acima do eixo das abcissas e dois pontos neutros X no eixo das ordenadas aparecem nos painéis (a), (b) e (c). No painel (a) existe uma corrente anelar uniformemente estruturado ao redor da origem, ou seja, uma lâmina de corrente circular com geometria cilíndrica ao longo do eixo Y .



Fonte: O Autor

A melhor formação das ilhas aparece quando $a = -0,5$, como apresentado no painel (b). De $a = -0,5$ até $a = -1$ as ilhas novamente se aproximam e em $a = -1$, apresentado do painel (c), elas se unem completamente para formar uma corrente anelar cilíndrica ao redor da origem. Esta corrente anelar é uma lâmina de corrente, sendo este o único modelo que apresenta um lâmina de corrente com esta geometria. Em relação com a existência da união entre duas ilhas, o modelo é similar com Yoon-Lui-3, mas o resultado final é diferente.

Quando o valor de a é menor que -1 (ver painel (d)), as ilhas ficam sempre acima do eixo X . Neste caso, a diminuição de a faz que essa estrutura fique cada vez mais compactada, mas com características de fractal, no sentido que em pequena escala ela sempre será observada com as mesmas características geométricas.

A Figura 21 mostra o mesmo tipo de gráfico apresentado na Figura 20, mas com valores diferentes do parâmetro a como segue: (a) $a = 0$; (b) $a = 0,05$; (c) $a = 0,5$ e (d)

$a = 2, 5$. O painel (a) apresenta a mesma configuração de corrente anelar como visualizado na Figura 20c. Variando a entre 0 e um valor próximo de 1, teremos uma configuração semelhante à apresentada na Figura 20d. Ou seja, duas ilhas magnéticas acima do eixo X e dois pontos neutros no eixo Z. No painel (b), com um valor de a próximo de zero, se observam as ilhas magnéticas no processo de junção ou união. No painel (c), as ilhas estão mais separadas. No painel (d), quando o valor de a é maior que 1, toda a estrutura começa diminuir, tendo o efeito fractal como foi comentado durante a apresentação da Figura 20d.

De forma geral, este novo modelo, em comparação com todos os outros apresentados neste trabalho, tem a vantagem de apresentar a única lâmina de corrente cilíndrica, com a possibilidade de decidir em qual dos eixos colocar as ilhas magnéticas. O modelo também tem a vantagem que apresenta características fractais em relação à dependência da geometria em função da escala de observação. A desvantagem do modelo é a impossibilidade de remover a singularidade da origem.

5 CONCLUSÕES

A equação de GS é utilizada para se compreender processos físicos que ocorrem no geoespaço, por exemplo, na magnetosfera e em estruturas magnéticas do vento solar. A pesquisa aqui abordada, foi elaborada visando uma construção sistemática e coerente com as teorias envolvidas nas áreas de *física de plasmas*, *eletromagnetismo* e a *teoria Magnetohidrodinâmica* (MHD). Esta é uma equação diferencial parcial (PDE) não-linear de segunda ordem importante para se fazer simulações de determinadas situações físicas no plasma geoespacial. Foi abordada e explicada a construção física-matemática utilizando teoria cinética em física de plasma para a obtenção de uma forma simplificada da equação de GS (Equação (2.80)), que também é uma forma simplificada da equação de Liouville. As soluções analíticas decorrentes da fórmula de Walker, dependendo do argumento da função geradora no qual são definidas, podem representar variedades de configurações topológicas de campos magnéticos, que em determinadas situações físicas, podem apresentar lâminas de corrente bidimensionais.

A Equação de GS (2.2), apresentada no começo do Capítulo 2, não têm solução analítica, mas pode se resolver numericamente como um problema de Cauchy, sendo que a equação diferencial está sujeita a certas condições iniciais (SONNERUP; GUO, 1996; HAU; SONNERUP, 1999; HU; SONNERUP, 2001; OJEDA-GONZALEZ et al., 2015). No trabalho de Hau e Sonnerup (1999) se utilizou a solução analítica proposta por Fadeev, Kvabtskhava e Komarov (1965) para criar um gráfico de contorno que permitiu visualizar o erro percentual, útil na interpretação dos resultados da solução numérica. Novas soluções analíticas da Equação (2.80) também poderão ser importantes para validar futuras melhorias na solução numérica.

As soluções analíticas também são importantes para entender a coexistência entre os pontos tipo-X, Tipo-O (ilhas) e Tipo-S (singularidades) que aparecem, por exemplo, nos modelos de Kan (KAN, 1979) e na solução analítica encontrada na tese de Antônio Nilson e publicados em Laurindo-Sousa et al. (2018).

Se pode concluir que, as soluções conhecidas até hoje com aplicação geofísica incluem o modelo de *Harris* (HARRIS, 1962), modelo de *Fadeev* (FADEEV; KVABTSKHAVA; KOMAROV, 1965), modelo de *Kan* (KAN, 1973; KAN, 1979), modelo de *Manankova* (MANANKOVA; PUDOVKIN, 1996; MANANKOVA; PUDOVKIN, 1999; MANANKOVA; PUDOVKIN; RUNOV, 2000), modelo *H-F-K-M* (YOON; LUI, 2005), modelo de Laurindo-Sousa et al. (2018), o modelo de *B-W* (BRITTNACHER; WHIPPLE, 2002) e as três generalizações do modelo *B-W* apresentadas por Yoon e Lui (2005). Dessas soluções, os modelos de *Fadeev*, *Kan*, *Manankova*, *H-F-K-M* e *Laurindo-Sousa* são todas variações e generalizações do modelo de *Harris*, mas o modelo de *B-W* e respectivas generalizações

não vem da solução *Harris* e nem se reduz a ela.

As soluções bidimensionais abordadas no Capítulo 3, podem ser construídas com suficiente flexibilidade para se modelar várias características físicas que são relevantes para a aplicação geofísica, como as linhas neutras onde o campo magnético tende a 0, estrutura de ilha magnética, e a dinâmica do comportamento próximo a magnetocauda da Terra.

Os gráficos plotados ao longo do Capítulo 3, somente haviam sido plotados nas referências aqui citadas, em forma de gráfico de contorno. Sendo, portanto, os gráficos deste trabalho, plotados com o campo magnético e densidade de corrente normalizada juntamente com ilustrações e boa resolução gráfica, inovações e reformulações a literatura que facilitam a pesquisa de inúmeros tópicos tratados na geofísica. Ajudando no estudo da reconexão magnética, que é um assunto muito discutido na comunidade científica.

Foi proposta uma nova função geradora derivada a partir do produto dos modelos de Yoon-Lui-2 e 3. A função geradora foi substituída na fórmula de *Walker*, dando como resultado uma nova solução Ψ da forma simplificada da equação de GS. O modelo apresenta duas singularidades, uma na origem do sistema de coordenadas e outra singularidade aparece se definimos $a = 1$. O campo magnético ao redor da singularidade $(0, 0)$ é circular com orientação no sentido anti-horário.

O modelo para os valores $a = -1$ e $a = 0$ apresenta uma única lâmina de corrente cilíndrica. No intervalo $0 > a > -1$, duas ilhas magnéticas aparecem no eixo das ordenadas e dois pontos neutros X no eixo das abscisas. No intervalo $a < -1$ e $a > 0$ as duas ilhas aparecem no eixo das abscisas e os dois pontos neutros X no outro eixo. O campo magnético nas ilhas magnéticas tem orientação em sentido horário. De forma similar ao modelo de Yoon-Lui-2, variando o parâmetro a as ilhas magnéticas se unem, mas desta vez numa única lâmina de corrente cilíndrica.

De forma geral, este novo modelo têm a vantagem de poder decidir em qual dos eixos colocar as ilhas magnéticas e apresenta características fractais porque a geometria é a mesma em diferentes escalas de observação. A desvantagem do modelo é a impossibilidade de remover a singularidade da origem. O novo modelo apresentado é um resultado inédito deste trabalho e como pesquisa futura propomos um estudo mais detalhado das características físicas do mesmo. Este estudo pode ser feito, gerando as condições iniciais para realizar uma simulação MHD adaptada a um determinado sistema físico. No entanto, antes de realizar a simulação é necessário propor um método para excluir o ponto singular do domínio de integração.

REFERÊNCIAS

- ALFVÉN, H. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Nature*, v. 150, p. 405–406, out. 1942. Citado na página 17.
- Alfvén, H. On the Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Arkiv for Astronomi*, v. 29, p. 1–7, 1943. Citado na página 17.
- BENFORD, G.; BOOK, D. L. Relativistic Beam Equilibria. *Advances in Plasma Physics*, v. 4, p. 125, 1971. Citado na página 38.
- BISKAMP, D. Magnetic reconnection via current sheets. *Physics of Fluids*, v. 29, p. 1520–1531, maio 1986. Citado na página 36.
- BITTENCOURT, J. *Fundamentals of Plasma Physics*. Third. Verlag New York, Inc: Originally published by Pergamon Press, New York, 1986, 2004. ISBN 0-387-20975-1. Citado 6 vezes nas páginas 18, 22, 23, 24, 25 e 27.
- BRITTNACHER, M.; WHIPPLE, E. C. Extension of the Harris magnetic field model to obtain exact, two-dimensional, self-consistent X point structures. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 107, n. A2, p. SMP 3–1–SMP 3–5, 2002. ISSN 2156-2202. Citado 8 vezes nas páginas 9, 14, 38, 49, 50, 51, 53 e 64.
- CHIAN, A. C.-L.; MUÑOZ, P. R. Detection of Current Sheets and Magnetic Reconnections at the Turbulent Leading Edge of an Interplanetary Coronal Mass Ejection. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 733, n. 2, p. L34, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/2041-8205/733/i=2/a=L34>>. Citado na página 38.
- CHURCHILL, R. V.; BROWN, J. W. *Complex variables and applications; 4th ed.* New York, NY: McGraw-Hill, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 58.
- COWLEY, S. W. H. A beginner's guide to the Earth's magnetosphere. *Earth in Space*, v. 8, p. 9–13, mar. 1996. Citado na página 15.
- DUNGEY, J. W. Interplanetary Magnetic Field and the Auroral Zones. *Physical Review Letters*, v. 6, p. 47–48, jan. 1961. Citado na página 15.
- FADEEV, V.; KVABTSKHAHA, I.; KOMAROV, N. Self-focusing of local plasma currents. *Nuclear Fusion*, v. 5, n. 202, p. 202–209, 1965. Citado 4 vezes nas páginas 14, 30, 38 e 64.
- FERREIRA, P. P. et al. Conceitos básicos sobre a física da formação de tubos de fluxo magnético nas proximidades da Terra. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 39, 00 2017. ISSN 1806-1117. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 50.
- FORBES, T. G.; ACTON, L. W. Reconnection and Field Line Shrinkage in Solar Flares. *Astrophysical Journal*, v. 459, p. 330, mar. 1996. Citado na página 38.
- GÉNOT, V. Comment on “A class of exact two-dimensional kinetic current sheet equilibria” by Peter H. Yoon and Anthony T. Y. Lui. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 110, n. A9, p. A09214, Sep 2005. Citado na página 36.

- GONZALEZ, W. D. et al. What is a geomagnetic storm? *Journal of Geophysical Research*, American Geophysical Union (AGU), v. 99, n. A4, p. 5771, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1029/2F93ja02867>>. Citado na página 15.
- GONZALEZ, W. D. et al. Fundamental concepts associated with magnetic reconnection. In: _____. *Magnetic Reconnection: Concepts and Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2016. p. 1–32. ISBN 978-3-319-26432-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-26432-5_1>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- GOSLING, J. T. et al. Multiple magnetic reconnection sites associated with a coronal mass ejection in the solar wind. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 112, p. A08106, ago. 2007. Citado na página 38.
- GOSLING, J. T. et al. Direct evidence for magnetic reconnection in the solar wind near 1 AU. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 110, p. A01107, jan. 2005. Citado na página 38.
- GRAD, H.; RUBIN, H. Hydromagnetic equilibria and force free fields. *Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, United Nations, Geneva, v. 31, n. IAEA, p. 190–197, 1956. Citado na página 39.
- G.ZILL, D.; CULLEN., M. R. *Equações Diferenciais: Volume 1*. [S.l.]: Pearson Makron Books, 2000. Citado na página 37.
- HARRIS, E. G. On a plasma sheath separating regions of oppositely directed magnetic field. *Il Nuovo Cimento*, Springer, v. 23, n. 1, p. 115–121, 1962. ISSN 00296341. Disponível em: <<http://www.springerlink.com/index/10.1007/BF02733547>>. Citado 7 vezes nas páginas 14, 32, 38, 46, 48, 49 e 64.
- HAU, L. N.; SONNERUP, B. U. Ö. Two-dimensional coherent structures in the magnetopause: Recovery of static equilibria from single-spacecraft data. *Journal of Geophysical Research*, v. 104, n. A4, p. 6899–6918, Apr 1999. Citado 3 vezes nas páginas 21, 38 e 64.
- HU, Q. The grad-shafranov reconstruction in twenty years: 1996–2016. *Science China Earth Sciences*, v. 60, n. 8, p. 1466–1494, Aug 2017. ISSN 1869-1897. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11430-017-9067-2>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 38.
- HU, Q. et al. Multiple flux rope magnetic ejecta in the solar wind. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 109, n. A18, p. 3102, mar. 2004. Citado na página 38.
- HU, Q.; SONNERUP, B. U. Ö. Reconstruction of magnetic flux ropes in the solar wind. *Geophysical Research Letters*, v. 28, n. 3, p. 467–470, 2001. Disponível em: <<http://www.agu.org/pubs/crossref/2001/2000GL012232.shtml>>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 64.
- HUGHES, W. J. *The magnetopause, magnetotail and magnetic reconnection* In: *Introduction to space physics*. Cambridge: Cambridge University Press., 1995. iii, 242: p. Citado na página 38.
- INNES, D. E. et al. Bi-directional plasma jets produced by magnetic reconnection on the Sun. *Nature*, v. 386, p. 811–813, abr. 1997. Citado na página 38.

JI, H.; KULSRUD, R.; YAMADA, M. Magnetic Reconnection, Turbulence, and Collisionless Shock. *Astrophysics and Space Science*, v. 298, n. 1-2, p. 219–226, Jul 2005. Citado na página 16.

KAN, J. R. On the structure of the magnetotail current sheet. *Journal of Geophysical Research*, v. 78, n. 19, p. 3773–3781, 1973. ISSN 2156-2202. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/JA078i019p03773>>. Citado 14 vezes nas páginas 8, 14, 18, 29, 30, 32, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 50 e 64.

KAN, J. R. Non-linear tearing structures in equilibrium current sheet. *Planetary and Space Science*, v. 27, n. 4, p. 351–354, Apr 1979. Citado 4 vezes nas páginas 18, 21, 32 e 64.

KELLEY, M. C.; HEELIS, R. A. Book. *The Earth's ionosphere : plasma physics and electrodynamics / Michael C. Kelley, with contributions from Rodney A. Heelis*. [S.l.]: Academic Press, San Diego :, 1989. xii, 487 p. : p. ISBN 0124040136 0124040128. Citado na página 15.

KHRABROV, A. V.; SONNERUP, B. U. Ö. DeHoffmann-Teller Analysis. *ISSI Scientific Reports Series*, v. 1, p. 221–248, Jan 1998. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 52.

KOROVINSKIY, D. B. et al. On application of asymmetric Kan-like exact equilibria to the Earth magnetotail modeling. *Annales Geophysicae*, v. 36, n. 2, p. 641–653, Apr 2018. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 42.

LAURINDO-SOUSA, A. *Soluções analíticas da equação de Grad-Shafranov e o estudo de lâminas de corrente*. Tese (Tese de Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas e Desenvolvimento-UNIVAP, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 46.

LAURINDO-SOUSA, A. N. et al. New analytical solution of the equilibrium ampere's law using the walker's method: a didactic example. *Brazilian Journal of Physics*, v. 48, n. 1, p. 67–73, Feb 2018. ISSN 1678-4448. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13538-017-0542-8>>. Citado 4 vezes nas páginas 14, 30, 48 e 64.

Li, G. Identifying Current-Sheet-like Structures in the Solar Wind. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 672, p. L65, jan. 2008. Citado na página 38.

LIMA, E. L. *Análise Real, Vol 1*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1989. Citado na página 41.

LUI, A. T. Y. Grad-Shafranov Reconstruction of Magnetic Flux Ropes in the Near-Earth Space. *Space Science review*, v. 158, p. 43–68, jan. 2011. Citado na página 47.

LUI, A. T. Y. et al. Reconstruction of a magnetic flux rope from THEMIS observations. *Geophysical Research Letters*, v. 35, p. 17, abr. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 52.

MANANKOVA, A.; PUDOVKIN, M.; RUNOV, A. Stationary configurations of the two-dimensional current-carrying plasma sheet: Exact solutions. *Geomagn. Aeron.*, AGU, v. 40, n. 4, p. 430–438, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 14, 36, 44, 46 e 64.

MANANKOVA, A. V. Two-dimensional current-carrying plasma sheet in the near-Earth geomagnetic tail region: a quasi-stationary evolution. *Annales Geophysicae*, v. 21, p. 2259–2269, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 14, 29, 36 e 44.

MANANKOVA, A. V.; PUDOVKIN, M. I. Energy characteristics of a two-dimensional current-carrying plasma. *Geomagn. Aeron.*, v. 36, n. 8, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 14, 36, 44, 46 e 64.

MANANKOVA, A. V.; PUDOVKIN, M. I. The description of a two-dimensional current-carrying plasma sheet in the hydrodynamic approximation of a single-component plasma model. *Geomagn. Aeron.*, v. 39, n. 42, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 14, 36, 44 e 64.

MASUDA, S. et al. A loop-top hard X-ray source in a compact solar flare as evidence for magnetic reconnection. *Nature*, v. 371, p. 495–497, out. 1994. Citado na página 38.

OJEDA-GONZÁLEZ, A. Revisão da solução analítica/numérica da equação de grad-shafranov. In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. SBMAC, 2018. (Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC-2017, v. 6), p. 010428–1–010428–2. ISSN 2359-0793. Disponível em: <<https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2094>>. Citado na página 21.

OJEDA-GONZALEZ, A. et al. Grad-Shafranov Reconstruction: Overview and Improvement of the Numerical Solution Used in Space Physics. *Brazilian Journal of Physics*, v. 45, n. 5, p. 493–509, Oct 2015. Citado 3 vezes nas páginas 21, 55 e 64.

OJEDA-GONZÁLEZ, A.; PRESTES, A.; Laurindo-Sousa, A. N. Discussion About the Magnetic Field Dimensionality, Invariant Axis Condition, and Coulomb Gauge to Solve the Grad-Shafranov Equation. *Brazilian Journal of Physics*, v. 46, n. 4, p. 408–414, 2016. ISSN 1678-4448. Citado 3 vezes nas páginas 18, 29 e 30.

PARNELL, C. E. Magnetic Reconnection: Classical Aspects. In: Rozelot, J. P.; Klein, L.; Vial, J.-C. (Ed.). *Transport and Energy Conversion in the Heliosphere*. [S.l.: s.n.], 2000. (Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, v. 553), p. 61. Citado na página 14.

PHAN, T. D. et al. Electron magnetic reconnection without ion coupling in Earth's turbulent magnetosheath. *nat*, v. 557, p. 202–206, maio 2018. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 38.

PHAN, T. D. et al. A magnetic reconnection X-line extending more than 390 Earth radii in the solar wind. *Nature*, v. 439, p. 175–178, jan. 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 38.

PRIEST, E.; FORBES, T. *Magnetic reconnection. MHD theory and applications*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0-521-48179-1. Citado 3 vezes nas páginas 16, 37 e 38.

PRIEST, E. R.; FORBES, T. G. Steady magnetic reconnection in three dimensions. v. 119, n. 1, p. 211–214, Mar 1989. ISSN 1573-093X. Citado na página 16.

PRIEST, E. R.; FORBES, T. G. Magnetic flipping: Reconnection in three dimensions without null points. v. 97, n. A2, p. 1521–1531, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 56.

SCHINDLER, K. *Physics of Space Plasma Activity*. [S.l.: s.n.], 2006. Citado 3 vezes nas páginas 30, 35 e 36.

SCHOLER, M. Magnetic flux transfer at the magnetopause based on single X line bursty reconnection. *Geophysical Research Letters*, v. 15, p. 291–294, abr. 1988. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 56.

SONNERUP, B.; CAHILL, L. Magnetopause structure and attitude from Explorer 12 observations. *Journal of Geophysical Research*, v. 72, p. 171, 1967. Disponível em: <<http://www.agu.org/pubs/crossref/1967/JZ072i001p00171.shtml>>. Citado na página 15.

SONNERUP, B. U. Å.-. et al. Grad-Shafranov reconstruction: An overview. *J. Geophys. Res.*, v. 111, p. A09204, set. 2006. Citado na página 21.

SONNERUP, B. U. Ö.; GUO, M. Magnetopause transects. *Geophysical Research Letters*, v. 23, n. 25, p. 3679–3682, 1996. ISSN 0094-8276. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/96GL03573>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 38 e 64.

STURROCK, P. A. *Plasma Physics, An Introduction to the Theory of Astrophysical, Geophysical and Laboratory Plasmas*. [S.l.: s.n.], 1994. Citado na página 21.

TREUMANN, R.; BAUMJOHANN, W. Collisionless magnetic reconnection in space plasmas. *Frontiers in Physics*, v. 1, p. 31, 2013. ISSN 2296-424X. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphy.2013.00031>>. Citado na página 16.

WALKER, G. W. Some Problems Illustrating the Forms of Nebulae. *Royal Society of London Proceedings Series A*, v. 91, p. 410–420, jul. 1915. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/93512>>. Citado 8 vezes nas páginas 14, 19, 36, 37, 38, 52, 55 e 58.

YOON, P. H.; LUI, A. T. Y. A class of exact two-dimensional kinetic current sheet equilibria. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 110, n. A1, p. A01202, Jan 2005. Citado 16 vezes nas páginas 14, 21, 30, 32, 35, 36, 37, 39, 41, 42, 46, 50, 52, 53, 55 e 64.

ZWEIBEL, E. G.; YAMADA, M. Perspectives on magnetic reconnection. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 472, n. 2196, p. 20160479, Dec 2016. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.