

Humberto Gimenes Macedo

**Desenvolvimento de Ferramentas
Computacionais para o Estudo de Variações
Geomagnéticas e de Distúrbios Ionosféricos
Propagantes**

São José dos Campos - SP

2022

Humberto Gimenes Macedo

**Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para o
Estudo de Variações Geomagnéticas e de Distúrbios
Ionosféricos Propagantes**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Universidade do Vale do Paraíba, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia.

Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP

Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento - IP&D

Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia

Orientador: Dr.^a Virginia Klausner de Oliveira

Coorientador: Dr. Alan Prestes

São José dos Campos - SP

2022

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE DIVULGAÇÃO DA OBRA

Ficha catalográfica

Macedo, Humberto Gimenes

Desenvolvimento de ferramentas computacionais para o estudo de variações geomagnéticas e de distúrbios ionosféricos propagantes / Humberto Gimenes Macedo; orientadora, Virginia Klausner de Oliveira; co-orientador Alan Prestes. – São José dos Campos, SP, 2022.

1 CD-ROM, 333 p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos. Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia.

Inclui referências

1. Física e Astronomia. 2. análise espectral singular. 3. análise wavelt. 4. terremotos tsunamigênicos. 5. variações geomagnéticas. I. Oliveira, Virginia Klausner de, orient. II. Prestes, Alan, co-orient. III. Universidade do Vale do Paraíba. Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia. IV. Título.

Eu, Humberto Gimenes Macedo, autor(a) da obra acima referenciada:

Autorizo a divulgação total ou parcial da obra impressa, digital ou fixada em outro tipo de mídia, bem como, a sua reprodução total ou parcial, devendo o usuário da reprodução atribuir os créditos ao autor da obra, citando a fonte.

Declaro, para todos os fins e efeitos de direito, que o Trabalho foi elaborado respeitando os princípios da moral e da ética e não violou qualquer direito de propriedade intelectual sob pena de responder civil, criminal, ética e profissionalmente por meus atos.

São José dos Campos, 4 de Abril de 2022.



Autor(a) da Obra

HUMBERTO GIMENES MACEDO

**“DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS PARA O ESTUDO DE
VARIAÇÕES GEOMAGNÉTICAS E DE DISTÚRBIOS IONOSFÉRICOS PROPAGANTES”.**

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, do Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia, do Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento da Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos, SP, pela seguinte banca examinadora:

PROF. DR. MARCIO TADEU DE ASSIS HONORATO MUELLA 

PROF.ª DR.ª VIRGINIA KLAUSNER DE OLIVEIRA 

PROF. DR. ALAN PRESTES 

PROF.ª DR.ª ANNA KARINA FONTES GOMES - IFSP 

PROF.ª DR.ª CLÁUDIA MARIA NICOLI CÂNDIDO 

Prof.ª Dr.ª Lúcia vieira

Diretora do IP&D – Univap

São José dos Campos, 11 de março 2022.

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à Deus por ter me proporcionado a saúde e disposição necessárias para uma empreitada tão grande que é a elaboração de uma dissertação. Por ter trabalhado em mim por meio do Espírito Santo e falado comigo, direta ou indiretamente, durante as inúmeras vezes que rezei o Rosário pedindo à intercessão da Virgem Maria em minha vida. Em momentos de crise, nos quais me senti sozinho, desamparado e muito pequeno no grande sistema das coisas, eu me lembrava que tudo que eu estava sentindo fazia (e faz) parte da minha evolução para ser uma pessoa melhor, pois Deus não coloca nenhum fardo em nossas vidas que não possamos carregar.

Agradeço imensamente aos meus pais Lúcia Helena Gimenes Macedo e Sebastião Donizeti de Macedo pelo apoio incomensurável em todos os aspectos da minha vida, seja pessoal, emocional ou financeiro. Eles, desde a minha graduação, me incentivaram e me forneceram toda a base necessária para que eu pudesse focar literalmente todo o meu tempo e energia nos estudos e no meu desenvolvimento pessoal. À minha irmã Hortência Gimenes Macedo, por sempre estar ao meu lado para me ouvir e apoiar nos momentos difíceis e por me incentivar a levar uma vida mais saudável. Graças a ela, atualmente tenho vários hábitos saudáveis que estão transformando a minha vida. À minha querida namorada Janaina Carvalho Franco por me apoiar em momentos de crise durante os quais pensei que não conseguiria concluir esse trabalho. Também gostaria de agradecer à minha madrinha Luiza Bastos de Souza Maia e ao meu padrinho Jayme de Souza Maia, pois eles desempenharam um papel crucial em minha criação e se tornaram meus segundos pais.

À minha orientadora Dr.^a Virginia Klausner de Oliveira e ao meu coorientador Dr. Alan Prestes pelos conhecimentos repassados, pela leitura minuciosa deste texto e pelas sugestões enriquecedoras que contribuíram para o desenvolvimento e aprimoramento da minha dissertação. Em especial à Dr.^a Klausner, por ter acreditado no meu potencial já durante a graduação e por ter me convidado para trabalhar na área de Física Espacial. Vale destacar que no final de minha graduação e durante todo o período de mestrado, ela se tornou a minha mãe científica, pois pacientemente me ajudou (e ajuda) tanto em questões acadêmicas quanto pessoais. Jamais poderia deixar de citar o meu agradecimento ao Dr. Francisco Carlos Rocha Fernandes, o meu primeiro orientador de iniciação científica, por acreditar na minha capacidade para a carreira científica ao me escolher como aluno de iniciação na área de Física Solar, me ensinando a fazer ciência desde cedo.

Aos meus poucos amigos, com os quais compartilhei diversos momentos de alegria e tristeza ao longo de uma década na Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP), do Ensino Médio ao Mestrado. Em particular, aos meus amigos Leonardo Vigné Ribeiro da Silva, Antonio Fatobene Júnior, Luiz Gustavo da Silva Lopez e Mateus de Oliveira Arcanjo, bem

como às minhas amigas Mariana Cuba Faraco, Isabelle Cristine Pellegrini Lamin e Marina Vedelago Cezarini. Minha eterna gratidão por eles terem sempre me apoiado durante a minha jornada, seja por meio de elogios, conselhos ou críticas construtivas quanto a minha pessoa. Na realidade, agradeço a todos as pessoas que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha jornada na UNIVAP.

Também quero prestar os meus agradecimentos à UNIVAP e ao Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento (IP&D) por terem me fornecido a infraestrutura necessária para a realização desta dissertação e dos meus estudos em geral desde o Ensino Médio. Quero agradecer aos professores do Programa de Pós Graduação em Física e Astronomia da UNIVAP por todos os conhecimentos repassados durante as disciplinas, em especial ao Dr. Alan Prestes pelas excelentes aulas de Física Geral II (graduação) e Eletrodinâmica I (mestrado). Aos meus professores do curso técnico em Informática da UNIVAP, Alberson Wander Sá dos Santos e Wagner dos Santos Clementino de Jesus, cujos ensinamentos foram essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado concedida, assim como à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelas bolsas de iniciação científica concedidas durante a minha graduação: processos 2015/11398-0 e 165321/2017-2, respectivamente. O apoio financeiro dessas instituições foram essenciais ao longo da minha trajetória.

A Matemática, olhada corretamente, possui não apenas verdade, mas suprema beleza, uma beleza fria e austera, como aquela da escultura, sem apelo a qualquer parte da nossa natureza mais fraca, sem as encantadoras armadilhas da pintura ou da música, mas sublimemente pura, e capaz de uma rigorosa perfeição que somente a maior das artes pode exibir.

(Bertrand Russell, 1872-1970)

RESUMO

Esta dissertação aborda as assinaturas geomagnéticas e ionosféricas causadas por eventos solares, sísmicos e oceânicos. A atividade solar, principalmente as ejeções de massa coronal e as regiões de interação corrotantes, podem gerar variações geomagnéticas na forma de tempestades magnéticas e eventos HILDCAA em virtude do acoplamento entre a magnetosfera e o vento solar. Por outro lado, durante a ocorrência de terremotos tsunamigênicos verifica-se o desenvolvimento de ondas de gravidade na atmosfera neutra, pois a gravidade atua como uma força restauradora a fim de reestabelecer o equilíbrio após a perturbação inicial. Estas, por sua vez, propagam-se até a termosfera, onde interagem com o plasma ionosférico por meio de colisões entre íons e neutros, produzindo correntes elétricas e campos magnéticos secundários. Conseqüentemente, variações geomagnéticas irregulares são produzidas, com períodos e amplitudes na ordem de minutos e poucos nT, respectivamente. Além disso, devido ao fenômeno de indução por movimento, os fluxos oceânicos associados a um tsunami também geram variações geomagnéticas, tendo em vista que as águas oceânicas constituem um fluido condutor em movimento que está imerso no campo geomagnético. Em altitudes ionosféricas, as ondas de gravidade colocam a ionosfera em movimento e se manifestam como distúrbios ionosféricos propagantes, isto é, como flutuações de natureza ondulatória na densidade do plasma ionosférico. Esses distúrbios podem ser detectados por meio de várias técnicas de rádio sondagem, mas atualmente as medições do conteúdo eletrônico total obtidas por meio de sinais de satélite são utilizadas com esta finalidade. Tendo em vista o exposto, o propósito do presente trabalho é desenvolver ferramentas computacionais munidas com as principais técnicas matemáticas, tais como análise *wavelet* e decomposição em modo empírico, para a identificação e caracterização de variações geomagnéticas e distúrbios ionosféricos propagantes causados tanto pela atividade solar quanto por terremotos tsunamigênicos. Além de seu propósito científico, este trabalho tem importância prática, pois a compreensão desses fenômenos pode ajudar no desenvolvimento de sistemas de previsão e alerta do Clima Espacial e de catástrofes, podendo evitar ou mitigar prejuízos econômicos e, principalmente, humanos.

Palavras-chave: análise espectral singular; análise *wavelet*; transformada de Hilbert-Huang; HILDCAA; distúrbios ionosféricos propagantes; MATLAB; Python; terremotos tsunamigênicos; variações geomagnéticas.

DEVELOPMENT OF COMPUTATIONAL TOOLS FOR THE STUDY OF GEOMAGNETIC VARIATIONS AND TRAVELING IONOSPHERIC DISTURBANCES

ABSTRACT

This dissertation addresses the geomagnetic and ionospheric signatures caused by solar, seismic, and oceanic events. Solar activity, mainly the coronal mass ejections and co-rotating interaction regions, can generate geomagnetic variations such as magnetic storms and HILDCAA events due to solar wind-magnetosphere coupling. On the other hand, during tsunamigenic earthquakes one can verify the development of gravity waves in the neutral atmosphere, as gravity acts as a restoring force to reestablish the balance after the initial disturbance. These waves propagate to the thermosphere, where they interact with the ionospheric plasma via ion-neutral collisions producing electrical currents and secondary magnetic fields. Consequently, irregular geomagnetic variations are produced with periods and amplitudes in the order of minutes and few nT, respectively. Furthermore, due to motional induction, the oceanic flows associated with a tsunami also generate geomagnetic variations since oceanic waters are a moving conducting fluid that is immersed in the geomagnetic field. At ionospheric altitudes, the gravity waves set the ionosphere in motion and manifest themselves as traveling ionospheric disturbances, i.e., as wavelike fluctuations in the density of the ionospheric plasma. These disturbances can be detected by various radio techniques, but a more recent one uses measurements of the total electronic content obtained from satellite signals. In view of the above, the purpose of this work is to develop computational tools equipped with the main mathematical techniques, such as wavelet analysis and empirical mode decomposition, to identify and characterize geomagnetic variations and traveling ionospheric disturbances caused by both solar activity and tsunamigenic earthquakes. Besides its scientific purpose, this work is of practical importance as the understanding of these phenomena can assist in the development of space weather and disaster prediction and warning systems, which can prevent or mitigate economic and, mainly, human losses.

Keywords: geomagnetic variations; Hilbert-Huang transform; HILDCAA; traveling ionospheric disturbances; MATLAB; Python; singular spectrum analysis; tsunamigenic earthquakes; wavelet analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Esboço do campo geomagnético. Ele é resultado da sobreposição de campos magnéticos oriundos de fontes internas e externas à superfície terrestre. 12
- Figura 2 – Ilustração do modelo mecânico de um dínamo auto-excitado. Este é composto por um disco condutor rotativo imerso em um campo magnético \mathbf{B} . Em decorrência do movimento, uma corrente elétrica radial I é estabelecida. Ela percorre o fio espiral em torno do eixo do disco, criando um campo magnético que reforça o campo original e intensifica a própria corrente. 14
- Figura 3 – Os gregos identificaram a capacidade da magnetita de atrair o ferro, ao passo que os chineses verificaram a capacidade direcional da magnetita e construíram a bússola Si Nan. 16
- Figura 4 – A declinação magnética é um elemento geomagnético importante para a navegação, sendo definida como o ângulo entre os polos norte geográfico e magnético. Ela é positiva para leste do norte geográfico e negativa para oeste dele. A declinação é uma grandeza que depende tanto da longitude quanto do tempo. 18
- Figura 5 – Durante o reinado da rainha Elizabeth I, Gilbert publicou sua obra *De Magnete*. Ela é um compilado de todo o conhecimento disponível sobre magnetismo, junto com diversas contribuições próprias obtidas por meio de experimentos que realizou. 19
- Figura 6 – No início do século XIX, Oersted descobriu que há uma relação entre magnetismo e cargas em movimento. Ele observou o comportamento de uma bússola próxima de um fio condutor de corrente. 20
- Figura 7 – Ilustração das componentes do campo geomagnético em um ponto da superfície terrestre no hemisfério norte. \mathbf{B} é o vetor do campo geomagnético neste ponto (B sua intensidade), H é a componente horizontal, X é a componente na direção norte, Y é a componente na direção leste e Z é a componente vertical. D é a declinação magnética e I é a inclinação magnética. 23
- Figura 8 – Diagrama ilustrando a diferença entre os polos e equadores geográficos, magnéticos e geomagnéticos. A seta em negrito representa o momento de dipolo magnético, cujo ângulo de $11,5^\circ$ com o eixo de rotação da Terra produz um campo que melhor se aproxima do real. 24

| | |
|--|----|
| Figura 9 – Arco circular de raio b situado no plano xy e centrado na origem. A corrente I circula no sentido horário e produz um campo magnético \mathbf{B} com simetria azimutal. O ponto P é especificado pelo vetor posição \mathbf{r} , enquanto o elemento diferencial de corrente $I d\mathbf{L}'$ é especificado pelo vetor posição \mathbf{r}' | 25 |
| Figura 10 – Representação tridimensional do campo magnético produzido pela distribuição de corrente descrita na Figura 9. O momento de dipolo magnético está na direção $-\mathbf{e}_z$. Assim, o polo norte está embaixo e o sul em cima, como ocorre com o campo geomagnético. A intensidade do campo é maior na proximidade dos polos. | 28 |
| Figura 11 – Representação esquemática do sistema de coordenadas esféricas cuja origem está no centro da Terra. A coordenada r representa a distância radial do ponto P , θ a sua colatitude e ϕ sua longitude. | 31 |
| Figura 12 – Exemplos específicos de harmônicos esféricos superficiais zonal, tesseral e setorial. | 34 |
| Figura 13 – Representação artística do vento solar. | 38 |
| Figura 14 – Representação esquemática da magnetosfera terrestre. | 41 |
| Figura 15 – A reconexão magnética é o principal mecanismo pelo qual energia, massa e momento são transferidos do vento solar para a magnetosfera, e pelo qual a energia magnética armazenada na magnetocauda é liberada em eventos explosivos conhecidos como subtempestades magnetosféricas. | 43 |
| Figura 16 – Nos cinturões de radiação, as partículas estão sujeitas a um movimento de rotação em torno das linhas do campo geomagnético, oscilando entre Norte e Sul. Além disso, os elétrons e prótons são caracterizados por outro movimento em direções longitudinalmente opostas, gerando a chamada corrente de anel. | 44 |
| Figura 17 – Representação esquemática dos eletrojetos aurorais EEJ e WEJ. | 46 |
| Figura 18 – Localização em coordenadas geomagnéticas dos 12 observatórios na zona auroral a partir dos quais o índice AE é derivado. Os círculos de latitude estão desenhados em intervalos de 10° , enquanto os círculos de longitude estão separados por intervalos de 30° | 47 |
| Figura 19 – Ilustração da superposição dos desvios da componente H a partir de um nível de referência em cada um dos 12 observatórios associados com a derivação do índice AE no dia 24/12/2002. Os envelopes superior e inferior desses desvios definem os índices AU e AL, respectivamente. O índice AE é dado pela diferença AU - AL. Isso elimina a influência da corrente de anel equatorial. | 48 |

| | |
|---|----|
| Figura 20 – Este mapa global apresenta a localização, para o ano de 2002, dos observatórios magnéticos que contribuem para a concepção dos três principais índices geomagnéticos: Dst (triângulo sólido), AE (sinal de +) e Kp (círculo sólido). O índice Kp não é utilizado neste trabalho e não será descrito neste texto. | 50 |
| Figura 21 – O índice Dst é derivado da componente H registrada por observatórios em regiões de baixa latitude de hora em hora. Por este motivo, as fases de uma tempestade geomagnética típica (SSC, inicial, principal e recuperação) são classificadas com base no índice Dst. Esta é uma curva suavizada do índice Dst durante uma tempestade geomagnética com todas as fases, visto que nas curvas reais as coisas não são tão simples assim. | 52 |
| Figura 22 – As CMEs são estruturas tridimensionais de grande escala (plasma e campo magnético) que dominam o meio interplanetário durante o máximo solar. Elas produzem as tempestades geomagnéticas mais intensas. | 54 |
| Figura 23 – Imagem de um imenso buraco coronal obtida pelo telescópio de raios X moles SXT (do inglês <i>Soft X-ray Telescope</i>) do satélite Yohkoh no dia 6 de dezembro de 2000. | 55 |
| Figura 24 – Ilustração da interação entre um feixe lento (A) e um feixe rápido (B) do vento solar com a subsequente formação de uma região de interação corrotante (área sombreada) na qual o plasma está comprimido. Em grandes distâncias do Sol, esta região é delimitada por um par de choques (FS e RS) que se desenvolvem em virtude de discontinuidades na velocidade do vento solar. A interface de feixes demarca a fronteira entre A e B, sendo caracterizada por uma mudança abrupta em vários parâmetros do vento solar, com exceção da intensidade do campo magnético. | 56 |
| Figura 25 – Perfil típico do índice Dst para uma tempestade geomagnética causada por uma CIR. Durante a fase principal, o índice Dst não apresenta um decréscimo tão súbito e intenso como ocorre em tempestades causadas por ICMEs. Apesar disso, elas podem apresentar durações mais prolongadas. | 57 |
| Figura 26 – Ilustração da possível conexão entre correntes magnetosféricas e ionosféricas durante uma subtempestade magnetosférica. | 58 |

| | |
|--|----|
| Figura 27 – Uma sequência de imagens da atividade auroral desenvolvida durante uma subtempestade magnetosférica. As imagens estão na porção UV do espectro eletromagnético e foram obtidas pelo satélite de órbita polar <i>Dynamics Explorer 1</i> no dia 13 de junho de 1983. Observe como o arco auroral discreto se expande longitudinalmente e em direção ao polo à medida que a subtempestade se desenvolve. O ordenamento das imagens está de cima para baixo e da esquerda para a direita. | 59 |
| Figura 28 – A atmosfera absorve fortemente certas porções do espectro eletromagnético, mas há outras em que isso não acontece. De fato, nas chamadas janelas atmosféricas a atmosfera é essencialmente transparente à radiação. | 65 |
| Figura 29 – O efeito estufa ocorre por conta da presença de gases como dióxido de carbono e vapor d’água na atmosfera. Eles aprisionam a radiação IR emitida pela superfície terrestre, prevenindo que ela esfrie. | 66 |
| Figura 30 – Perfil vertical de temperatura da atmosfera neutra até 110 km de altitude, junto com três sistemas de nomenclatura distintos. | 67 |
| Figura 31 – Camadas atmosféricas baseadas na temperatura (laranja), composição (verde) e propriedades elétricas (azul). | 71 |
| Figura 32 – Gráficos da pressão e densidade atmosféricas para uma camada atmosférica em equilíbrio isotérmico com altura de escala constante. | 73 |
| Figura 33 – Gráfico da pressão em função da altura (até 10 km) para uma camada atmosférica com taxa de lapso constante. | 76 |
| Figura 34 – À medida que as GWs se propagam na atmosfera, elas crescem em amplitude devido ao decréscimo exponencial da densidade atmosférica com a altura. | 81 |
| Figura 35 – Ilustração de um tsunami gerado em decorrência de um terremoto submarino. Um tsunami pode gerar GWs e AGWs que se propagam na atmosfera neutra. Suas amplitudes aumentam em virtude do decréscimo da densidade atmosférica com a altura. Analogamente, as ondas de Rayleigh de um terremoto causam deslocamentos verticais no solo que podem produzir ondas acústicas com amplitudes crescentes. Em todo caso, as ondas geram perturbações significativas no sistema ionosférico/termosférico. | 82 |
| Figura 36 – A telegrafia sem fio é uma das maravilhas advindas da era das invenções no final do século XIX e início do século XX. Marconi foi uma figura de destaque em seu desenvolvimento. | 85 |
| Figura 37 – Em 1902, Arthur E. Kennelly nos Estados Unidos e Oliver Heaviside no Reino Unido propuseram, independentemente, a existência de uma camada refletora como um mecanismo para a propagação de ondas de rádio em torno da curvatura da Terra. | 87 |

| | |
|---|-----|
| Figura 38 – Um retrato informal de E. V. Appleton na Universidade de Edimburgo. | 89 |
| Figura 39 – Representação esquemática do cenário considerado por Chapman (1931a) para estudar a absorção da radiação monocromática em uma atmosfera neutra de composição uniforme distribuída exponencialmente. | 92 |
| Figura 40 – Gráfico da função de produção de Chapman para diferentes valores do ângulo zenital solar χ . À medida que χ aumenta, o valor máximo da taxa de produção decresce e a altura na qual ele ocorre é deslocada. | 98 |
| Figura 41 – Gráfico tridimensional da função de produção de Chapman. Conforme χ aumenta, o valor máximo da taxa de produção decresce, enquanto a altura onde ele ocorre é deslocada. | 99 |
| Figura 42 – Geometria para o cômputo da função de incidência rasante de Chapman. O ponto P acima da superfície terrestre está exagerado em relação ao raio da Terra para propósitos ilustrativos. | 100 |
| Figura 43 – Gráfico da função de incidência rasante de Chapman para valores diferentes de x . À medida que x aumenta, verifica-se que $\text{Ch}(x, \chi)$ se aproxima de $\sec \chi$ | 101 |
| Figura 44 – Perfis verticais típicos em média latitude da temperatura da atmosfera neutra e da densidade eletrônica do plasma ionosférico (diurno e noturno). | 105 |
| Figura 45 – Composição da ionosfera diurna e da atmosfera neutra com base em medições obtidas com espectrômetros de massa durante os Anos Internacionais de Sol Calmo (IQSY, do inglês <i>International Quiet Solar Years</i>). | 106 |
| Figura 46 – O GPS consiste de três segmentos, a saber: segmento espacial, segmento de controle e segmento de usuário. O segmento espacial é formado por uma constelação de 24 satélites distribuídos em 6 planos orbitais (4 satélites em cada plano), enquanto o segmento de controle é constituído por várias estações em terra que monitoram e controlam a constelação de satélites. Por fim, o segmento de usuário é composto por receptores GPS que processam os sinais GPS a fim de determinar suas respectivas localizações. | 109 |
| Figura 47 – Distribuição geográfica das instalações que compõem o segmento de controle. | 112 |
| Figura 48 – A trilateração permite determinar a localização de um receptor GPS. | 113 |
| Figura 49 – Ilustração do gráfico da <i>wavelet</i> de Marr para diferentes valores de σ . Ela é real, par e apresenta uma boa localização temporal. | 121 |
| Figura 50 – Ilustração do gráfico da transformada de Fourier (valor absoluto) da <i>wavelet</i> de Marr para diferentes valores de σ . Ela é real, par e apresenta uma boa localização em frequência. | 123 |

| | |
|---|-----|
| Figura 51 – A <i>wavelet</i> de Morlet é uma onda complexa no interior de um envelope gaussiano. A frequência ω_0 controla as oscilações dentro do envelope e, em geral, o seu valor é $\omega_0 = \pi(2/\ln(2))^{1/2}$ | 125 |
| Figura 52 – Ilustração do gráfico da transformada de Fourier (valor absoluto) da <i>wavelet</i> de Morlet. | 125 |
| Figura 53 – Ilustração do gráfico da constante de admissibilidade da <i>wavelet</i> de Morlet em função de ω_0 | 127 |
| Figura 54 – Ilustração do gráfico da energia da <i>wavelet</i> de Morlet em função de ω_0 | 128 |
| Figura 55 – Ilustração do gráfico da <i>wavelet</i> de Marr para diferentes valores dos parâmetros de escala e translação. | 129 |
| Figura 56 – A CWT mensura o grau de semelhança entre um sinal e as versões dilatadas/comprimidas e transladadas de uma <i>wavelet</i> . Isso produz um plano tempo-escala. | 130 |
| Figura 57 – Gráficos da <i>wavelet</i> de Haar ψ e de sua transformada de Fourier $\hat{\psi}$ em valor absoluto. Ela é a mais simples de todas as <i>wavelets</i> , sendo a primeira <i>wavelet</i> conhecida a gerar uma base ortonormal de <i>wavelets</i> para $L^2(\mathbb{R})$ considerando uma discretização diádica. | 140 |
| Figura 58 – Para o caso $j' > j$, o suporte de ψ , que tem comprimento 1, sempre estará contido em um intervalo no qual $\psi_{j-j',s}$ é constante. A presente figura ilustra este fato para o caso das <i>wavelets</i> $\psi_{-1,s}$ (parte superior) e $\psi_{-2,s}$ (parte inferior), com $s = -1, 0, 1$ | 142 |
| Figura 59 – A <i>wavelet</i> de Shannon pode ser vista como a contraparte da <i>wavelet</i> de Haar em termos de localização tempo-frequência. Isso significa que a <i>wavelet</i> de Shannon apresenta uma boa localização em frequência (tem suporte compacto), mas uma má localização em tempo. | 142 |
| Figura 60 – As <i>wavelets</i> de Meyer são obtidas aprimorando a <i>wavelet</i> de Shannon no domínio da frequência, onde as discontinuidades são substituídas por curvas suaves. A presente figura ilustra a <i>wavelet</i> de Meyer para a transformada de Fourier definida em termos da função ν da equação (6.24). | 145 |
| Figura 61 – Ilustração dos gráficos do valor absoluto das funções de transferência \hat{m}_φ e \hat{m}_ψ associadas aos filtros escala e <i>wavelet</i> da MRA de Haar, respectivamente. | 174 |
| Figura 62 – Ilustração dos gráficos das funções escala e <i>wavelet</i> da MRA de Shannon. | 181 |
| Figura 63 – Gráfico das funções escala e <i>wavelet</i> de Daubechies para $N = 2, 4$ e 6 . Observe o aumento do suporte e do grau de suavidade das funções à medida que N aumenta. | 183 |

| | |
|--|-----|
| Figura 64 – A FWT é um algoritmo implementado pelo encadeamento de banco de filtros de dois canais que efetuam o processo de decomposição em diversos níveis tomando como ponto de partida as sequências de aproximação. | 185 |
| Figura 65 – A IFWT é um algoritmo implementado pelo encadeamento de banco de filtros de dois canais que efetuam o processo de reconstrução em diversos níveis tomando como ponto de partida um par de sequências de aproximação e detalhe. | 186 |
| Figura 66 – A representação geométrica de um sinal analítico $z(t) = x(t) + jy(t)$ é um fasor rotacionando no plano complexo com velocidade angular $\omega(t)$. O sinal de $\omega(t)$ determina a direção de rotação do fasor, sendo que ela é no sentido anti-horário para $\omega(t) > 0$ e horário quando $\omega(t) < 0$ | 190 |
| Figura 67 – O sinal analítico $z(t)$ é um sinal bidimensional cujo valor em cada instante de tempo t é especificado por suas partes real e imaginária, $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Considerando $x(t) = \text{sen}(t)$ (curva azul), sua HT é $y(t) = -\cos(t)$ (curva verde), de modo que $z(t) = \exp(-jt)$ (curva vermelha). A curva rosa representa o lugar geométrico dos pontos descritos pela ponta do fasor conforme ele rotaciona no plano complexo. | 191 |
| Figura 68 – A frequência instantânea obtida por meio da HT apresenta problemas sérios, tais como frequências negativas e flutuações indesejadas. Isso faz com que o seu significado físico seja perdido. Dessa forma, ela não pode ser computada inadvertidamente para sinais arbitrários, sendo necessário o uso de técnicas adequadas de pré-processamento para superar esses problemas. | 192 |
| Figura 69 – Fluxograma do algoritmo da EMD. | 198 |
| Figura 70 – Ilustração da primeira iteração ($k = 1$) para a extração da primeira IMF ($i = 1$). | 199 |
| Figura 71 – Um total de quatro IMFs foram obtidas para o sinal da equação (7.13), sendo que as duas primeiras, $c_1(t)$ e $c_2(t)$, representam, em essência, as componentes de 10 e 60 Hz do sinal. Como comentado anteriormente, IMFs de baixa frequência as vezes são geradas por conta de problemas com a interpolação nas extremidade do sinal. | 200 |
| Figura 72 – Esta figura apresenta o gráfico de uma senoide cujo perfil ondulatório está deformado não linearmente devido a uma modulação em frequência, assim como o seu respectivo espectro de Hilbert e espectro de potência <i>wavelet</i> | 204 |
| Figura 73 – Esta figura apresenta uma senoide cujo conteúdo espectral muda abruptamente de 2 Hz para 1 Hz, ilustrando um sinal de um processo não estacionário. Os espectros de Hilbert e de potência <i>wavelet</i> do sinal também são mostrados. | 205 |

- Figura 74 – Fluxograma mostrando a relação entre as fases dos estágios de decomposição e reconstrução da SSA básica. Especificamente, o estágio de decomposição é composto pelas fases de incorporação e decomposição SVD, ao passo que o de reconstrução compreende as fases de agrupamento e média diagonal. A ideia fundamental da SSA básica é decompor a série temporal \mathbb{X}_N em várias séries temporais separáveis $\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbb{X}}_m$ que podem ser interpretadas como componentes de tendência, oscilação ou ruído. 208
- Figura 75 – Para ilustrar o funcionamento da SSA básica, a série temporal em azul será utilizada ao longo deste capítulo. Ela corresponde à soma de uma componente de tendência parabólica, de duas componentes de oscilação na forma de senoides (2 e 8 Hz) e de uma componente de ruído sem estrutura. Essas componentes estão ilustradas nos gráficos abaixo da série temporal. 209
- Figura 76 – Ilustração da matriz de trajetória da série temporal da Figura 75, em que $L = N/2$ com $N = 1024$. Dessa forma, a matriz de trajetória tem $L = 512$ linhas e $K = 513$ colunas, onde cada linha representa um vetor defasado de dimensão K , enquanto cada coluna é um vetor defasado de dimensão L . Ela apresenta uma estrutura antidiagonal justamente por se tratar de uma matriz de Hankel. 210
- Figura 77 – A matriz de trajetória da Figura 76 foi decomposta em $d = 512$ matrizes elementares, sendo que as 12 primeiras estão ilustradas na presente figura. Observe que elas não são matrizes de Hankel e, portanto, não apresentam um aspecto antidiagonal. Apesar disso, é possível identificar visualmente as componentes de tendência (\mathbf{X}_1 até \mathbf{X}_3), oscilação (\mathbf{X}_4 e \mathbf{X}_5 para 2 Hz, bem como \mathbf{X}_6 , \mathbf{X}_7 e \mathbf{X}_{12} para 8 Hz) e ruído (as demais matrizes elementares). 213
- Figura 78 – Os valores singulares de \mathbf{X} podem ser utilizados como uma medida da contribuição relativa de cada matriz elementar \mathbf{X}_i na SVD de \mathbf{X} . Conseqüentemente, é possível definir a contribuição acumulativa das matrizes elementares $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_i$. A presente figura mostra as contribuições relativas e acumulativas, em termos percentuais, das matrizes elementares da Figura 77. 216

- Figura 79 – As direções principais U_i repetem o comportamento das componentes de uma série temporal. A presente figura ilustra as direções principais relativas às matrizes elementares da Figura 77, juntamente com suas respectivas contribuições relativas no título de cada gráfico. Infere-se visualmente as componentes de tendência (U_1 até U_3), oscilação (U_4 e U_5 para 2 Hz, bem como U_6, U_7 e U_{12} para 8 Hz) e ruído (as demais direções principais). 218
- Figura 80 – O operador de Hankelização \mathcal{H} transforma uma matriz arbitrária em uma matriz de Hankel por meio da média aritmética das antidiagonais da matriz original. O efeito de \mathcal{H} sobre as matrizes elementares da Figura 77 é ilustrado na presente figura, sendo possível observar que elas apresentam um aspecto antidiagonal justamente por serem matrizes de Hankel. 220
- Figura 81 – Por inspeção visual das matrizes da Figura 80, um agrupamento razoável pôde ser efetuado. Um total de quatro subconjuntos disjuntos de $I = \{1, 2, \dots, 512\}$ foram determinados, em que $I_1 = \{1, 2, 3\}$ refere-se à tendência parabólica, $I_2 = \{4, 5\}$ à senoide de 2 Hz, $I_3 = \{6, 7, 12\}$ à senoide de 8 Hz e $I_4 = I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$ ao ruído. Com esse agrupamento, quatro séries temporais foram obtidas, uma para cada componente da série temporal original. 222
- Figura 82 – Uma vez identificada a componente de ruído de uma série temporal, ela pode ser removida desta última de modo a produzir uma versão da série com ruído reduzido. A presente figura ilustra esse fato para a série temporal da Figura 75. 222
- Figura 83 – A matriz de **w**-correlação é uma importante ferramenta que auxilia no agrupamento durante o estágio de reconstrução, seja ele feito por meio de mecanismos visuais ou automatizados. A presente figura apresenta a matriz de **w**-correlação em valores absolutos das componentes elementares da série temporal da Figura 75, com ênfase nas 12 primeiras componentes elementares. 225
- Figura 84 – A tela principal do Hilda contém praticamente todas as suas funcionalidades. Na parte esquerda da tela, é possível configurar os critérios para a identificação de um ou mais eventos HILDCAA, enquanto na parte direita há dois painéis para apresentar os gráficos dos índices AE e Dst (ou SYM-H) dos candidatos e dos eventos HILDCAA (ou não). 227

- Figura 85 – No endereço OMNIWeb, sob o item **OMNI data** o usuário precisará escolher as opções **Low resolution OMNIWeb** ou **High resolution OMNIWeb** para ter acesso as páginas relativas aos conteúdos em baixa e alta resolução, respectivamente. Depois disso, ele deverá escolher a opção **Plots, listings, output files** sob a aba **Browse and Retrieve OMNI Data** na nova página que será aberta. 228
- Figura 86 – Ilustração da página que é aberta após a escolha da opção **High resolution OMNIWeb** na página inicial e da opção **Plots, listings, output files** sob a aba **Browse and Retrieve OMNI Data** na página subsequente. Ela contém várias caixas de seleção para que o usuário indique quais índices geomagnéticos, parâmetros do vento solar e componentes do IMF devem constar no arquivo a ser gerado. O usuário também pode indicar a resolução e o período de tempo que as séries temporais irão abranger. 229
- Figura 87 – Os arquivos gerados sempre formam um par. O arquivo com extensão **.fmt** contém o significado de cada uma das colunas do arquivo com extensão **.lst**. Este último contém as séries temporais selecionadas pelo usuário dispostas em colunas. 230
- Figura 88 – Após a leitura dos arquivos, as funcionalidades da tela principal do Hilda tornam-se parcialmente disponíveis para o usuário. Em particular, os calendários suspensos (**Start Date** e **End Date**) e as 4 caixas de texto. Por padrão, elas são preenchidas em conformidade com os critérios propostos por Tsurutani e Gonzalez (1987) no momento em que são habilitadas. 230
- Figura 89 – Esse fluxograma descreve o processo de busca por candidatos a evento HILDCAA. A busca é feita entre as datas informadas em **Start Date** e **End Date**. Ela tem como base os valores informados pelo usuário nas caixas de texto relativas aos três primeiros critérios. 232
- Figura 90 – Ilustração da tela principal do Hilda após a busca por candidatos a evento HILDCAA ter sido realizada. Os candidatos encontrados são listados por ordem de ocorrência na tabela do canto inferior esquerdo. Ao selecionar uma linha da tabela, o Hilda gera os gráficos dos índices AE e SYM-H (ou Dst) para o período indicado nas colunas **Start Time** e **End Time**. Eles aparecem nos painéis à direita da tela. 232

- Figura 91 – O Hilda permite que o usuário exporte a tabela inteira em um arquivo de texto. Ao selecionar um candidato ou evento HILDCAA (ou não) - uma linha da tabela -, o Hilda também admite que o usuário exporte os índices geomagnéticos (AE e SYM-H) correspondentes, substitua os valores atuais da linha selecionada pelos valores iniciais e altere o valor da coluna `Hildcaa` ?. Para isso, basta pressionar o botão direito do *mouse* em qualquer parte da tabela para selecionar a operação desejada. 234
- Figura 92 – O Hilda apresenta uma janela com caixas de seleção relativas ao conteúdo dos arquivos de baixa e alta resolução fornecidos pelo usuário. Ele tem a liberdade de marcar até 5 caixas de seleção sob `High Resolution Parameters` ou `Low Resolution Parameters`. Os gráficos das componentes do IMF, dos índices geomagnéticos e dos parâmetros do vento solar escolhidos em cada resolução são mostrados em janelas diferentes ao pressionar o botão `Plot Parameters`. 234
- Figura 93 – Essa janela contém os gráficos relativos a três caixas de seleção marcadas sob o painel de alta resolução (ver Figura 92). Especificamente, tem-se a componente B_z do IMF (`BZ, nT (GSM)`), a velocidade (`Speed, km/s`) e a densidade (`Proton Density, n/cc`) do vento solar. As regiões sombreadas são dias adicionais colocados antes e depois. 235
- Figura 94 – O Hilda permite a remoção da fase principal de uma tempestade geomagnética ocorrendo no período entre `Start Time` e `End Time` de um candidato a evento HILDCAA. Para isso, ele dispõe de duas barras deslizantes para que o usuário possa indicar novos valores para `Start Time` e `End Time` a fim de remover a fase principal. 236
- Figura 95 – Essa janela permite que o usuário gere histogramas dos parâmetros do vento solar, dos índices geomagnéticos e das componentes do IMF em cada uma das resoluções. O usuário escolhe os histogramas que deseja nas caixas de seleção sob `High Resolution Parameters` ou `Low Resolution Parameters`. O tipo de histograma é especificado no menu `Status`. Caso o valor seja Y, os histogramas são gerados considerando apenas os períodos de ocorrência de um evento HILDCAA. Caso o valor seja N, eles são gerados considerando apenas os períodos de não ocorrência. 237

| | |
|---|-----|
| Figura 96 – Essa janela contém os histogramas relativos a componente B_z do IMF (BZ, nT (GSM)), a velocidade (Speed, km/s) e a densidade (Proton Density, n/cc) do vento solar. Em cada histograma, há uma curva gaussiana em vermelho cuja média e desvio padrão estão indicados na legenda no canto superior direito. Os histogramas foram gerados por meio da janela ilustrada na Figura 95 ao marcar as caixas de seleção sob High Resolution Parameters e selecionar a opção Y no menu suspenso Status | 238 |
| Figura 97 – Essa janela permite que o usuário obtenha informações sobre o propósito do Hilda, bem como de seus desenvolvedores. Ela contém a foto, o nome completo e o endereço eletrônico de cada um deles. Ao pressionar em um dos nomes (em azul), o navegador do usuário é aberto no currículo Lattes do respectivo desenvolvedor. | 239 |
| Figura 98 – Eventos HILDCAA/HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2008 e 2010. | 240 |
| Figura 99 – Gráficos dos índices AE e SYM-H referentes aos eventos HILDCAA identificados pelo Hilda em 2008. | 240 |
| Figura 100 – Gráficos dos índices AE e SYM-H referentes aos eventos HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2008. | 242 |
| Figura 100 – Gráficos dos índices AE e SYM-H referentes aos eventos HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2008 (cont.). | 243 |
| Figura 101 – Gráficos dos índices AE e SYM-H referentes aos eventos HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2010. | 244 |
| Figura 102 – Ilustração da tela principal do MAGNAMI. Nessa tela, o usuário pode inserir os 5 dias geomagneticamente mais calmos, obter informações das estações relativas aos arquivos fornecidos e visualizar os gráficos dos elementos do campo geomagnético junto de seus respectivos resíduos. Além disso, o usuário também pode aplicar alguma metodologia matemática (CWT, DWT ou EMD) nos elementos geomagnéticos e em seus respectivos resíduos. | 246 |
| Figura 103 – Ilustração da estrutura interna de um arquivo com extensão .min no formato IAGA 2002 relativo ao observatório de Huancayo (HUA) no Peru. | 247 |
| Figura 104 – O MAGNAMI fornece um calendário para a escolha dos 5 dias geomagneticamente mais calmos do mês e ano de ocorrência de um evento. Eles são adicionados à lista dos dias calmos por meio do botão Adicionar , removidos com o botão Remover e armazenados com o botão Aplicar . Uma mensagem de aviso é emitida antes que os dias calmos sejam realmente aplicados. Por outro lado, uma mensagem de erro é emitida se o usuário tentar fornecer os arquivos das estações antes de aplicar os dias calmos. | 249 |

| | |
|--|-----|
| Figura 105–O MAGNAMI fornece uma caixa de diálogo para a seleção dos arquivos com extensão .min pertinentes às estações de interesse. A caixa de diálogo é aberta por meio do menu Arquivo » Abrir ou pela opção Adicionar Estações no menu suspenso da tabela Informações sobre cada estação | 250 |
| Figura 106–Assim que o usuário fornece os arquivos com extensão .min ao MAGNAMI, o processo de leitura se inicia. Se a leitura for bem-sucedida, a tabela Informações sobre cada estação é preenchida com informações relativas às estações dos arquivos. | 250 |
| Figura 107–Para cada uma das estações, o MAGNAMI permite que o usuário insira 5 arquivos relativos aos 5 dias calmos informados anteriormente. Isso é feito por meio de uma caixa de diálogo. Caso o dia de algum arquivo não corresponda a um dia calmo, o MAGNAMI emite uma mensagem de erro. | 251 |
| Figura 108–A tela ilustrada nesta figura permite que o usuário remova uma ou mais estações de forma simultânea. Elas são indicadas por meio de seus códigos IAGA em uma lista na qual múltiplos itens podem ser selecionados simultaneamente. | 252 |
| Figura 109–Na tela principal do MAGNAMI, o usuário pode visualizar os gráficos dos elementos geomagnéticos, das respectivas linhas de base Sq e dos resíduos associados para cada uma das estações selecionadas. | 253 |
| Figura 110–O MAGNAMI permite que o usuário altere o gráfico do elemento geomagnético por meio da caixa de combinação Componente , assim como o horário inicial desse gráfico por meio da caixa de combinação Início do Evento . Os horários inicial e final do gráfico do resíduo também podem ser alterados, mas por intermédio das caixas de combinação Hora Inicial e Hora Final . O intervalo de tempo entre esses horários deve ser de no mínimo 2 h. | 254 |
| Figura 111–Resíduo da componente <i>H</i> para a estação HUA no intervalo de tempo entre os horários 12:33:00 e 18:33:00 UT especificados em Hora Inicial e Hora Final , respectivamente. | 255 |
| Figura 112–Nas caixas de combinação Metodologia e Onde Aplicar ? , o usuário especifica, respectivamente, a metodologia matemática (CWT, EMD ou EWC) que deseja utilizar e onde ela deverá ser aplicada (componente ou resíduo). | 255 |
| Figura 113–O MAGNAMI gera os periódogramas relativos aos resíduos de um elemento geomagnético para cada uma das estações selecionadas na tabela. Em vez dos resíduos, o mesmo pode ser feito para os elementos geomagnéticos. | 256 |

| | |
|--|-----|
| Figura 114–A aplicação da EMD nos elementos geomagnéticos e respectivos resíduos exige uma configuração prévia mais aprofundada. O MAGNAMI dispõe de uma tela para que o usuário realize essa configuração. Ela pode operar nos modos componente e resíduo. | 257 |
| Figura 115–Ilustração dos gráficos da EMD do resíduo da componente <i>H</i> associado à estação HUA no intervalo de tempo entre 12:33:00 e 18:33:00 UT. Especificamente, tem-se o gráfico do resíduo, de suas três primeiras IMFs, da soma dessas IMFs e do residual obtido com a EMD. | 258 |
| Figura 116–O cômputo dos índices EWC relativos aos elementos geomagnéticos e seus respectivos resíduos também exige uma configuração prévia. O MAGNAMI dispõe de uma tela para isso, que opera nos modos componente e resíduo. | 258 |
| Figura 117–Ilustração dos gráficos de barras dos índices EWC referentes aos resíduos da componente <i>H</i> para as estações API, HUA e IPM. Os gráficos compreendem o intervalo de tempo entre 12:33:00 e 18:33:00 UT, e os índices foram calculados em alta resolução utilizando a <i>wavelet db2</i> | 259 |
| Figura 118–Comparação dos gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente <i>Z</i> (HUA). A curva em verde denota o resíduo obtido com dados do nível do mar, mas esse recurso ainda não está disponível na versão atual do MAGNAMI. | 260 |
| Figura 119–Comparação dos gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente <i>H</i> (HUA). | 261 |
| Figura 120–Comparação dos periodogramas dos resíduos da componente <i>Z</i> (HUA E IPM). A linha branca tracejada indica a hora de chegada do tsunami no observatório: após 4 h em HUA e após 5 h em IPM. Os periodogramas compreendem as 20 h após o início do sismo (06:34 UT). | 262 |
| Figura 121–Comparação dos periodogramas dos resíduos da componente <i>H</i> (HUA e IPM). | 263 |
| Figura 122–Comparação dos índices EWC para os resíduos da componente <i>Z</i> (HUA e IPM). A linha vermelha tracejada indica a hora de chegada do tsunami no observatório. | 263 |
| Figura 123–Comparação dos índices EWC para os resíduos da componente <i>H</i> (HUA e IPM). | 264 |
| Figura 124–O diagrama TTT à esquerda contém as IMFs obtidas dos resíduos da componente <i>Z</i> de todos os observatórios, enquanto o diagrama TTT da direita contém as IMFs relacionadas aos resíduos da componente <i>H</i> . O eixo vertical é a distância entre o epicentro e o observatório. O eixo horizontal é o tempo em horas a partir do início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam as variações em N-invertido. | 264 |

| | |
|--|-----|
| Figura 125–Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos das componentes Z e H (IPM e EYR). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido. | 265 |
| Figura 126–O IBGE disponibiliza dados GPS em formato RINEX das estações da RBMC no endereço Dados RBMC. Neste endereço, é preciso escolher a pasta referente ao ano desejado, o dia do ano e os arquivos em formato .zip das estações de interesse. | 268 |
| Figura 127–O programa do Dr. Gopi produz dois arquivos ASCII, um com extensão .Cmn e outro com extensão .Std. | 269 |
| Figura 128–O Tessa apresenta uma única tela dividida em dois painéis, um à esquerda e outro à direita. No painel esquerdo, o usuário fornece as informações para gerar um mapa, enquanto no direito ele visualiza os vídeos dos mapas gerados nos dias e intervalos de tempo indicados nos subpainéis Primeiro Dia e Segundo Dia (quando aplicável). Os mapas podem conter apenas os países indicados no subpainel Países e podem ser do tipo Médio e Instantâneo para valores de STEC e VTEC sem tendência (dSTEC e dVTEC , respectivamente). | 270 |
| Figura 129–O Tessa provê um calendário suspenso para a escolha da data do primeiro dia. A data do segundo dia é configurada automaticamente para ser a data subsequente à data do primeiro dia. Há também um par de listas suspensas para especificar os tempos inicial e final de um intervalo de tempo em ambas as datas. | 271 |
| Figura 130–O Tessa faz a validação das informações fornecidas pelo usuário, bem como dos arquivos utilizados internamente para a construção dos mapas de TEC. | 272 |
| Figura 131–Ilustração dos tempos inicial e final dos mapas instantâneo e médio gerados pelo Tessa para 5 estações da RBMC entre 11:00:00 e 12:58:00 UT. | 273 |
| Figura 132–No painel direito do Tessa, o usuário é capaz de reproduzir os vídeos com extensão .mp4 gerados pela aplicação. Para um reproduzir um vídeo, ele deve pressionar duas vezes na linha correspondente da tabela ou pressionar o botão Abrir para selecionar um vídeo por meio de uma caixa de diálogo. | 274 |
| Figura 133–Gráficos das linhas de base S_q (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT). | 319 |

| | |
|---|-----|
| Figura 133–Gráficos das linhas de base S_q (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.). | 320 |
| Figura 133–Gráficos das linhas de base S_q (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.). | 321 |
| Figura 134–Gráficos das linhas de base S_q (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT). | 322 |
| Figura 134–Gráficos das linhas de base S_q (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.). | 323 |
| Figura 134–Gráficos das linhas de base S_q (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.). | 324 |
| Figura 135–Períodogramas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). | 325 |
| Figura 135–Períodogramas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.). | 326 |
| Figura 136–Períodogramas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). | 327 |
| Figura 136–Períodogramas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.). | 328 |
| Figura 137–Índices EWC de alta resolução para os resíduos da componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT) e foram computados utilizando a <i>wavelet</i> db2. | 329 |
| Figura 137–Índices EWC de alta resolução para os resíduos da componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT) e foram computados utilizando a <i>wavelet</i> db2 (cont.). | 330 |
| Figura 138–Índices EWC de alta resolução para os resíduos da componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT) e foram computados utilizando a <i>wavelet</i> db2. | 331 |
| Figura 138–Índices EWC de alta resolução para os resíduos da componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT) e foram computados utilizando a <i>wavelet</i> db2 (cont.). | 332 |
| Figura 139–Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido. | 333 |

| | |
|---|-----|
| Figura 139–Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido (cont.). | 334 |
| Figura 139–Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido (cont.). | 335 |
| Figura 140–Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido. | 336 |
| Figura 140–Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido (cont.). | 337 |
| Figura 140–Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido (cont.). | 338 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|----------|---|-----|
| Tabela 1 | – Lista dos 12 observatórios na zona auroral responsáveis pelo índice AE. | 46 |
| Tabela 2 | – Lista dos 4 observatórios magnéticos responsáveis pela concepção do índice Dst para o ano de 2010. | 49 |
| Tabela 3 | – Composição do ar atmosférico seco até 25 km. | 64 |
| Tabela 4 | – Lista de eventos HILDCAA/HILDCAA* identificados pelo Hilda nos anos de 2008 e 2010. Na coluna Evento, o símbolo H denota um evento HILDCAA, enquanto o símbolo H* denota um evento HILDCAA*. A coluna ID é a identificação do evento em um dado ano. Por fim, as colunas Início e Fim contêm, respectivamente, o dia e a hora de início e fim de um evento H ou H*. | 241 |
| Tabela 5 | – Lista de eventos HILDCAA/HILDCAA* identificados por Klausner et al. (2021) nos anos de 2008 e 2010. As colunas possuem o mesmo significado das colunas da Tabela 4. | 241 |
| Tabela 6 | – Descrição sucinta do significado de cada um dos campos que compõem o cabeçalho de um arquivo no formato IAGA 2002. | 248 |
| Tabela 7 | – Lista dos observatórios geomagnéticos utilizados para identificar as variações geomagnéticas induzidas pelo tsunami causado pelo sismo do Chile de 2010. | 260 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-------|---|
| AE | Auroral Electrojet (Eletrojato Auroral) |
| AGW | Acoustic-Gravity Wave (Onda de Gravidade Acústica) |
| AL | Auroral Lower |
| AM | Amplitude Modulation (Modulação em Amplitude) |
| AU | Astronomical Unit (Unidade Astronômica) |
| AU | Auroral Upper |
| ASCII | American Standard Code for Information Interchange (Código Padrão Americano para o Intercâmbio de Informação) |
| BBC | British Broadcasting Corporation (Corporação Britânica de Radiodifusão) |
| C/A | Coarse Acquisition (Aquisição Grosseira) |
| CFC | Chlorofluorocarbon (Clorofluorcarboneto) |
| CIR | Corotating Interaction Region (Região de Interação Corrotante) |
| CME | Coronal Mass Ejection (Ejeção de Massa Coronal) |
| CWT | Continuous Wavelet Transform (Transformada Wavelet Contínua) |
| Dst | Disturbance storm time |
| dTEC | detrended Total Electron Content (Conteúdo Eletrônico Total sem tendência) |
| DWT | Discrete Wavelet Transform (Transformada Wavelet Discreta) |
| EEJ | Eastward Electrojet (Eletrojato para Leste) |
| EMD | Empirical Mode Decomposition (Decomposição em Modo Empírico) |
| EWC | Effectiveness Wavelet Coefficient (Coeficiente Wavelet de Eficácia) |
| EUV | Extreme Ultraviolet (Ultravioleta extremo) |
| FS | Foward Shock (Choque Frontal) |
| FTP | File Transfer Protocol (Protocolo de Transferência de Arquivo) |

| | |
|-------------|--|
| FWT | Fast Wavelet Transform (Transformada Wavelet Rápida) |
| GA | Ground Antenna (Antena Terrestre) |
| GNSS | Global Navigation Satellite System (Sistema Global de Navegação por Satélite) |
| GPS | Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global) |
| GW | Gravity Wave (Onda de Gravidade) |
| HHT | Hilbert-Huang Transform (Transformada de Hilbert-Huang) |
| HILDCAA | High-Intensity, Long-Duration, and Continuous AE Activity (Atividade Contínua, de Longa Duração, e Intensa do Eletrojato Auroral) |
| HSA | Hilbert Spectral Analysis (Análise Espectral de Hilbert) |
| HT | Hilbert Transform (Transformada de Hilbert) |
| IAGA | International Association of Geomagnetism and Aeronomy (Associação Internacional de Geomagnetismo e Aeronomia) |
| IBGE | Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística |
| ICME | Interplanetary Coronal Mass Ejection (Ejeção de Massa Coronal Interplanetária) |
| IEEE | Institute of Electrical and Electronics Engineers (Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos) |
| IF | Interface Surface (Interface de Feixes) |
| IFWT | Inverse Fast Wavelet Transform (Transformada Wavelet Rápida Inversa) |
| IGW | Internal Gravity Wave (Onda de Gravidade Interna) |
| IMF | Interplanetary Magnetic Field (Campo Magnético Interplanetário) no Capítulo 2; Intrinsic Mode Function (Função de Modo Intrínseco) no Capítulo 7 |
| INTERMAGNET | International Real-time Magnetic Observatory Network (Rede Internacional de Observatórios Magnéticos de Tempo Real) |
| IQSY | International Quiet Solar Years (Anos Internacionais de Sol Calmo) |
| IR | Infrared (Infravermelho) |

| | |
|---------|--|
| IUGG | International Union of Geodesy and Geophysics (União Internacional de Geodésia e Geofísica) |
| L1 | Link 1 |
| L2 | Link 2 |
| LAI | Lithosphere-Atmosphere-Ionosphere (Litosfera-Atmosfera-Ionosfera) |
| LASCO | Large Angle and Spectrometric Coronagraph |
| LSTID | Large Scale Travelling Ionospheric Disturbance (Distúrbio Ionosférico Propagante de Larga Escala) |
| MAGNAMI | MAGNetogram Analysis during tsunaMI (Análise de Magnetograma durante Tsunami) |
| MATLAB | MATrix LABoratory |
| MCS | Master Control Station (Estação de Controle Mestre) |
| MRA | Multiresolution Analysis (Análise de Multiresolução) |
| MS | Monitor Station (Estação de Monitoramento) |
| MSTID | Medium Scale Travelling Ionospheric Disturbance (Distúrbio Ionosférico Propagante de Média Escala) |
| NaN | Not a Number |
| NASA | National Aeronautics and Space Administration (Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço) |
| NSF | National Science Foundation (Fundação Nacional da Ciência) |
| PRN | PseudoRandom Noise (Ruído Pseudoaleatório) |
| RBMC | Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo dos Sistemas GNSS |
| RINEX | Receiver Independent Exchange Format (Formato de Troca Independente do Receptor) |
| RS | Reverse Shock (Choque Reverso) |
| SHA | Spherical harmonic analysis (Análise por Harmônicos Esféricos) |
| SOHO | Solar and Heliospheric Observatory (Observatório Solar e Heliosférico) |
| Sq | Solar quiet |

| | |
|--------|---|
| SSA | Singular Spectrum Analysis (Análise Espectral Singular) |
| SSC | Storm Sudden Commencement (Início Súbito da Tempestade) |
| STEC | Slant Total Electron Content (Conteúdo Eletrônico Total Inclinado) |
| STFT | Short-Time Fourier Transform (Transformada de Fourier de Tempo Curto) |
| SVD | Singular Value Decomposition (Decomposição em Valores Singulares) |
| SXT | Soft X-ray Telescope (Telescópio de Raios X Moles) |
| TAI | Tsunami-Atmosphere-Ionosphere (Tsunami-Atmosfera-Ionosfera) |
| TEC | Total Electron Content (Conteúdo Eletrônico Total) |
| TECU | TEC Unit (Unidade de TEC) |
| TID | Travelling Ionospheric Disturbance (Distúrbio Ionosférico Propagante) |
| TTT | Tsunami Travel Time (Tempo de Viagem do Tsunami) |
| UNAVCO | University NAVSTAR Consortium |
| UT | Universal Time (Tempo Universal) |
| UV | Ultraviolet (Ultravioleta) |
| VTEC | Vertical Total Electron Content (Conteúdo Eletrônico Total Vertical) |
| WEJ | Westward Electrojet (Eletrojato para oeste) |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------|---|
| B | Campo geomagnético |
| <i>D</i> | Declinação magnética |
| <i>I</i> | Inclinação magnética ou corrente elétrica |
| <i>X</i> | Componente do campo geomagnético na direção norte |
| <i>Y</i> | Componente do campo geomagnético na direção leste |
| <i>Z</i> | Componente do campo geomagnético na direção vertical |
| <i>H</i> | Componente do campo geomagnético na direção horizontal |
| <i>r</i> | Distância radial do ponto <i>P</i> |
| θ | Colatitude do ponto <i>P</i> (Capítulo 2) ou temperatura potencial (Capítulo 3) |
| ϕ | Longitude do ponto <i>P</i> |
| r | Vetor posição do ponto <i>P</i> |
| r' | Vetor posição do elemento diferencial de corrente |
| A | Potencial vetor magnético |
| J | Densidade de corrente |
| D | Densidade de fluxo elétrico |
| μ | Permeabilidade magnética |
| μ_0 | Permeabilidade magnética do vácuo |
| <i>V</i> | Potencial magnético |
| <i>R</i> | Componente radial do potencial magnético |
| Θ | Componente colatitudinal do potencial magnético |
| Φ | Componente azimutal do potencial magnético |
| P_ℓ^m | Polinômio associado de Legendre de grau ℓ e ordem m |
| Q_ℓ^m | Função associada de Legendre de segunda espécie de grau ℓ e ordem m |

| | |
|-------------------|--|
| B_z | Componente vertical do campo magnético interplanetário |
| Dst_{\min} | Valor mínimo do índice Dst durante a fase principal de uma tempestade geomagnética |
| z | Altura |
| p | Pressão atmosférica |
| H | Altura de escala |
| g | Aceleração da gravidade ou filtro <i>wavelet</i> (Capítulo 6) |
| m | Peso molecular médio |
| T | Temperatura |
| k | constante de Boltzmann |
| ρ | Densidade atmosférica |
| G | Constante gravitacional |
| M_E | Massa da Terra |
| R_E | Raio da Terra |
| Γ | Taxa de Lapso (Capítulo 3) ou Função gama (Capítulo 5) |
| χ | Ângulo zenital solar |
| σ | Seção transversal de absorção (Capítulo 4) ou Desvio Padrão (Capítulo 5) |
| n | Concentração da espécie neutra |
| ν | Eficiência de ionização |
| q | Taxa de produção de elétrons |
| Ch | Função de incidência rasante de Chapman |
| L | Taxa de perda de elétrons |
| N | Densidade eletrônica da ionosfera |
| $L^1(\mathbb{R})$ | Espaço das funções absolutamente integráveis |
| $L^2(\mathbb{R})$ | Espaço das funções quadraticamente integráveis |
| $L^p(\mathbb{R})$ | Espaço das funções p -integráveis |

| | |
|------------------------|--|
| $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ | Espaço das sequências quadraticamente somáveis |
| ψ | <i>Wavelet</i> |
| a | Parâmetro de escala |
| b | Parâmetro de translação |
| $\psi_{a,b}$ | Versão dilatada/comprimida e transladada de uma <i>wavelet</i> |
| C_ψ | Constante de admissibilidade |
| W_ψ | Operador da CWT com respeito a <i>wavelet</i> ψ |
| erf | Função erro |
| ${}_2F_2$ | Função hipergeométrica generalizada |
| $(q)_n$ | Símbolo de Pochhammer |
| T_k | Operador de translação |
| D_c | Operador de dilatação |
| V_j | Espaço de aproximação no j -ésimo nível |
| W_j | Espaço de detalhes no j -ésimo nível |
| P_j | Operador de projeção ortogonal em V_j |
| Q_j | Operador de projeção ortogonal em W_j |
| φ | Função escala |
| $\varphi_{j,k}$ | Versão dilatada/comprimida e transladada de uma função escala. |
| $\psi_{j,k}$ | Versão dilatada/comprimida e transladada de uma <i>wavelet</i> (versão discreta) |
| ψ_N | <i>Wavelet</i> de Daubechies de ordem N |
| a_j | Sequência de aproximação para o j -ésimo nível |
| d_j | Sequência de detalhe para o j -ésimo nível |
| $d_{j,k}$ | k -ésimo termo da sequência de detalhe para o j -ésimo nível |
| $a_{j,k}$ | k -ésimo termo da sequência de aproximação para o j -ésimo nível |
| h | Filtro escala (Capítulo 6) |

| | |
|--------------------------------|---|
| \hat{m}_φ | Função de transferência associada ao filtro escala |
| \hat{m}_ψ | Função de transferência associada ao filtro <i>wavelet</i> |
| \mathcal{H} | Operador da HT (Capítulo 7) ou operador de Hankelização (Capítulo 8) |
| \mathbf{X} | Matriz de trajetória |
| \mathbf{X}_i | i -ésima matriz elementar |
| \mathbf{X}_{I_k} | Matriz agrupada que corresponde à soma das matrizes elementares cujos índices pertencem a I_k |
| $\widetilde{\mathbf{X}}_{I_k}$ | Matriz \mathbf{X}_{I_k} após o procedimento de Hankelização |
| $\widetilde{\mathbf{X}}^{(k)}$ | Série temporal associada a matriz agrupada de Hankel $\widetilde{\mathbf{X}}_{I_k}$ |
| \mathbb{X}_N | Série temporal de comprimento N |
| X_i | i -ésimo vetor defasado |
| U_i | i -ésimo vetor singular à esquerda de \mathbf{X} |
| V_i | i -ésimo vetor singular à direita de \mathbf{X} |
| σ_i | i -ésimo valor singular de \mathbf{X} |
| \mathcal{U} | Base ortonormal para o espaço coluna de \mathbf{X} |
| \mathcal{V} | Base ortonormal para o espaço linha de \mathbf{X} |
| $\mathcal{M}_{L,K}$ | Espaço vetorial das matrizes reais de dimensão $L \times K$ |
| $\mathcal{M}_{L,K}^{(H)}$ | Espaço vetorial das matrizes reais de Hankel de dimensão $L \times K$ |
| \mathfrak{F}_N | Espaço vetorial das séries temporais de comprimento N |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | Proposta da Dissertação | 6 |
| 1.2 | Estrutura da Dissertação | 7 |
| I | FUNDAMENTOS FÍSICOS | 11 |
| 2 | GEOMAGNETISMO | 12 |
| 2.1 | Notas Históricas | 15 |
| 2.2 | Elementos do Campo Geomagnético | 22 |
| 2.3 | O Campo de Dipolo | 23 |
| 2.4 | Análise por Harmônicos Esféricos | 29 |
| 2.5 | Vento Solar e a Magnetosfera | 38 |
| 2.6 | Índices Geomagnéticos | 44 |
| 2.7 | Tempestades Geomagnéticas | 50 |
| 2.7.1 | Mecanismos de geração | 52 |
| 2.7.2 | Subtempestades Magnetosféricas | 57 |
| 2.8 | Eventos HILDCAA | 60 |
| 3 | ATMOSFERA NEUTRA | 63 |
| 3.1 | Composição e Estrutura | 64 |
| 3.2 | Distribuições de Densidade e Pressão | 71 |
| 3.2.1 | Camada Atmosférica em Equilíbrio Isotérmico | 72 |
| 3.2.2 | Camada Atmosférica com Taxa de Lapso Constante | 75 |
| 3.3 | Ondas de Gravidade | 76 |
| 4 | IONOSFERA | 83 |
| 4.1 | Notas Históricas | 84 |
| 4.2 | Formação da Ionosfera | 90 |
| 4.2.1 | Produção de Íons: Fotoionização | 91 |
| 4.2.2 | Perda de Íons: Recombinação | 102 |
| 4.3 | Estrutura da Ionosfera | 103 |
| 4.4 | Sistema de Posicionamento Global | 109 |
| 4.5 | Distúrbios Ionosféricos Propagantes | 114 |

| | | |
|------------|--|------------|
| II | FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS | 117 |
| 5 | TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA | 118 |
| 5.1 | O que é uma <i>wavelet</i> ? | 119 |
| 5.2 | Definição e Propriedades | 129 |
| 6 | TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA | 133 |
| 6.1 | Análise Multirresolução | 146 |
| 6.2 | Construindo uma <i>Wavelet-Mãe</i> | 159 |
| 6.3 | Transformada <i>Wavelet</i> Rápida e sua Inversa | 183 |
| 7 | TRANSFORMADA DE HILBERT-HUANG | 187 |
| 7.1 | Decomposição em Modo Empírico | 193 |
| 7.2 | Análise Espectral de Hilbert | 201 |
| 8 | ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR | 206 |
| 8.1 | Primeiro Estágio: Decomposição | 208 |
| 8.2 | Segundo Estágio: Reconstrução | 216 |
| III | DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL | 226 |
| 9 | HILDA | 227 |
| 9.1 | Obtenção dos Arquivos | 227 |
| 9.2 | Uso do Programa | 230 |
| 9.3 | Aplicação do Programa | 238 |
| 10 | MAGNAMI | 245 |
| 10.1 | Uso do Programa | 245 |
| 10.2 | Aplicação do Programa | 257 |
| 11 | TESSA | 266 |
| 11.1 | Obtenção dos arquivos | 266 |
| 11.2 | Uso do Programa | 269 |
| 12 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 275 |
| | REFERÊNCIAS | 278 |

| | |
|---|------------|
| APÊNDICES | 312 |
| APÊNDICE A – PRODUÇÕES ACADÊMICAS | 313 |
| APÊNDICE B – SAÍDAS DO MAGNAMI: SISMO DO CHILE DE 2010 | 318 |

1 INTRODUÇÃO

O campo geomagnético está longe de ser uniforme, seja em magnitude ou em direção, pois apresenta variações temporais e espaciais tanto na superfície terrestre quanto no espaço que compreende ao redor da Terra (FOWLER, 2005). Na superfície terrestre, sua direção e magnitude estão sendo continuamente registradas por uma rede global de observatórios geomagnéticos, que atualmente são coordenados por um grupo pertencente à Associação Internacional de Geomagnetismo e Aeronomia (IAGA, do inglês *International Association of Geomagnetism and Aeronomy*) (ELIAS; ALDERTON, 2021). Uma grande parcela desses observatórios apresenta a certificação necessária para participar da INTERMAGNET (do inglês *International Real-time Magnetic Observatory Network*). A INTERMAGNET é uma rede internacional de observatórios geomagnéticos que atendem a elevados padrões de qualidade no que tange à medição, registro e disseminação de dados geomagnéticos digitais em tempo quase real¹ (RASSON, 2007).

Os dados geomagnéticos revelam a presença de variações geomagnéticas em uma ampla gama de escalas de tempo, desde milissegundos até milhões de anos (MERRILL; MCELHINNY; MCFADDEN, 1996). As variações com curtos períodos de tempo, na ordem de segundos até muitos anos, são atribuídas a processos dinâmicos que ocorrem na ionosfera, magnetosfera e heliosfera. Elas são chamadas de variações transientes. Por outro lado, as variações com longos períodos de tempo, na ordem de décadas até milênios, se devem à ação do dínamo no núcleo da Terra e são chamadas de variações seculares (WARDINSKI, 2007). Assim sendo, é possível afirmar que as variações geomagnéticas rápidas e lentas estão associadas à fontes de campo magnético de origem externa e interna ao planeta Terra, respectivamente. Embora a distinção das fontes em termos do período de tempo não esteja bem definida, é comum assumir que as variações com períodos inferiores a 5 anos são dominadas por fontes de origem externa, enquanto as que apresentam períodos superiores são predominantemente de origem interna (BLOXHAM; GUBBINS, 1985). Vale ressaltar que determinar os processos físicos responsáveis por produzir essas variações não é uma tarefa fácil, sendo um dos principais objetivos das pesquisas na área de geomagnetismo (CAMPBELL, 2003).

As fontes externas do campo geomagnético são correntes elétricas que fluem na ionosfera e na magnetosfera, as quais são responsáveis por uma ínfima porção (cerca de 1%) do campo geomagnético total (MAEDA, 1968; MERRILL; MCELHINNY; MCFADDEN, 1996). Essas correntes produzem as variações transientes, que usualmente são classificadas como regulares ou irregulares. As variações regulares são causadas por fontes permanentes

¹ Além do observatório de Vassouras no Rio de Janeiro, em 2019 o observatório geomagnético brasileiro de Tatuoca, no Pará, passou a integrar a INTERMAGNET.

de campo magnético que propiciam uma regularidade em sua ocorrência. Em contrapartida, as variações irregulares são causadas por fontes que não existem de forma permanente. Conseqüentemente, a ocorrência dessas variações é, também, irregular (BELLANGER et al., 2003). As variações regulares mais estudadas e entendidas são as variações geomagnéticas diurnas, que aparecem nos registros geomagnéticos diários em dias nos quais a atividade geomagnética é mais branda. As variações diurnas são suaves e previsíveis, com intensidades da ordem de algumas dezenas de nT e períodos usuais em torno de 6, 8, 12 e 24 horas (KIVELSON; RUSSELL, 1995; CAMPBELL, 1989; YAMAZAKI; MAUTE, 2017). Essas variações são frequentemente chamadas de variações Sq (do inglês *Solar quiet*). A ocorrência das variações Sq é atribuída a dois vórtices de corrente que fluem na região E da ionosfera devido à ação do dínamo ionosférico. Essas correntes formam um padrão global chamado de sistema de correntes Sq (YAMAZAKI et al., 2017). Além disso, na ionosfera também se verifica a existência de outros sistemas de corrente, tais como o eletrojato equatorial e o eletrojato auroral. Todos eles contribuem para a geração de variações geomagnéticas.

Quanto às variações irregulares, o exemplo típico corresponde às tempestades geomagnéticas. Elas ocorrem quando o acoplamento do vento solar com a magnetosfera é tão acentuado e prolongado que a atividade geomagnética é intensificada em demasia (KIVELSON; RUSSELL, 1995). Durante a ocorrência de tempestades geomagnéticas, há uma intensificação das correntes magnetosféricas devido ao aumento da penetração de partículas ionizadas do vento solar na magnetosfera (RUSSELL; MCPHERRON; BURTON, 1974; GONZALEZ; TSURUTANI; GONZALEZ, 1999; JUNIOR et al., 2011b). Conseqüentemente, essas correntes produzem campos magnéticos que se sobrepõem ao campo geomagnético e alteram a sua configuração usual. Assim, as tempestades geomagnéticas concebem assinaturas características nas componentes do campo geomagnético, principalmente na componente H devido à intensificação da corrente de anel equatorial. Essencialmente, uma tempestade geomagnética clássica é composta de quatro fases distintas, a saber: início súbito da tempestade (SSC, do inglês *Storm Sudden Commencement*), fase inicial, fase principal e fase de recuperação (PARKER, 1962). A chegada do vento solar na magnetosfera conduz a uma compressão da magnetopausa e a um aumento súbito do campo no lado diurno da Terra (SSC), o qual apresenta duração típica na ordem de minutos (OYEDOKUN; CILLIERS, 2018). A fase inicial é subsequente ao SSC, sendo um período durante o qual a componente H fica acima de seus valores usuais. Essa fase apresenta uma duração típica na ordem de horas. Na fase principal, há um decréscimo acentuado da componente H com o subsequente retorno aos seus valores habituais durante a fase de recuperação (GONZALEZ et al., 1994).

Uma tempestade geomagnética é um tipo de atividade geomagnética, assim como uma subtempestade magnetosférica. Com o objetivo de descrever, caracterizar e mensurar as atividades geomagnéticas, uma série de índices geomagnéticos foram desenvolvidos ao longo do tempo. Em geral, cada índice corresponde a um único e bem definido fenômeno físico,

de modo que ele deve ser obtido utilizando dados consistentes com o fenômeno em questão (MAYAUD, 1980). Por exemplo, um dos índices geomagnéticos mais importantes é o índice Dst (do inglês *Disturbance storm time*). Ele foi desenvolvido para monitorar as variações geomagnéticas produzidas pela corrente de anel equatorial em baixas latitudes. Portanto, está intimamente relacionado com as tempestades geomagnéticas. Esse índice é derivado da componente H . É nessa componente que as tempestades deixam a sua assinatura, visto que o campo magnético produzido pela corrente de anel é essencialmente paralelo ao eixo do dipolo. Por outro lado, tem-se o índice AE (do inglês *Auroral Electrojet*). O índice AE foi desenvolvido por Davis e Sugiura (1966) com o propósito de examinar as variações geomagnéticas produzidas pelos eletrojetos aurorais em altas latitudes. Nesse sentido, ele está intimamente relacionado com as subtempestades magnetosféricas (GJERLOEV et al., 2004; LAKHINA et al., 2006). Esse índice também é derivado da componente H , pois ela é a mais adequada devido à direção dos eletrojetos aurorais.

A partir de suas definições, nota-se que os índices Dst e AE são utilizados para caracterizar as tempestades geomagnéticas e as subtempestades magnetosféricas, respectivamente (LAKHINA et al., 2006). Apesar disso, o índice AE também é utilizado para definir outro tipo de atividade geomagnética bastante importante. Ela é conhecida como evento HILDCAA (do inglês *High Intensity, Long Duration, and Continuous AE Activity*). Os eventos HILDCAA foram identificados por Tsurutani e Gonzalez (1987) durante a análise de um grupo de tempestades geomagnéticas que tinham uma fase de recuperação maior que a usual, na qual o índice AE permanecia com valores elevados de forma contínua e prolongada. Tsurutani e Gonzalez (1987) propuseram alguns critérios com base no índice AE para a identificação de eventos HILDCAA, os quais posteriormente foram aprimorados devido ao seu alto grau de restrição (TSURUTANI et al., 2004). Koga et al. (2011) adicionaram algumas condições no que diz respeito aos parâmetros do meio interplanetário para classificar uma atividade magnética como um evento HILDCAA, tais como a velocidade do vento solar e flutuações na componente B_z do campo magnético interplanetário (IMF, do inglês *Interplanetary Magnetic Field*). Klausner et al. (2021) identificaram eventos HILDCAA durante o mínimo solar dos ciclos 23 e 24 com o intuito de estabelecer um modelo linear do índice AE em termos dos parâmetros do vento solar utilizando regressão linear múltipla. O autor desta dissertação é um dos autores desse artigo.

A atividade solar não é o único forçante para a ocorrência de variações geomagnéticas, visto que as atividades sísmicas e oceânicas também são capazes de produzi-las. A litosfera é dividida em cerca de 12 grandes placas aproximadamente rígidas que estão em movimento relativo sobre a astenosfera², as chamadas placas tectônicas (KUSKY, 2008). Nas margens dessas placas, tem-se as falhas geológicas, onde a maior parte dos

² A energia para o movimento das placas tectônicas advém do interior da Terra por meio de correntes de convecção que se desenvolvem no manto.

terremotos ocorrem. De fato, o mapeamento dos epicentros de diversos terremotos revelara que os epicentros delineiam os limites das placas tectônicas (SKINNER; MURCK, 2011). A hipótese mais aceita para a origem dos terremotos é chamada de hipótese do rebote elástico e foi introduzida pelo geofísico Harry Fielding Reid (1859-1944). Essa hipótese sugere que algumas falhas têm superfícies ásperas que geram resistência ao movimento das placas em cada lado. Noutros termos, as forças de fricção impedem o simples deslizamento das placas. Conseqüentemente, elas são deformadas pela ação contínua das forças tectônicas e acumulam energia elástica no processo. Quando o limite de elasticidade é atingido, as placas retornam aos seus formatos originais liberando subitamente uma quantidade imensa de energia. Essa energia se propaga em todas as direções na forma de ondas sísmicas, as quais são responsáveis por gerar os terremotos.

Estudos mostram que variações significativas do campo geomagnético podem estar associadas à atividade sísmica (IYEMORI et al., 2005; KLAUSNER et al., 2014a; KHERANI et al., 2016; KLAUSNER et al., 2021; KLAUSNER; MACEDO; PRESTES, 2022). Porém, devido aos baixos períodos e amplitudes, na ordem de minutos e poucos nT, respectivamente, elas estão embutidas em variações transientes maiores em virtude de causas naturais ou artificiais (ROSSIGNOL, 1982). Por exemplo, o estudo de Iyemori et al. (2005) associa pulsações geomagnéticas, um tipo de variação transiente, ao terremoto de Sumatra que ocorreu no dia 26 de dezembro de 2004. Logo após a sua ocorrência, Iyemori et al. (2005) identificaram oscilações nas componentes H , D e Z do campo geomagnético com períodos próximos a 3,6 min. Eles atribuem as oscilações a um mecanismo de dínamo ionosférico que se desenvolve na região E da ionosfera acima do epicentro. Especificamente, o movimento vertical da crosta durante o terremoto causa um deslocamento da atmosfera próxima à superfície da Terra, produzindo variações de pressão que se propagam como ondas acústicas. Ao atingir altitudes ionosféricas, elas interagem com o plasma ionosférico por meio de colisões entre íons e neutros. Conseqüentemente, produzem correntes elétricas pela ação do dínamo, que afetam o campo geomagnético (TSUGAWA et al., 2011). Isso mostra que essas variações geomagnéticas se devem ao acoplamento LAI (do inglês *Lithosphere-Atmosphere-Ionosphere*).

Em termos simples, um tsunami ocorre quando um imenso volume de água é deslocado, com a subsequente restauração do equilíbrio por meio da propagação de ondas em todas as direções através do oceano. Os terremotos submarinos, bem como os originados nas zonas de subducção próximas às regiões costeiras, são as principais causas da ocorrência de tsunamis. Em geral, os tsunamis mais intensos ocorrem no Oceano Pacífico em virtude de terremotos submarinos com epicentros na região do Círculo de Fogo do Pacífico. Em 1960, o terremoto de Valdivia, o mais intenso registrado no século XX, produziu um tsunami transoceânico que matou milhares de pessoas no Chile, Havaí e Japão (PUGH; WOODWORTH, 2014). Apesar disso, outros processos geológicos, tais como deslizamentos de terra submarinos, erupções vulcânicas e, mais raramente, o impacto

de cometas e asteroides no oceano, também têm sua parcela de contribuição. Vale ressaltar que tanto o comprimento de onda quanto a velocidade das ondas de um tsunami dependem da profundidade. Em águas profundas, essas ondas possuem amplitudes pequenas e se propagam em alta velocidade com longos comprimentos de onda. À medida que se aproximam das águas rasas dos litorais, a velocidade e o comprimento de onda diminuem gradualmente, enquanto a amplitude aumenta substancialmente. Além disso, os períodos predominantes das ondas de um tsunami vão de poucos minutos até cerca de uma hora. O tsunami gerado pelo terremoto de Sumatra tinha períodos predominantes de 40 e 140 minutos (ABE, 2006).

Atualmente, é sabido que o oceano é um fluido eletricamente condutor capaz de gerar campos eletromagnéticos conforme os fluxos oceânicos atravessam o campo geomagnético (TYLER; OBERHUBER; SANFORD, 1999). Especificamente, os sais dissolvidos na água formam íons que são transportados pelo fluxo oceânico e defletidos pela força de Lorentz, que é simultaneamente perpendicular à direção da velocidade e do campo geomagnético. Conseqüentemente, os íons podem se acumular em certas regiões criando densidades de carga espaciais, que por sua vez estabelecem campos elétricos a fim de prevenir movimentos iônicos subsequentes. Tanto a água ao redor quanto os sedimentos condutores de eletricidade podem servir como “válvulas de escape” para os íons acumulados nessas regiões, de modo que correntes elétricas são estabelecidas (TYLER, 2003; MANOJ et al., 2006). Essas correntes produzem campos magnéticos secundários que influenciam no campo geomagnético, gerando variações transientes. Esse fenômeno é conhecido por indução por movimento e está associado à ocorrência de tsunamis e marés oceânicas (MINAMI, 2017). A indução por movimento tem despertado o interesse de cientistas desde as especulações realizadas por Faraday (1849). Tyler (2005) deduziu uma fórmula simples relacionando o deslocamento superficial de água por conta de um tsunami com a magnitude do campo magnético gerado. Manoj et al. (2010) investigaram a possibilidade de identificar fluxos oceânicos associados a tsunamis por meio da diferença de potencial em cabos submarinos. Toh et al. (2011) identificaram variações eletromagnéticas devido aos terremotos tsunamigênicos que ocorreram próximo às ilhas Kuril em 2006 e 2007.

A indução por movimento não é a única causa de variações geomagnéticas durante a ocorrência de tsunamis. Elas também são causadas pelo acoplamento TAI (do inglês *Tsunami-Atmosphere-Ionosphere*) via AGWs (do inglês *Acoustic-Gravity Waves*). Os tsunamis são capazes de gerar AGWs que podem alcançar altitudes ionosféricas, onde produzem correntes elétricas e campos magnéticos secundários (MINAMI, 2017). Kherani et al. (2012) e Klausner, Kherani e Muella (2016) concluíram que as variações na componente Z do campo geomagnético durante o tsunami de Tohoku em 2011 foram produzidas por correntes ionosféricas em virtude das AGWs geradas pelo tsunami. As AGWs também podem produzir distúrbios ionosféricos propagantes (TIDs, do inglês *Travelling Ionospheric Disturbances*). Os TIDs consistem de flutuações de caráter ondulatório na

densidade eletrônica do plasma ionosférico que são induzidas pela propagação de ondas de gravidade na atmosfera neutra (HINES, 1960). Os TIDs podem ser estudados em detalhe utilizando medidas do conteúdo eletrônico total (TEC, do inglês *Total Electron Content*) determinadas a partir de sinais GPS (do inglês *Global Positioning System*) (SAVASTANO et al., 2017). Eles são causados por diversos processos físicos, tais como eventos climáticos de grande escala na troposfera, vide Hung, Phan e Smith (1978), atividades geomagnéticas e aurorais, como em Nicolls et al. (2004), e terremotos, como em Calais e Minster (1995). Nesse sentido, afirmar que TIDs são provenientes de um tsunami não é uma tarefa fácil, sendo necessário comparar a velocidade horizontal, a direção de propagação e a largura de banda espectral dos TIDs com a do tsunami (GALVAN et al., 2012). Kherani et al. (2016) verificaram a ocorrência de TIDs na forma de variações no TEC durante o tsunami de Tohoku em 2011.

Tendo em vista o exposto, o presente trabalho visa contribuir, por meio de ferramentas computacionais, com o estudo das assinaturas ionosféricas e geomagnéticas associadas a eventos solares, sísmicos e oceânicos devido aos diversos mecanismos de acoplamento. A importância deste trabalho não é só teórica, mas prática, visto que o estudo das variações geomagnéticas e dos TIDs produzidos por terremotos tsunamigênicos podem contribuir para o desenvolvimento de sistemas de previsão e alerta de catástrofes (PELTIER; HINES, 1976; TYLER, 2005; SHRIVASTAVA et al., 2021).

1.1 Proposta da Dissertação

O objetivo da presente dissertação de mestrado é implementar ferramentas computacionais, com interface gráfica amigável, para auxiliar os pesquisadores interessados em estudar variações geomagnéticas e TIDs associados a eventos solares, sísmicos e oceânicos. Para isso, propõe-se o desenvolvimento de três ferramentas para a leitura e processamento de dados observacionais geomagnéticos e ionosféricos, a saber:

1. A primeira ferramenta deve possibilitar a leitura de dados dos índices AE e Dst, bem como dos parâmetros do vento solar (velocidade, densidade e intensidade do IMF). Os dados podem ser obtidos no endereço [OMNIWeb](#). O objetivo é auxiliar na identificação de eventos HILDCAA com base nos critérios propostos por Tsurutani e Gonzalez (1987) e nas condições do meio interplanetário. Essa ferramenta é chamada de Hilda.
2. A segunda ferramenta deve permitir a leitura de dados no formato IAGA 2002 da INTERMAGNET, obtidos no endereço [Dados INTERMAGNET](#), e o subsequente processamento dos mesmos por meio das seguintes metodologias matemáticas:
 - 2.1. Transformada *Wavelet* Contínua (CWT, do inglês *Continuous Wavelet Transform*);

- 2.2. Transformada *Wavelet* Discreta (DWT, do inglês *Discrete Wavelet Transform*);
- 2.3. Transformada de Hilbert-Huang (HHT, do inglês *Hilbert-Huang Transform*);
- 2.4. Análise Espectral Singular (SSA, do inglês *Singular Spectrum Analysis*).

O intuito é identificar as variações geomagnéticas durante a ocorrência de terremotos tsunamigênicos. Essa ferramenta é chamada de MAGNAMI.

3. A terceira ferramenta deve ser capaz de ler e processar dados de TEC oriundos do programa desenvolvido pelo Dr. Gopi K. Seemala. O programa pode ser obtido no endereço [GPS-TEC](#). O propósito é gerar mapas de TEC que auxiliem na identificação de TIDs durante a ocorrência de terremotos tsunamigênicos. Essa ferramenta é chamada de Tessa.

Com o MAGNAMI e o Tessa pretende-se aumentar a compreensão dos processos físicos inerentes aos acoplamentos LAI e TAI, bem como aprimorar os aspectos relevantes evidenciados por [Klausner et al. \(2014a\)](#), [Klausner, Kherani e Muella \(2016\)](#), [Klausner et al. \(2016\)](#) e [Klausner et al. \(2017\)](#) para a identificação e caracterização de variações geomagnéticas e TIDs associados a eventos sísmicos e oceânicos. Quanto ao Hilda, a ideia é contribuir para a identificação de variações geomagnéticas associadas à atividade solar.

1.2 Estrutura da Dissertação

Com o intuito de atingir a proposta descrita na subseção 1.1, a presente dissertação está estruturada em três partes amplas. Um dos objetivos do autor é fazer com que este texto seja autossuficiente sempre que possível. Apesar disso, em alguns momentos a autossuficiência é deixada de lado por motivos de clareza e objetividade. Nesse sentido, algumas discussões, apesar de essenciais na visão do autor, foram omitidas do texto a fim de tornar a leitura mais acessível e agradável aos leitores. A primeira parte descreve os [Fundamentos Físicos](#), que são imprescindíveis para o entendimento do tema desenvolvido neste trabalho. Sua redação está dividida em três capítulos, a saber:

- [Capítulo 2](#): Este capítulo trata de geomagnetismo, onde são apresentados ao leitor os conceitos básicos sobre o assunto, juntamente com notas históricas para motivar a leitura. Discute-se a origem do campo geomagnético, sua descrição matemática em termos vetoriais e o domínio espacial compreendido por suas linhas de campo (magnetosfera). Além disso, discute-se também as principais atividades geomagnéticas causados pela atividade solar, isto é, as tempestades geomagnéticas, as subtempestades magnetosféricas e os eventos HILDCAA.
- [Capítulo 3](#): Este capítulo trata da atmosfera neutra, onde os principais tópicos sobre o assunto são abordados. Ele se inicia descrevendo a composição química e a estrutura

vertical da atmosfera. Além disso, algumas distribuições de densidade e pressão para camadas atmosféricas com regimes de temperatura distintos são apresentadas. Por fim, discute-se as ondas de gravidade, que são fenômenos ondulatórios que se desenvolvem na atmosfera neutra como resultado de uma diversidade de mecanismos geradores. Em particular, elas podem ter origem sísmica e/ou oceânica. Portanto, são de grande interesse para este trabalho.

- **Capítulo 4:** Este capítulo trata da ionosfera. Ele começa com notas históricas no que diz respeito ao seu descobrimento. Na sequência, há uma discussão sobre a formação da ionosfera, com ênfase na teoria de fotoionização proposta por Chapman para explicar a formação de camadas ionosféricas. Há também uma discussão sobre a estrutura da ionosfera, onde suas principais regiões são apresentadas e discutidas. Por fim, discute-se sobre os TIDs, uma vez que eles são manifestações ionosféricas das ondas de gravidade, que podem estar associadas à atividade sísmica e/ou oceânica, consoante dito anteriormente.

A segunda parte descreve os **Fundamentos Matemáticos**, que são necessários para a identificação e análise de variações geomagnéticas e distúrbios ionosféricos. Em particular, ela apresenta as ferramentas matemáticas que permitem caracterizar as contribuições sísmicas, oceânicas e solares na ocorrência desses fenômenos a partir de dados observacionais geomagnéticos e ionosféricos. Sua redação está dividida em quatro capítulos, a saber:

- **Capítulo 5:** Este capítulo descreve a CWT. Ela é uma ferramenta matemática que permite a análise simultânea de séries temporais no domínio do tempo e da frequência. O capítulo começa discutindo o conceito de função *wavelet*, onde são apresentadas as *wavelets* mais utilizadas na literatura. Por conseguinte, a definição formal da CWT é apresentada, bem como algumas de suas propriedades mais importantes. O capítulo se encerra descrevendo a fórmula de reconstrução, a qual permite reconstruir a série temporal original a partir dos coeficientes *wavelet* obtidos com a CWT. Este trabalho utiliza a CWT para detectar as periodicidades características das variações geomagnéticas induzidas por terremotos tsunamigênicos.
- **Capítulo 6:** Este capítulo introduz a DWT. Ela é uma alternativa eficiente para a CWT, posto que esta última é redundante e, portanto, apresenta um elevado custo computacional. O capítulo discute em detalhes a análise de multirresolução, que é uma teoria matemática para a construção de bases ortonormais de *wavelets*. Por conseguinte, algoritmos rápidos e eficientes para o cômputo da DWT e sua inversa são apresentados, tendo como base a teoria de análise multirresolução. Este trabalho utiliza a DWT, porque Klausner et al. (2014b) e Klausner et al. (2016) mostraram que ela é efetiva na identificação de variações geomagnéticas devido a

eventos solares e oceânicos. As amplitudes dos coeficientes *wavelet* obtidos com a DWT podem ser utilizadas para estudar a regularidade local de séries temporais. Caso as amplitudes sejam muito pequenas, isso significa que a série temporal é bastante regular. Portanto, onde as amplitudes são grandes é possível associá-las à perturbações na série temporal.

- **Capítulo 7:** Este capítulo descreve a SSA, que é uma ferramenta matemática para a decomposição de séries temporais em componentes independentes e interpretáveis de tendência, oscilação e ruído. O capítulo é subdividido em duas seções, sendo que a primeira se refere à decomposição da série temporal, enquanto a segunda trata da reconstrução da mesma. Neste trabalho, a SSA é utilizada para a remoção de tendência em dados de TEC a fim de permitir a observação de TIDs, visto que estes introduzem flutuações no TEC (CANDIDO et al., 2008). Além disso, ela também é utilizada para determinar a linha de base S_q , pois esta deve ser subtraída dos dados geomagnéticos a fim de remover a influência solar e enfatizar as variações geomagnéticas de origem sísmica e/ou oceânica (KLAUSNER; CEZARINI; SANTOS, 2020).
- **Capítulo 8:** Este capítulo trata da HHT, que é um método adaptativo de análise de dados projetado para analisar dados oriundos de processos não lineares e não estacionários. Inicialmente, discute-se a decomposição em modo empírico, por meio da qual uma série temporal é decomposta em funções de modo intrínseco mais simples. Estas últimas têm transformadas de Hilbert bem definidas que permitem obter frequências instantâneas fisicamente significativas. Por fim, discute-se brevemente a análise espectral de Hilbert, onde a transformada de Hilbert é aplicada em cada uma das funções de modo intrínseco para a análise da variação temporal de suas respectivas frequências instantâneas. Este trabalho utiliza apenas a EMD, pois Klausner et al. (2016) mostraram que ela é uma ferramenta eficiente na detecção de variações geomagnéticas de origem oceânica.

A terceira parte trata do **Desenvolvimento Computacional**, onde são exibidos três programas, escritos em MATLAB ou Python, que implementam as metodologias matemáticas supracitadas a fim de auxiliar os interessados em estudar variações geomagnéticas e TIDs associados a eventos solares, sísmicos e oceânicos. Essa é uma parte significativa deste trabalho, na qual os programas desenvolvidos são descritos em detalhes e validados. Sua redação está dividida em três capítulos, a saber:

- **Capítulo 9:** Este capítulo introduz o Hilda, que é um programa com interface gráfica amigável, escrito em Python, para a identificação de eventos HILDCAA com base nos critérios propostos por Tsurutani e Gonzalez (1987) e nas condições do meio

interplanetário. A grande vantagem do Hilda é que o usuário pode flexibilizar ou restringir parte desses critérios, além de conseguir avaliar as condições do meio interplanetário, que em alguns casos é indispensável para determinar se um evento é HILDCAA ou não. O capítulo descreve em detalhes como as séries temporais devem ser obtidas, a forma como o Hilda identifica os eventos HILDCAA e o modo de utilização do programa.

- **Capítulo 10:** Este capítulo introduz o MAGNAMI, que é um programa com interface gráfica amigável, escrito em MATLAB, para a análise de dados geomagnéticos com o intuito de identificar variações geomagnéticas durante a ocorrência de tsunamis. O capítulo descreve como os dados devem ser obtidos de um repositório na Internet, a forma como eles são estruturados no interior dos arquivos e o modo de utilização do MAGNAMI para efetuar as análises. Para ilustrar o seu uso, considera-se o sismo do Chile de 2010 como evento de interesse.
- **Capítulo 11:** Este capítulo introduz o Tessa, que é um programa com interface gráfica amigável, escrito em Python, para a concepção de mapas de TEC com a tendência removida (dTEC, do inglês *detrended Total Electron Content*) para países da América Latina. A ideia é observar a ocorrência de TIDs durante terremotos tsunamigênicos para avaliar como eles afetam a ionosfera. O capítulo mostra como os dados podem ser obtidos, expõe a forma como o Tessa deve ser utilizado e discute sucintamente sobre os dois tipos de mapa que ele é capaz de produzir.
- **Capítulo 12:** Este capítulo apresenta as conclusões deste trabalho em termos dos programas desenvolvidos. As vantagens de se utilizar os programas nas análises são evidenciadas e as comparações das saídas de cada programa com resultados já publicados na literatura são descritas sucintamente (exceto o Tessa). Algumas melhorias são indicadas para serem implementadas em versões futuras dos programas.

Por fim, o **Apêndice A** mostra a primeira página dos artigos publicados pelo autor ao longo do desenvolvimento desta dissertação, enquanto o **Apêndice B** contém as saídas do MAGNAMI para as séries temporais do campo geomagnético durante o sismo tsunamigênico do Chile de 2010.

Parte I

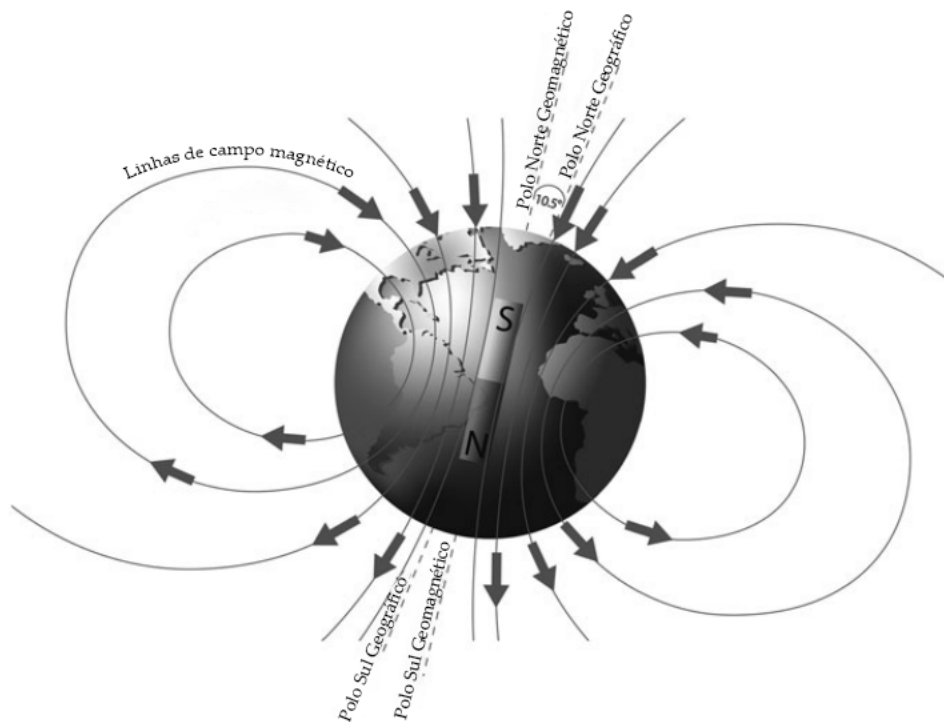
FUNDAMENTOS FÍSICOS

2 GEOMAGNETISMO

Este capítulo trata de geomagnetismo, que é o estudo do campo magnético terrestre (ver Figura 1). O campo geomagnético é resultado da superposição de campos magnéticos gerados por diversas fontes. Um delas se deve ao material que compõe a crosta e o manto da Terra, pois ele contém quantidades significativas de minerais que podem ser magnetizados na presença de um campo magnético aplicado. Porém, para que esses materiais deem origem a assinaturas magnéticas discerníveis, essa magnetização deve ser de natureza ferromagnética (FREEDEN, 2015). Isso requer que o material esteja em baixas temperaturas, mais precisamente abaixo da temperatura de Curie dos minerais. Essas condições são atendidas nas camadas mais exteriores da Terra, acima da isoterma de Curie. É apenas nessas regiões que é possível encontrar rochas magnetizadas.

As rochas magnetizadas apresentam dois tipos de magnetização, a saber: magnetização induzida e magnetização remanente. A magnetização induzida ocorre quando as rochas são submetidas a um campo externo. Ela é proporcional, tanto em direção quanto em intensidade, ao campo magnético no qual as rochas estão submetidas. A habilidade de uma rocha na aquisição desse tipo de magnetização depende da natureza e da proporção

Figura 1 – Esboço do campo geomagnético. Ele é resultado da sobreposição de campos magnéticos oriundos de fontes internas e externas à superfície terrestre.



Fonte: Adaptado de Zolesi e Cander (2014).

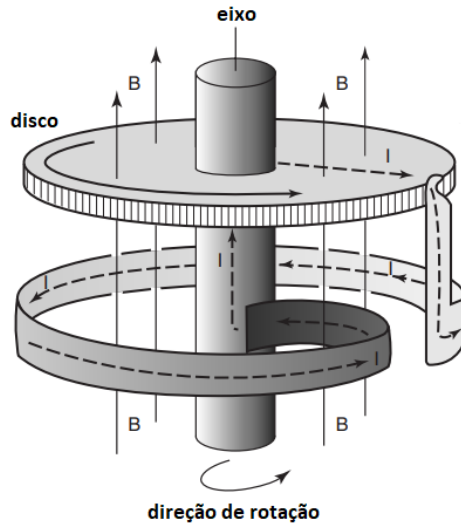
dos minerais magnéticos em sua composição. A partir do momento que o campo magnético é retirado, a magnetização induzida desaparece. Assim, apenas a magnetização remanente permanece. Esse tipo de magnetização pode ser alcançada pelas rochas por diferentes processos, sendo que o térmico é o mais onipresente e o que conduz a uma magnetização remanente mais intensa. É dessa forma que as rochas ígneas e metamórficas adquirem suas magnetizações remanentes, ao arrefecer abaixo de suas respectivas temperaturas de Curie (FREEDEN, 2015). À medida que as rochas arrefecem abaixo dessa temperatura, elas se tornam magnetizadas em proporção, tanto em intensidade quanto em direção, ao campo magnético do ambiente em que se encontram. Assim sendo, as rochas atuam como amostras do campo magnético no momento de ocorrência do processo de arrefecimento e podem ser utilizadas para estudar o campo magnético de épocas remotas. A contribuição da crosta da Terra para o campo geomagnético se dá por meio desses dois tipos de magnetização (LANZA; MELONI, 2006).

A parte principal do campo geomagnético, que corresponde a mais de 95% do campo observado na superfície terrestre, é devida a uma fonte no interior da Terra em profundidades superiores a 2900 km. Naturalmente, essa fonte dá origem ao campo principal da Terra (FREEDEN, 2015). Essas profundidades são pertinentes ao núcleo, que é composto majoritariamente de ferro metálico com pequenas quantidades de níquel e outros elementos (SKINNER; MURCK, 2011). O campo principal é gerado no núcleo externo, uma região na qual temperatura e pressão estão equilibradas de forma que o ferro é fundido e existe na forma líquida. Em virtude da rotação da Terra, o ferro fundido está continuamente fluindo em torno do núcleo interno, o qual se encontra em estado sólido por conta das pressões elevadas. Assim sendo, uma corrente elétrica é estabelecida no núcleo externo gerando o campo principal.

A ideia de que um fluido condutor em movimento rotativo é capaz de gerar e sustentar um campo magnético é uma aplicação da teoria do dínamo. Essa teoria explica a origem do campo principal em termos de um dínamo auto-excitado. Um modelo mecânico de dínamo auto-excitado foi desenvolvido nos anos 1940 pelo físico alemão Walter M. Elsasser e pelo geofísico britânico Edward C. Bullard (FOWLER, 2005). Ele consiste de um disco metálico rotacionando em torno de seu eixo em um campo magnético \mathbf{B} , como ilustra a Figura 2. O movimento do disco imerso no campo magnético produz uma diferença de potencial entre o centro e sua periferia. Assim sendo, uma corrente elétrica I começa a fluir radialmente para fora e percorre o fio em espiral que circunda o eixo do disco. Consequentemente, ela produz um campo magnético que reforça o campo original e intensifica a corrente inicial. Portanto, o sistema é auto-sustentado e produz o seu próprio campo magnético, contanto que o disco permaneça rotacionando rápido o suficiente.

O campo principal em conjunto com o campo oriundo das rochas magnetizadas na crosta compõem o campo interno, pois são fontes internas à superfície terrestre (FREEDEN,

Figura 2 – Ilustração do modelo mecânico de um dínamo auto-excitado. Este é composto por um disco condutor rotativo imerso em um campo magnético \mathbf{B} . Em decorrência do movimento, uma corrente elétrica radial I é estabelecida. Ela percorre o fio espiral em torno do eixo do disco, criando um campo magnético que reforça o campo original e intensifica a própria corrente.



Fonte: Adaptado de [Campbell \(2003\)](#).

2015). Há também fontes externas de campo magnético. Elas consistem de correntes elétricas na ionosfera e na magnetosfera em virtude da incidência de radiação solar na atmosfera neutra e da interação do vento solar com o campo geomagnético ([LANZA; MELONI, 2006](#)). Essas correntes contribuem de forma não negligenciável para o campo geomagnético observado na superfície e em altitudes pertinentes aos satélites. Apesar disso, elas contribuem apenas com uma fração do campo geomagnético ([YAMAZAKI; MAUTE, 2017](#)). O campo originado na magnetosfera terrestre decorre primariamente da corrente de anel e das correntes na magnetopausa e magnetocauda. Enquanto isso, as correntes ionosféricas são responsáveis pelas variações diárias do campo geomagnético, também chamadas de variações S_q , na ordem de poucas dezenas de nT. Essas correntes apresentam magnitudes de vários $\mu\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ e fluem no lado diurno da região E da ionosfera nas altitudes do dínamo ionosférico entre 90 e 150 km. Elas são geradas pelo movimento da atmosfera neutra através do campo principal, dando origem a forças eletromotrizes que geram campos elétricos e correntes. Os eletrojetos aurorais, bem como o eletrojeto equatorial, também têm sua parcela de contribuição. Em suma, as fontes do campo geomagnético têm origens físicas diferentes e podem ser encontradas tanto abaixo, na forma de correntes elétricas e rochas magnetizadas, quanto acima da superfície, apenas na forma de correntes elétricas ([FREEDEN, 2015](#)). Cada fonte produz uma contribuição com propriedades espaço-temporais específicas. Esse fato permite identificar e investigar a contribuição de cada uma delas.

As variações temporais dos campos magnéticos de origem externa induzem correntes

elétricas na crosta e no manto superior da Terra, as quais produzem campos magnéticos que contribuem para o campo geomagnético (FREEDEN, 2015). Isso ocorre porque a Terra é parcialmente condutora, de forma que correntes elétricas podem ser induzidas em suas partes condutoras como resultado do processo de indução eletromagnética (LANZA; MELONI, 2006). Além disso, o movimento das águas oceânicas, eletricamente condutoras, através do campo principal gera correntes elétricas secundárias pelo processo de indução por movimento. Os sistemas de corrente magnetosféricas e ionosféricas também induzem correntes secundárias no oceano.

A redação do presente capítulo está estruturada da seguinte forma. A seção 2.1 apresenta algumas notas históricas sobre geomagnetismo que remontam aos gregos e chineses antigos. Ela procura mostrar a evolução do conhecimento humano sobre essa temática tão importante. A seção 2.2 trata da forma como as componentes do campo geomagnético são usualmente representadas. A seção 2.3 discute a primeira aproximação do campo geomagnético, que coincide com o campo de um dipolo magnético. Na seção 2.4, uma generalização da aproximação por dipolo é feita utilizando análise por harmônicos esféricos. Dessa forma, as contribuições de fontes internas e externas de campo magnético para o campo geomagnético podem ser consideradas separadamente. A seção 2.5 trata da magnetosfera, que corresponde ao domínio espacial compreendido pelas linhas do campo geomagnético. A magnetosfera atua como um “depósito” tanto de partículas quanto de energia advindas da interação com o vento solar. A seção 2.6 trata dos índices geomagnéticos. Eles têm por objetivo mensurar a atividade geomagnética causada pelo forçante solar na forma de tempestades geomagnéticas e subtempestades magnetosféricas (ver seção 2.7), e de eventos HILDCAA (ver seção 2.8). Este é o primeiro capítulo da parte de Fundamentos Físicos, uma vez que a Atmosfera Neutra e a Ionosfera estão imersas no campo geomagnético, o qual tem forte influência no comportamento dessas duas entidades físicas.

2.1 Notas Históricas

Os gregos antigos já tinham conhecimento das propriedades atrativas da magnetita, como ilustra a Figura 3a. A magnetita é um mineral magnético e seu nome é derivado da região onde ela era naturalmente encontrada, chamada de Magnésia. Sua capacidade de atrair pedaços de ferro foi observada por alguns filósofos gregos. Supõe-se que a mais antiga dessas observações é devida a Tales de Mileto no século VI a.C (CAMPBELL, 2001). Aristóteles, séculos mais tarde, citou Tales em seu tratado sobre a alma:

“Tales parece ter percebido também a alma como algo capaz de mover - a avaliar pelo que se recorda das suas perspectivas -, se de fato afirmou que o ímã possui alma por mover o ferro.”

Uma menção desse fato também pode ser encontrada na obra *Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres* do grande biógrafo e historiador Diógenes Laércio, escrita na primeira metade do século III d.C. Em sua obra, ele diz:

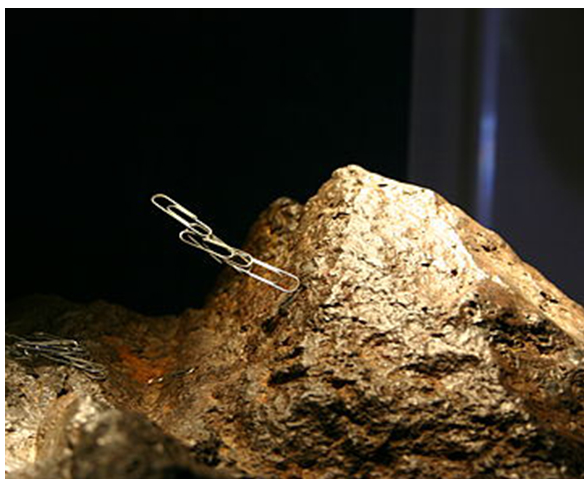
“Aristóteles e Hípias afirmam que, raciocinando a partir da pedra-ímã e do âmbar, Tales atribuiu uma alma até a objetos inanimados” (LAERTIUS; MENSCH; MILLER, 2020).

Por outro lado, os chineses constataram a propriedade direcional da magnetita quando suspensa livremente. A forma mais antiga de bússola magnética se deve a eles. Esse fato é corroborado por textos antigos que relatam a fabricação da bússola *Si Nan*, ilustrada na Figura 3b, já no século III a.C. (MERRILL; MCELHINNY; MCFADDEN, 1996; CAMPBELL, 2001). Essa bússola foi esculpida em magnetita no formato de uma concha para se assemelhar à constelação da Ursa Maior.

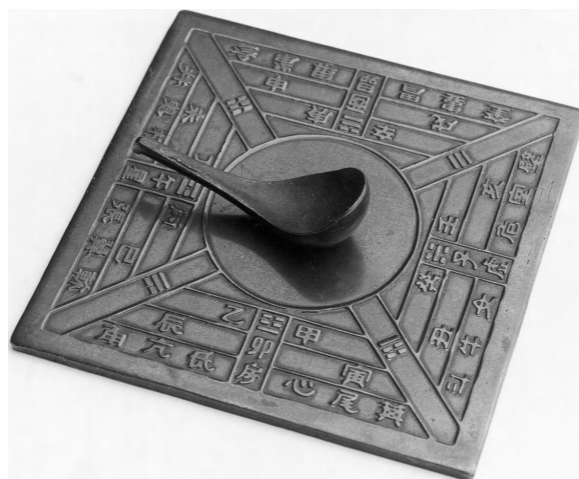
A bússola chegou à Europa apenas no século XII, uma vez que a primeira descrição europeia desse utensílio foi feita em 1190 por um monge inglês de St. Albans chamado Alexander Neckham. Não se sabe ao certo como isso ocorreu, mas se supõe que esse conhecimento foi transmitido da China para a Europa por meio dos árabes nas rotas de comércio marítimas e terrestres (MERRILL; MCELHINNY; MCFADDEN, 1996). Com a chegada da bússola no continente europeu, não tardou para que os estudiosos da época começassem a investigá-la. O estudioso francês Petrus Peregrinus provavelmente teve contato com a bússola em suas viagens de navio em direção à Terra Santa durante a Sétima

Figura 3 – Os gregos identificaram a capacidade da magnetita de atrair o ferro, ao passo que os chineses verificaram a capacidade direcional da magnetita e construíram a bússola *Si Nan*.

- (a) A magnetita é um mineral capaz de atrair pedaços de ferro. Era naturalmente encontrada na Magnésia.
- (b) Reprodução da bússola chinesa (*Si Nan*) construída no formato da constelação da Ursa Maior.



Fonte: Christensen (2019).



Fonte: Campbell (2003).

Cruzada entre 1248 e 1254 (CAMPBELL, 2001). Pouco se sabe da vida de Peregrinus, exceto o que pode ser deduzido de uma nota deixada por ele em um de seus quase 40 manuscritos sobre magnetismo:

“Finalizada no acampamento do cerco de Lucera, no ano do nosso Senhor 1269, no oitavo dia de Agosto.”

Isso indica que Petrus era membro do exército de Carlos I de Anjou, rei da Sicília, que sitiou Lucera em 1269 (GLICK; LIVESEY; WALLIS, 2017).

Petrus realizou uma série de experimentos com peças esféricas de magnetita, cujos resultados foram descritos em uma “carta” datada de 1269 e intitulada *Epistola de Magnete* (MERRILL; MCELHINNY; MCFADDEN, 1996). Ela é composta por treze capítulos e foi dividida em duas partes. A primeira delas tem dez capítulos e descreve as propriedades físicas e os efeitos da magnetita. Petrus descobriu a natureza dipolar da magnetita e mostrou como identificar cada polo com o auxílio de pequenas agulhas dispostas sobre ela. Ele verificou que a força magnética nos polos é maior e está orientada verticalmente. Além disso, ele constatou que polos semelhantes se repelem enquanto os opostos se atraem (CHAPMAN, 1944). A segunda parte, com três capítulos, descreve três dispositivos magnéticos (GLICK; LIVESEY; WALLIS, 2017). Apesar de ter sido escrita em 1269 e de ter circulado por toda a Europa nos séculos subsequentes, a *Epistola* só foi formalmente publicada sob a autoria de Petrus em 1558.

A chegada da bússola no continente europeu foi um evento de grande importância, pois já no início do século XV ela se tornou um elemento típico dos navios espanhóis e portugueses que comercializavam ao longo da costa da África Ocidental (MERRILL; MCELHINNY; MCFADDEN, 1996). Alguns dizem que, colocando outros fatores de lado, as grandes viagens marítimas de Cristóvão Colombo, Vasco da Gama e Fernão de Magalhães só foram possíveis por conta do uso da bússola (BASAVIAH, 2011). Em 1492, na viagem de Cristóvão Colombo que culminou no descobrimento das Américas, ele observou um desalinhamento crescente entre a direção do polo norte magnético (dada pela bússola) e a direção do polo norte geográfico (estrela polar). Naquela época, o desalinhamento entre essas direções era quase imperceptível na parte leste do Atlântico Norte, chegando a zero na linha agônica. Porém, à medida que Colombo navegava para longitudes distantes no oeste, o desalinhamento tornava-se cada vez maior, como ilustra a Figura 4a. Para o mundo ocidental, este fato provavelmente foi a primeira observação documentada de que a declinação magnética D , ilustrada na Figura 4b, varia com a longitude (CAMPBELL, 2001). Na verdade, a primeira observação da declinação magnética parece ter sido feita na China, pelo astrônomo Yi-Xing, em torno do ano 720 d.C. A declinação magnética também varia com o tempo. Este fato só foi descoberto em 1634 por Henry Gellibrand, um professor de Astronomia da faculdade de Gresham em Londres. Por convenção, a

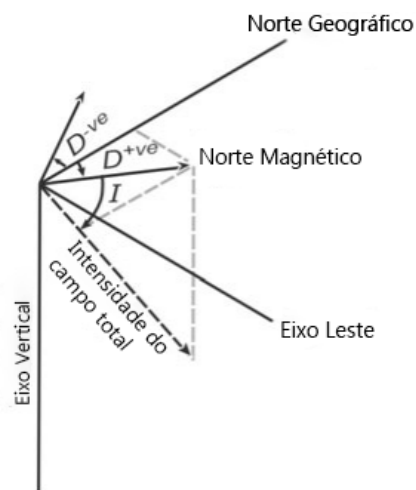
Figura 4 – A declinação magnética é um elemento geomagnético importante para a navegação, sendo definida como o ângulo entre os polos norte geográfico e magnético. Ela é positiva para leste do norte geográfico e negativa para oeste dele. A declinação é uma grandeza que depende tanto da longitude quanto do tempo.

(a) A direção dada pela bússola, quando mensurada na costa oeste da Espanha e de Portugal, apresentava um ínfimo desalinhamento com a direção do norte geográfico. Porém, quando mensurada nas ilhas caribenhas (Índias Ocidentais), o desalinhamento era considerável. Na linha agônica, ele é nulo.



Fonte: Adaptado de [Campbell \(2001\)](#).

(b) A declinação magnética D é o ângulo formado entre as direções definidas pelos polos norte geográfico e magnético. Por convenção, ela é positiva à leste do norte geográfico e negativa à oeste dele. A inclinação I é o ângulo entre o norte magnético e a componente total do campo geomagnético.



Fonte: Adaptado de [Basavaiah \(2011\)](#).

declinação magnética é positiva para leste do norte geográfico e negativa para oeste.

O século XVI é um período caracterizado por grandes descobertas no que tange ao geomagnetismo. Os europeus já sabiam que agulhas de aço poderiam ser permanentemente magnetizadas ao atritá-las com um pedaço de magnetita. Entretanto, eles não conseguiam explicar o comportamento da agulha após esse procedimento, pois sua extremidade norte inclinava-se para baixo como se tivesse adquirido peso, gerando um ângulo de inclinação I com a horizontal ([BASAVIAH, 2011](#)). Formalmente, I é o ângulo entre a direção do norte magnético e a direção da componente total do campo geomagnético, como ilustra a Figura 4b. Esse comportamento foi mencionado pela primeira vez por George Hartmann em uma carta datada de 1544, mas que infelizmente só foi encontrada nos arquivos de Königsberg em 1831. Dessa forma, sua descoberta não teve influência em estudos sobre geomagnetismo ([MERRILL; MCELHINNY; MCFADDEN, 1996](#)). O fenômeno da “agulha inclinada” foi redescoberto em 1576 e explicado no início dos anos 1580 pelo marinheiro e hidrógrafo inglês Robert Norman.

Em 1581, William Gilbert (1544-1603), ilustrado na Figura 5a, ficou bastante interessado em geomagnetismo e iniciou seus estudos coletando informações de diversas fontes disponíveis naquela época ([BASAVIAH, 2011](#)). Por meio de uma série de experimentos,

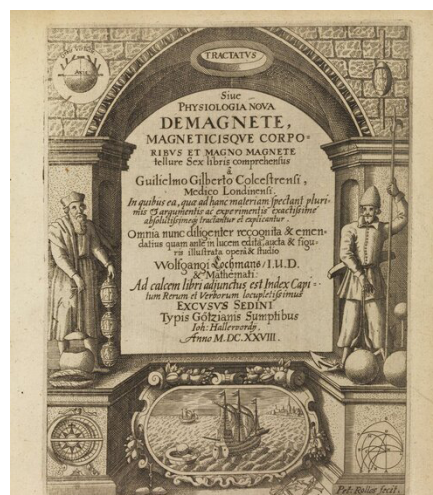
Figura 5 – Durante o reinado da rainha Elizabeth I, Gilbert publicou sua obra *De Magnete*. Ela é um compilado de todo o conhecimento disponível sobre magnetismo, junto com diversas contribuições próprias obtidas por meio de experimentos que realizou.

(a) Gilbert era um homem multidisciplinar, com interesse em várias áreas do conhecimento. Sua obra *De Magnete* é um ponto de inflexão na história do geomagnetismo.



Fonte: [William... \(2021\)](#).

(b) Capa da obra *De Magnete* de 1600. À esquerda, há um filósofo demonstrando a capacidade de atração da magnetita. À direita, há um marinheiro representando a importância prática do magnetismo.



Fonte: [Royal Society \(2021\)](#).

Gilbert investigou a variação da inclinação magnética de várias agulhas em repouso na superfície de uma esfera de magnetita, a qual chamou de *terrella*. Ele notou que, com exceção dos polos (equador), onde elas repousavam perpendicularmente (paralelamente) à superfície, as agulhas permaneciam inclinadas. Então, em alusão ao fenômeno da agulha inclinada descoberto por Norman, Gilbert concluiu que a Terra é um imenso ímã esférico (CHAPMAN, 1944). Os resultados de seus experimentos podem ser encontrados em sua obra *De Magnete* publicada em 1600, como ilustra a Figura 5b. Ele a dividiu em 6 livros, citando Petrus e Norman diversas vezes (CHAPMAN, 1944; SMITH, 1997). Ele descreve Norman como:

“Um marinheiro habilidoso e artífice engenhoso, primeiro a descobrir o mergulho da agulha magnética.”

Quanto ao trabalho de Petrus, ele escreve:

“Um pequeno trabalho, acima da média para a época, sob o nome de um certo Petrus Peregrinus, que alguns consideram ter-se originado das visões de Roger Bacon, o Inglês de Oxford.”

A obra *De Magnete* é o primeiro tratado científico moderno sobre magnetismo e trouxe três grandes contribuições para a ciência. A primeira foi a ordenação e extensão do

conhecimento sobre magnetismo, tendo como base experimentos originados ou verificados por Gilbert. A segunda foi a ordenação e extensão do conhecimento sobre eletricidade de forma bastante análoga. A terceira foi a sua concepção de que a Terra é um grande ímã esférico. Gilbert trabalhou no desenvolvimento de sua obra por quase 2 décadas e alguns estimam que ele chegou a desembolsar cerca de £5000 (SMITH, 1997). Gilbert desejava tornar o assunto mais rigoroso, pois muitos dos que escreveram sobre o mesmo antes dele o fizeram apenas por ouvir “dizer”. Era um terreno fértil para superstições e inverdades. Alguns diziam que o poder magnético da magnetita era enfraquecido durante a noite, que ela tinha o poder de reconciliar casamentos e assim por diante (CHAPMAN, 1944). O sucesso e a grande reputação de Gilbert chamaram a atenção da Rainha Elizabeth I. Em 1601, ela o nomeou como seu médico particular e ofereceu a ele uma pensão anual de £100, paga em parcelas trimestrais, para encorajá-lo em seus estudos. Apesar da genialidade de Gilbert, suas conclusões sobre geomagnetismo não foram sempre corretas. Por exemplo, certa vez ele afirmou que a declinação magnética em um dado local deve permanecer sempre constante, contanto que nenhuma mudança cataclísmica ocorra. Como comentado, Gellibrand provou anos mais tarde que a declinação magnética não é constante.

Mesmo com o empenho de Gilbert e de seus predecessores na ampliação do conhecimento sobre eletricidade e magnetismo, foi apenas no século XIX que os estudiosos começaram a verificar que estes assuntos são inseparáveis. Em 1820, o cientista dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851) observou que a agulha de uma bússola magnética sofre deflexão na presença de corrente elétrica, como ilustram as Figuras 6a e 6b. Ele anunciou seus resultados em um relatório de 4 páginas publicado em latim, no dia 21 de julho de 1820 (BASAVIAH, 2011). Essa foi a primeira evidência de que eletricidade e magnetismo estão conectados. As constatações de Oersted se espalharam rapidamente entre a comunidade científica da época. Devido a simplicidade de seu experimento, ele foi reproduzido reiteradamente por diversas pessoas. Em particular, destaca-se o físico francês

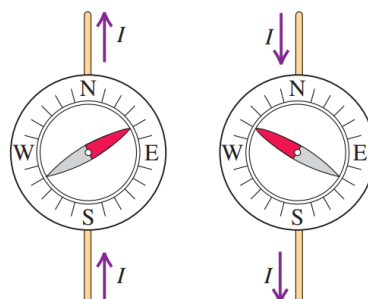
Figura 6 – No início do século XIX, Oersted descobriu que há uma relação entre magnetismo e cargas em movimento. Ele observou o comportamento de uma bússola próxima de um fio condutor de corrente.

(a) Sem a presença de corrente elétrica, a bússola aponta para o norte.



Fonte: Adaptado de Young et al. (2016).

(b) Quando há corrente elétrica, a agulha da bússola sofre deflexão.



Fonte: Adaptado de Young et al. (2016).

André-Marie Ampère (1775-1836). Ampère resolveu o grande mistério dentro de uma semana. Ele conduziu uma série de experimentos que mostraram que o ingrediente básico do magnetismo é a corrente elétrica e que ele pode existir mesmo na ausência de ímãs permanentes. Em 1823, ele publicou seu famoso tratado sobre eletricidade e magnetismo dando uma explicação para esse fenômeno.

Com base nos resultados de Oersted, o físico britânico Michael Faraday (1791-1867) raciocinou que se eletricidade pode gerar magnetismo, então magnetismo deve ser capaz de gerar eletricidade. No dia 17 de outubro de 1831, Faraday encontrou uma solução para converter magnetismo em eletricidade. Em seu experimento, ele envolveu um fio de cobre em torno de um cilindro de papelão, criando um solenóide. Então, conectou um galvanômetro em suas extremidades. Ao inserir uma barra magnética no interior do solenóide, ele observou que o galvanômetro indicava a presença de uma corrente elétrica. O mesmo acontecia quando a barra era removida, mas nesse caso a corrente elétrica era no sentido contrário. Dessa forma, Faraday concluiu que eletricidade também pode ser produzida apenas por magnetismo (BASAVIAH, 2011).

O verdadeiro experimento que permitiu Faraday decifrar o relacionamento entre eletricidade e magnetismo era um pouco mais complicado. Nesse experimento, Faraday utilizou um anel de ferro. Em torno de um dos segmentos do anel, ele enrolou um fio de cobre criando um solenóide. Efetuou o mesmo procedimento em outro segmento do anel. No primeiro solenóide, ele conectou uma bateria, enquanto no segundo um galvanômetro. Faraday notou que quando a corrente no primeiro solenóide era estabelecida ou interrompida, uma corrente momentânea era induzida no segundo solenóide (CAVICCHI, 2006). Portanto, ele verificou que a corrente elétrica era produzida não pelo magnetismo em si, mas por sua variação temporal. Esse fenômeno é chamado de indução eletromagnética e foi exposto por Faraday perante a sociedade real de Londres em novembro de 1831 (BASAVIAH, 2011).

No início do século XIX, praticamente todo o conhecimento sobre eletricidade e magnetismo era resultado de experimentação. Isso começou a mudar a partir dos trabalhos do matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e do físico escocês James Clerk Maxwell (1831-1879). Gauss tinha bastante interesse em geomagnetismo e ficou impressionado com os resultados obtidos por Oersted e Ampère (BASAVIAH, 2011). No outono de 1828, Gauss foi convidado pelo geógrafo alemão Alexander von Humboldt (1769-1859) para uma conferência em Berlim (BUSSE, 2007). Nesse período, ele ficou ainda mais interessado em geomagnetismo após Humboldt ter apresentado a ele um grande número de problemas em aberto nessa área. Durante a conferência, Gauss conheceu o físico alemão Wilhelm Weber (1804-1891) a quem ofereceu uma posição permanente na Universidade de Göttingen em 1831. Nos anos seguintes, a colaboração entre Gauss e Weber produziu grandes frutos, tanto práticos quanto teóricos, que contribuíram muito para o

entendimento do campo geomagnético. Eles projetaram instrumentos e formularam um método matemático chamado de análise por harmônicos esféricos para representar o campo geomagnético global. Assim, Gauss mostrou que a maior parte do campo geomagnético se deve a fontes internas à Terra. Quanto a Maxwell, ele expressou matematicamente as ideias de Faraday e unificou a eletricidade e o magnetismo em um conjunto de 4 equações, as chamadas equações de Maxwell. Maxwell mostrou que campos elétricos e magnéticos se autossustentam, isto é, que a variação de um produz o outro. Essa é uma das mais formidáveis simetrias da natureza.

2.2 Elementos do Campo Geomagnético

O campo geomagnético tem uma direção e uma intensidade em todos os pontos do espaço e, portanto, é um campo vetorial. Na superfície terrestre, é conveniente descrever o vetor \mathbf{B} que representa o campo geomagnético de duas maneiras (CAMPBELL, 2003). Na primeira, ele é descrito em termos de três componentes ortogonais em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse sistema é orientado de modo que x aumenta na direção norte, y na direção leste e z na vertical em direção à Terra (BLAKELY, 1995). Nas direções opostas, os valores são negativos. A Figura 7 ilustra essas componentes. Por convenção, elas são denotadas por X , Y e Z , respectivamente, e expressas em nT. Em contrapartida, na segunda ele é descrito em termos de sua componente horizontal H , de sua componente vertical Z e da declinação magnética D . A declinação magnética é o ângulo entre o eixo x e a componente H . A primeira representação é chamada de representação XYZ , enquanto a segunda é chamada de representação HDZ . Da Figura 7, vem que

$$X = H \cos(D),$$

$$Y = H \sin(D).$$

Assim,

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$D = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right).$$

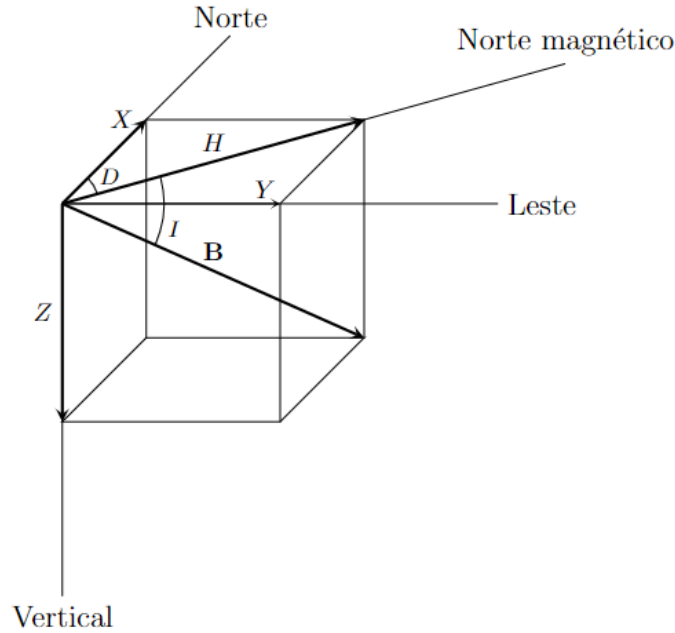
A intensidade B do campo geomagnético \mathbf{B} é dada por

$$B = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

O ângulo que \mathbf{B} faz com a horizontal é chamado de inclinação magnética I . Ela é dada por

$$\operatorname{tg}(I) = \frac{Z}{H}.$$

Figura 7 – Ilustração das componentes do campo geomagnético em um ponto da superfície terrestre no hemisfério norte. \mathbf{B} é o vetor do campo geomagnético neste ponto (B sua intensidade), H é a componente horizontal, X é a componente na direção norte, Y é a componente na direção leste e Z é a componente vertical. D é a declinação magnética e I é a inclinação magnética.



Fonte: O autor.

As componentes X , Y , Z e H , junto com a declinação magnética D e inclinação magnética I , constituem os elementos do campo geomagnético. Em um sistema de coordenadas esféricas centrado na Terra (assuma que ela é esférica), o vetor \mathbf{B} é escrito em termos de suas componentes B_r , B_θ e B_ϕ . Na superfície terrestre, essas componentes estão conectadas com as componentes X , Y e Z da seguinte forma

$$X = -B_\theta, \quad (2.1)$$

$$Y = B_\phi, \quad (2.2)$$

$$Z = -B_r. \quad (2.3)$$

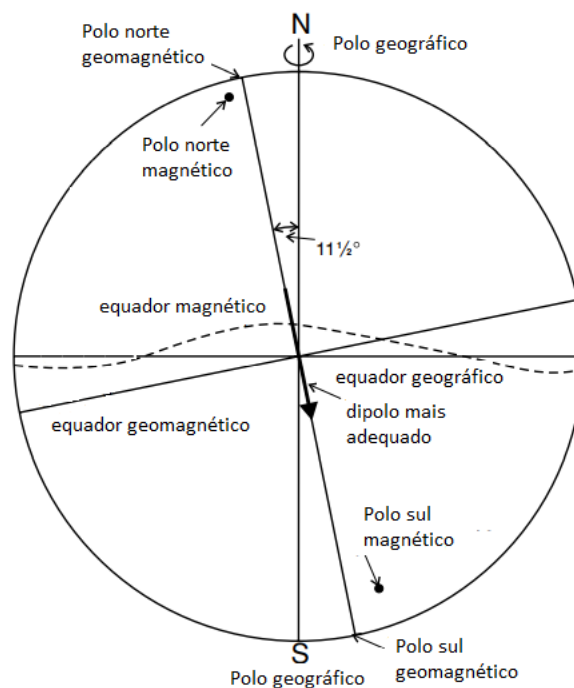
2.3 O Campo de Dipolo

Em uma primeira aproximação, o campo geomagnético pode ser visto como o campo de um dipolo magnético. Isso significa que um dipolo magnético que passa pelo centro da Terra produz um campo similar ao verdadeiro (ver Figura 1). A melhor aproximação é obtida quando o dipolo faz um ângulo de $11,5^\circ$ com o eixo de rotação da Terra (FOWLER, 2005). Como ilustra a Figura 8, o eixo que este dipolo determina “atravessa” a Terra em dois pontos de sua superfície, cujas coordenadas geográficas são 79°N , 71°O (Groenlândia) e 79°S , 109°L (Antártida). O primeiro destes pontos é chamado de polo norte geomagnético,

enquanto o segundo é chamado de polo sul geomagnético (TASCIONE, 2010). O plano que passa pelo centro da Terra e é perpendicular ao eixo do dipolo é chamado de plano equatorial do dipolo, enquanto a circunferência descrita pela interseção deste plano com a Terra é chamada de equador geomagnético. Há também os polos magnéticos, que são os pontos onde o campo geomagnético é vertical. O polo norte magnético está localizado em 76°N , 101°O , enquanto o polo sul magnético está em 66°S , 141°L . O equador magnético é o lugar geométrico dos pontos nos quais o campo geomagnético é horizontal (a inclinação magnética I é zero). Se o campo geomagnético fosse exatamente o de um dipolo, então tanto os polos magnéticos quanto o equador magnético iriam coincidir com os seus análogos geomagnéticos.

O objetivo desta seção é determinar a expressão analítica do campo magnético produzido por um dipolo magnético, tendo em vista a semelhança deste com o campo geomagnético. Este problema não pode ser abordado da mesma forma que o seu análogo elétrico, no qual há duas cargas de mesma intensidade e sinais opostos separadas por uma distância conhecida. De acordo com a lei de Gauss para o magnetismo, monopólos magnéticos não existem e a entidade fundamental do magnetismo é o dipolo magnético (os polos sempre ocorrem em pares). Experimentos mostram que um arco circular transportando uma corrente I se comporta como um dipolo magnético, onde é possível identificar

Figura 8 – Diagrama ilustrando a diferença entre os polos e equadores geográficos, magnéticos e geomagnéticos. A seta em negrito representa o momento de dipolo magnético, cujo ângulo de $11,5^\circ$ com o eixo de rotação da Terra produz um campo que melhor se aproxima do real.



Fonte: Adaptado de Fowler (2005).

os polos norte, no qual o campo emerge, e sul, no qual submerge. Assim, o problema se reduz a calcular o campo magnético \mathbf{B} produzido pela distribuição de corrente ilustrada na Figura 9.

Assim como é bastante conveniente determinar o campo elétrico de uma distribuição de carga a partir do campo potencial determinado por ela, o mesmo pode ser feito para um campo magnético produzido por uma distribuição de corrente. Neste caso, o campo potencial é uma grandeza vetorial chamada de potencial vetor magnético \mathbf{A} . A vantagem de se utilizar \mathbf{A} para determinar \mathbf{B} está no simples fato de que isso evita a aplicação direta da Lei de Biot-Savart. Para isso, considere a lei de Gauss para o magnetismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

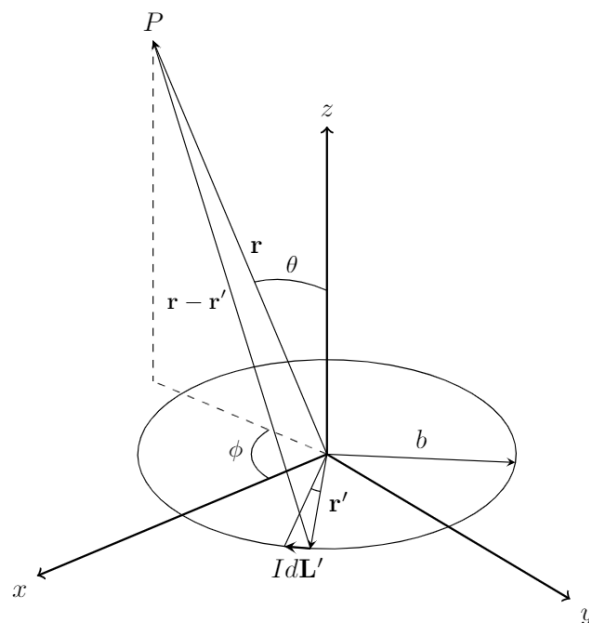
Então, como a divergência do rotacional de qualquer campo vetorial é zero, é possível escrever \mathbf{B} como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.4)$$

Para a distribuição de corrente ilustrada na Figura 9, \mathbf{A} é definido como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{L}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.5)$$

Figura 9 – Arco circular de raio b situado no plano xy e centrado na origem. A corrente I circula no sentido horário e produz um campo magnético \mathbf{B} com simetria azimutal. O ponto P é especificado pelo vetor posição \mathbf{r} , enquanto o elemento diferencial de corrente $I d\mathbf{L}'$ é especificado pelo vetor posição \mathbf{r}' .



Fonte: O autor.

em que C é o contorno fechado no qual a corrente I circula, $d\mathbf{L}'$ é o elemento diferencial de comprimento, \mathbf{r}' é o vetor posição do elemento diferencial de corrente $I d\mathbf{L}'$, \mathbf{r} é o vetor posição do ponto em que \mathbf{A} é avaliado e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Da Figura 9, nota-se que o elemento diferencial de comprimento é dado por

$$d\mathbf{L}' = -(-\sin \phi' \mathbf{e}_x + \cos \phi' \mathbf{e}_y) b d\phi', \quad 0 \leq \phi' \leq 2\pi. \quad (2.6)$$

O vetor posição do ponto P é

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (2.7a)$$

Analogamente, o vetor posição de $d\mathbf{L}'$ é

$$\mathbf{r}' = b \cos \phi' \mathbf{e}_x + b \sin \phi' \mathbf{e}_y. \quad (2.7b)$$

Subtraindo a equação (2.7b) da equação (2.7a) chega-se em

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (r \sin \theta \cos \phi - b \cos \phi') \mathbf{e}_x + (r \sin \theta \sin \phi - b \sin \phi') \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z,$$

de modo que

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 &= (r \sin \theta \cos \phi - b \cos \phi')^2 + (r \sin \theta \sin \phi - b \sin \phi')^2 + (r \cos \theta)^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 2br \sin \theta \cos \phi \cos \phi' + b^2 \cos^2 \phi' \\ &\quad + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - 2br \sin \theta \sin \phi \sin \phi' + b^2 \sin^2 \phi' \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta \\ &= b^2 + r^2 - 2br \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') \\ &= b^2 + r^2 - 2br \sin \theta \cos (\phi - \phi'). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= [b^2 + r^2 - 2br \sin \theta \cos (\phi - \phi')]^{-1/2} \\ &= (b^2 + r^2)^{-1/2} \left[1 - \frac{2br \sin \theta \cos (\phi - \phi')}{b^2 + r^2} \right]^{-1/2} \\ &= (b^2 + r^2)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2br \sin \theta \cos (\phi - \phi')}{b^2 + r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \left(\frac{2br \sin \theta \cos (\phi - \phi')}{b^2 + r^2} \right)^2 + \dots \right] \quad \text{use a série binomial} \\ &\approx \frac{1}{r} + \frac{b \sin \theta \cos (\phi - \phi')}{r^2}, \quad r \gg b. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Substituindo as equações (2.6) e (2.8) na equação (2.5) resulta em

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{L}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= -\frac{\mu_0 I b}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{b \sin \theta \cos(\phi - \phi')}{r^2} \right) (-\sin \phi' \mathbf{e}_x + \cos \phi' \mathbf{e}_y) d\phi' \\
&= -\frac{\mu_0 I b}{4\pi} \left[-\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \phi'}{r} + \frac{b \sin \theta \sin \phi' \cos(\phi - \phi')}{r^2} \right) d\phi' \mathbf{e}_x \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \phi'}{r} + \frac{b \sin \theta \cos \phi' \cos(\phi - \phi')}{r^2} \right) d\phi' \mathbf{e}_y \right] \\
&= -\frac{\mu_0 I b^2 \sin \theta}{4r^2} [-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y] \\
&= -\frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \mathbf{e}_\phi, \quad r \gg b. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

em que $m = I\pi b^2$ é momento de dipolo magnético do arco circular de corrente. Portanto, utilizando a equação (2.9) na equação (2.4) obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\mu_0 m \sin^2 \theta}{4\pi r^2} \right) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r} \right) \mathbf{e}_\theta \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r - \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3} \mathbf{e}_\theta \\
&= -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta). \tag{2.10}
\end{aligned}$$

A representação tridimensional da equação (2.10) está ilustrada na Figura 10.

As componentes de \mathbf{B} em cada uma das direções são dadas por

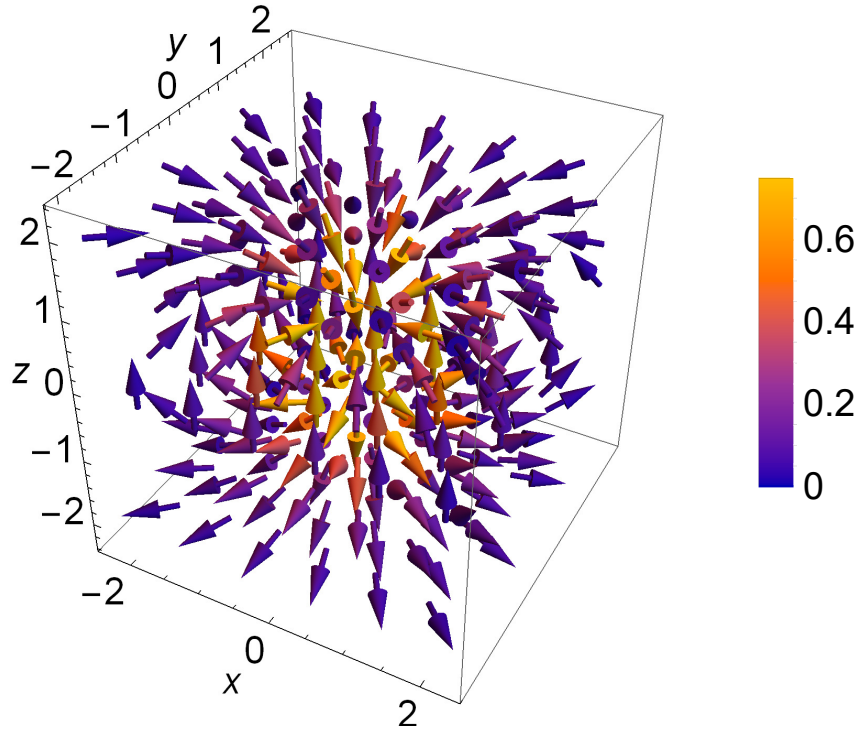
$$B_r(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \tag{2.11a}$$

$$B_\theta(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}, \tag{2.11b}$$

$$B_\phi(r, \theta, \phi) = 0, \tag{2.11c}$$

em que B_r é a componente radial, B_θ é a componente sul e B_ϕ é a componente leste

Figura 10 – Representação tridimensional do campo magnético produzido pela distribuição de corrente descrita na Figura 9. O momento de dipolo magnético está na direção $-\mathbf{e}_z$. Assim, o polo norte está embaixo e o sul em cima, como ocorre com o campo geomagnético. A intensidade do campo é maior na proximidade dos polos.



Fonte: O autor.

(FOWLER, 2005). Então, a magnitude de \mathbf{B} em qualquer ponto é

$$\begin{aligned}
 B(r, \theta, \phi) &= \sqrt{B_r^2(r, \theta, \phi) + B_\theta^2(r, \theta, \phi) + B_\phi^2(r, \theta, \phi)} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\right)^2 [4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta]} \\
 &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta} \\
 &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.
 \end{aligned}$$

Para uma primeira aproximação, o campo geomagnético se comporta como o campo \mathbf{B} do dipolo magnético. Então, é possível utilizar as equações (2.11a)-(2.11c) nas equações (2.1)-(2.3) para obter os elementos do campo geomagnético. Defina uma constante B_0 como

$$B_0 = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_E^3},$$

em que R_E é o raio da Terra. Então, para a superfície terrestre tem-se que

$$\begin{aligned} Z &= -B_r(R_E, \theta, \phi) = 2B_0 \cos \theta, \\ H &= |B_\theta(R_E, \theta, \phi)| = B_0 \sin \theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} I &= \frac{Z}{H} \\ &= \frac{2B_0 \cos \theta}{B_0 \sin \theta} \\ &= 2 \cotg \theta \\ &= 2 \operatorname{tg} \lambda, \end{aligned}$$

em que $\lambda = 90^\circ - \theta$ é a latitude magnética.

2.4 Análise por Harmônicos Esféricos

A análise por harmônicos esféricos (SHA, do inglês *Spherical Harmonic Analysis*) é uma metodologia matemática desenvolvida para modelar grandezas físicas que variam com a posição sobre a superfície de uma esfera. Partindo de uma dispersão de medições discretas de uma grandeza física sobre uma esfera, a SHA é capaz de sintetizar uma equação aplicável para toda a esfera. Conseqüentemente, essa equação pode ser utilizada para interpolar o comportamento dessa grandeza física para regiões da esfera que não possuem medidas (BLAKELY, 1995). Noutros termos, uma grandeza física definida sobre uma esfera é escrita como uma série infinita de harmônicos esféricos cujos coeficientes são determinados a partir de medições realizadas na superfície da esfera. A SHA aparece em muitos contextos, tais como em geofísica e astronomia. Por exemplo, ela pode ser utilizada para modelar variações na altura superficial da Terra, de planetas e da Lua (BRETT, 1988). Ela também pode ser aplicada para modelar o campo geomagnético.

Sob certas hipóteses simplificadoras que parecem ser satisfeitas na superfície da Terra, o campo geomagnético \mathbf{B} pode ser escrito como o gradiente de um potencial magnético V que satisfaz a equação de Laplace. Assim, V é expresso como uma série infinita de harmônicos esféricos da mesma forma que uma função do tempo é representada por uma série de Fourier. O primeiro termo dessa série corresponde ao potencial devido a um dipolo situado no centro da Terra (ver seção 2.3). Em 1838, Gauss foi o primeiro a aplicar a SHA para o campo geomagnético. Ele determinou os coeficientes da expansão de V em harmônicos esféricos a partir de valores conhecidos dos elementos geomagnéticos X , Y e Z (MERRILL; MCELHINNY, 1983). Então, ele chegara a conclusão de que o campo observado na superfície terrestre se origina inteiramente no interior da Terra. Atualmente, é sabido que Gauss estava parcialmente correto, uma vez que uma pequena parte do campo

geomagnético é de origem externa (correntes ionosféricas e magnetosféricas).

O ponto de partida para a obtenção do potencial magnético V do campo geomagnético \mathbf{B} são as equações de Maxwell relativas ao campo magnético:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \quad (2.12a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.12b)$$

em que \mathbf{J} é a densidade de corrente, \mathbf{D} é a densidade de fluxo elétrico e μ é a permeabilidade magnética. Gauss assumiu que a Terra é uma esfera e que todas as medições do campo geomagnético são realizadas sobre a superfície dessa esfera (GUBBINS; HERRERO-BERVERA, 2007). Além disso, há uma suposição implícita de que não há correntes elétricas superficiais na superfície da esfera, tampouco correntes elétricas fluindo radialmente da Terra para o ar (e vice-versa). Experimentos mostram que a intensidade das correntes que fluem da atmosfera em direção à superfície terrestre (e vice-versa) são, em média, da ordem de $1 \times 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$. Dessa forma, elas são insuficientes para produzir um campo magnético significativo (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Em verdade, a região entre a superfície terrestre e 50 km de altura pode ser considerada como um vácuo eletromagnético (MERRILL; MCELHINNY; MCFADDEN, 1996). Assim sendo, é razoável assumir que $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{0}$, de modo que a equação (2.12a) se reduz a $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Isso significa que \mathbf{B} é conservativo na região de interesse e que existe um potencial magnético V tal que

$$\mathbf{B} = -\nabla V. \quad (2.13)$$

Portanto, substituindo a equação (2.13) na equação (2.12b), verifica-se que V satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0. \quad (2.14)$$

Uma vez que o problema abordado tem simetria esférica, é natural considerar a equação (2.14) no sistema de coordenadas esféricas. Nesse caso, ela é escrita como

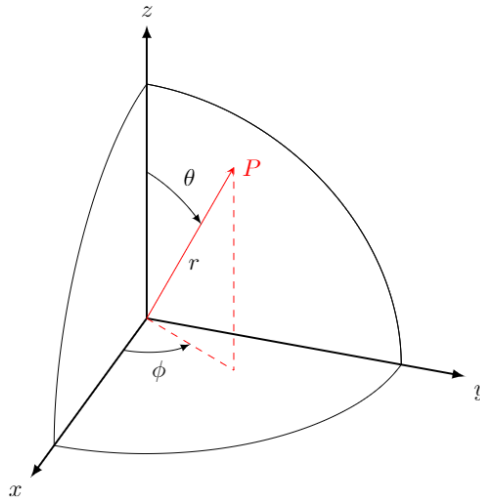
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0, \quad (2.15)$$

em que r é a distância radial em relação ao centro da Terra, θ é a colatitude e ϕ a longitude (ver Figura 11). Para resolver a equação (2.15), é conveniente utilizar o método

Figura 11 – Representação esquemática do sistema de coordenadas esféricas cuja origem está no centro da Terra. A coordenada r representa a distância radial do ponto P , θ a sua colatitude e ϕ sua longitude.



Fonte: O autor.

de separação de variáveis. O primeiro passo é assumir uma solução da forma

$$V(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (2.16)$$

em que R é uma função apenas de r , Θ apenas de θ e Φ apenas de ϕ . A vantagem dessa abordagem reside no fato de que essas três funções podem ser encontradas resolvendo três equações diferenciais ordinárias. Avaliando as derivadas parciais de primeira e segunda ordem da equação (2.16) resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{dR}{dr} \Theta \Phi, & \frac{\partial V}{\partial \theta} &= R \Phi \frac{d\Theta}{d\theta}, & \frac{\partial V}{\partial \phi} &= R \Theta \frac{d\Phi}{d\phi}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{d^2 R}{dr^2} \Theta \Phi, & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= R \Phi \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}, & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} &= R \Theta \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}. \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas parciais acima na equação (2.15) chega-se em

$$\Theta \Phi \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \Theta \Phi \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R \Phi \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2} R \Phi \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R \Theta \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0. \quad (2.17)$$

Para pontos em que $V \neq 0$, a equação (2.17) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2 \Theta} \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0. \quad (2.18)$$

Multiplicando a equação (2.18) por $r^2 \sin^2 \theta$ vem que

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r \sin^2 \theta}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{\sin^2 \theta}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cotg \theta}{\Theta} \sin^2 \theta \frac{d\Theta}{d\theta} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}. \quad (2.19)$$

O lado esquerdo da equação (2.19) depende apenas das variáveis r e θ , enquanto o lado direito depende apenas da variável ϕ . É sabido que a igualdade de dois lados que dependem de variáveis distintas só pode acontecer se cada lado for igual a uma constante. Por conveniência, designe tal constante por m^2 . Então, duas equações são obtidas ao igualar cada um dos lados da equação (2.19) por essa constante. De fato,

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0, \quad (2.20)$$

e

$$\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r \operatorname{sen}^2 \theta}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\operatorname{cotg} \theta}{\Theta} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\Theta}{d\theta} = m^2. \quad (2.21)$$

Dividindo ambos os lados da equação (2.21) por $\operatorname{sen}^2 \theta$ chega-se em

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\operatorname{cotg} \theta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\theta} - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 0,$$

ou

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} = \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \frac{\operatorname{cotg} \theta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\theta}. \quad (2.22)$$

Novamente, o lado esquerdo da equação (2.22) só depende de r , enquanto o lado direito só depende de θ . Dessa forma, ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Por conveniência, suponha que $l(l+1)$ seja essa constante. Então,

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} = l(l+1) \iff \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1)R = 0, \quad (2.23)$$

e

$$\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \frac{\operatorname{cotg} \theta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\theta} = l(l+1)$$

ou

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \Theta = 0. \quad (2.24)$$

A equação (2.23) já está na forma desejada. Quanto a equação (2.24), a substituição $x = \cos \theta$ irá colocá-la em uma forma para a qual as soluções são conhecidas. Assim,

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{dx} \implies \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{dx}. \quad (2.25)$$

Então, substituindo a equação (2.25) na equação (2.24) chega-se em

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0, \quad (2.26)$$

que é conhecida como equação associada de Legendre. Portanto, ao assumir que a solução da equação de Laplace é dada pela equação (2.16), foram obtidas três equações diferenciais ordinárias nas três coordenadas esféricas, conforme equações (2.20), (2.23) e (2.26).

O fato de que ϕ é o ângulo azimutal (ver Figura 11) sugere que a solução da equação (2.20) deve ser periódica (de período 2π) em vez de exponencial. Isso significa que m deve ser um inteiro. Logo, a solução é da forma

$$\Phi_m(\phi) = G_m \cos(m\phi) + I_m \sin(m\phi), \quad (2.27)$$

em que G_m e I_m são constantes. A equação (2.23) é uma equação de Euler-Cauchy, cuja solução pode ser convenientemente encontrada assumindo $R(r) = r^b$. Isso fornece

$$R'(r) = br^{b-1} \quad \text{e} \quad R''(r) = b(b-1)r^{b-2}.$$

Substituindo essas igualdades na equação (2.23) ela se reduz a

$$r^2 b(b-1)r^{b-2} + 2rbr^{b-1} - l(l+1)r^b = 0 \iff [b(b+1) - l(l+1)]r^b = 0.$$

Isso resulta na igualdade $b(b+1) = l(l+1)$, que apresenta duas soluções: $b = l$ e $b = -l - 1$. Portanto, para um dado valor de l a solução da equação (2.23) é dada por

$$\begin{aligned} R_l(r) &= D'_l r^l + E'_l r^{-(l+1)} \\ &= D_l \left(\frac{r}{a} \right)^l + E_l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

em que $D'_l = D_l/a^l$ e $E'_l = E_l a^{l+1}$ são constantes, e a é o raio da Terra. A equação (2.26) tem por solução o polinômio associado de Legendre $P_l^m(\cos \theta)$ e a função associada de Legendre de segunda espécie $Q_l^m(\cos \theta)$, em que l e m são inteiros tais que $0 \leq m \leq l$. Dessa forma, tem-se

$$\Theta_l^m(\theta) = \alpha_l^m P_l^m(\cos \theta) + \beta_l^m Q_l^m(\cos \theta), \quad (2.29)$$

em que α_l^m e β_l^m são constantes, e

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l.$$

As funções $Q_l^m(\cos \theta)$ divergem quando $\cos \theta = \pm 1$ (para $\theta = 0, \pi$). Fisicamente, o campo

deve ser finito nesses pontos. Isso implica que $\beta_l^m = 0$. Então, fazendo $\alpha_l^m = a\delta_l^m$ a equação (2.29) é reescrita como

$$\Theta_l^m(\theta) = a\delta_l^m P_l^m(\cos \theta). \quad (2.30)$$

Agora que as soluções de cada uma das três equações diferenciais ordinárias foram obtidas, é possível combiná-las considerando todos os valores permitidos das constantes de separação l e m . Dessa forma, de acordo com as equações (2.27), (2.28) e (2.30) a solução geral da equação de Laplace é dada por

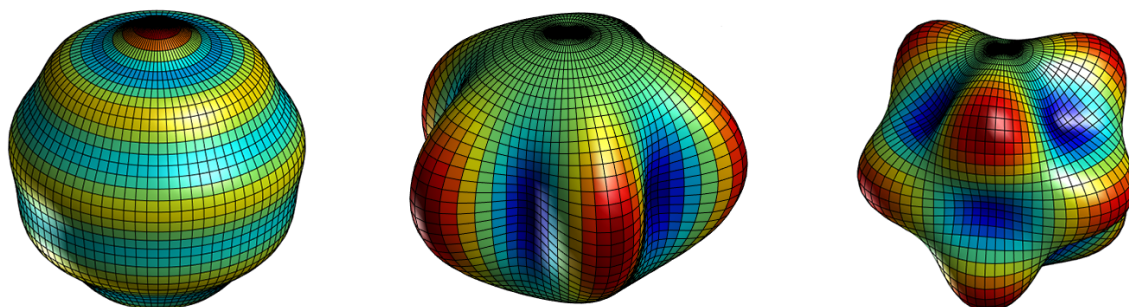
$$\begin{aligned} V(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l a\delta_l^m P_l^m(\cos \theta) \left[D_l \left(\frac{r}{a} \right)^l + E_l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] (G_m \cos(m\phi) + I_m \sin(m\phi)) \\ &= a \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \delta_l^m P_l^m(\cos \theta) \left\{ \left[D_l \left(\frac{r}{a} \right)^l + E_l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] G_m \cos(m\phi) \right. \\ &\quad \left. + \left[D_l \left(\frac{r}{a} \right)^l + E_l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] I_m \sin(m\phi) \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

As soluções da equação de Laplace são chamadas de harmônicos esféricos. As soluções $V(r, \theta, \phi)$ são chamadas de harmônicos esféricos sólidos a fim de distingui-los dos harmônicos esféricos superficiais $P_l^m(\cos \theta) \sin(m\phi)$ e $P_l^m(\cos \theta) \cos(m\phi)$ que não satisfazem a equação de Laplace (BLAKELY, 1995; GUBBINS; HERRERO-BERVERA, 2007). Os harmônicos esféricos superficiais dividem a superfície de uma esfera em regiões definidas pelas interseções de zonas latitudinais e setores longitudinais. Há três situações possíveis. Se $m = 0$, então os harmônicos esféricos superficiais dependem apenas da latitude e são chamados de harmônicos zonais. Se $l = m$, então eles dependem somente da longitude e são chamados de harmônicos setoriais. Se $0 < m < l$, então a superfície da esfera é dividida em $2m(l - m + 1)$ regiões e eles são chamados de harmônicos tesserais. A Figura 12 mostra exemplos específicos de cada caso.

A aplicação dos esféricos harmônicos para o campo geomagnético envolve escrever

Figura 12 – Exemplos específicos de harmônicos esféricos superficiais zonal, tesserar e setorial.

- (a) Harmônico esférico superficial zonal. (b) Harmônico esférico superficial setorial. (c) Harmônico esférico superficial tesserar.



Fonte: O autor.

o potencial magnético V na equação (2.31) como uma soma de potenciais magnéticos associados a fontes de campo de origem interna e externa à superfície terrestre. Assim sendo, há duas séries para V . A primeira corresponde aos termos proporcionais a r^l , os quais se tornam cada vez mais significativos à medida que r aumenta, visto que as fontes que geram o campo externo ficam cada vez mais próximas (CAMPBELL, 2003). Esses termos são denotados por V_e e constituem o potencial do campo magnético de origem externa. Analogamente, a segunda corresponde aos termos proporcionais a $(1/r)^{l+1}$, os quais se tornam cada vez mais significativos conforme r decresce, visto que as fontes que geram o campo interno ficam cada vez mais próximas. Esses termos são denotados por V_i e constituem o potencial do campo magnético de origem interna. Para encontrar as expressões desses potenciais, suponha que K_{1l}^m e K_{2l}^m sejam dois valores tais que

$$\frac{(D_l + E_l)G_m}{K_{1l}^m} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(D_l + E_l)I_m}{K_{2l}^m} = 1.$$

Além disso, defina

$$\begin{aligned} c_l^m &= \frac{D_l G_m}{K_{1l}^m}, & g_l^m &= K_{1l}^m \delta_l^m, \\ s_l^m &= \frac{D_l I_m}{K_{2l}^m}, & h_l^m &= K_{2l}^m \delta_l^m, \end{aligned}$$

em que g_l^m e h_l^m são chamados de coeficientes de Gauss, e c_l^m e s_l^m são números positivos entre 0 e 1 que indicam a fração do potencial associado com fontes de origem externa (MERRILL; MCELHINNY, 1983). Assim, os coeficientes $(1 - c_l^m)$ e $(1 - s_l^m)$ indicam a fração do potencial associado com fontes de origem interna. Então, a equação (2.31) é reescrita como

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \phi) &= a \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) \left\{ \left[\underbrace{D_l G_m}_{c_l^m K_{1l}^m} \left(\frac{r}{a}\right)^l + \underbrace{E_l G_m}_{(1-c_l^m) K_{1l}^m} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] \delta_l^m \cos(m\phi) \right. \\ &\quad \left. + \left[\underbrace{D_l I_m}_{s_l^m K_{2l}^m} \left(\frac{r}{a}\right)^l + \underbrace{E_l I_m}_{(1-s_l^m) K_{2l}^m} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] \delta_l^m \sin(m\phi) \right\} \\ &= a \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) \left\{ \left[c_l^m \left(\frac{r}{a}\right)^l + (1 - c_l^m) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] g_l^m \cos(m\phi) \right. \\ &\quad \left. + \left[s_l^m \left(\frac{r}{a}\right)^l + (1 - s_l^m) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] h_l^m \sin(m\phi) \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Agora, faça

$$\begin{aligned} g_l^{me} &= c_l^m g_l^m, & h_l^{me} &= s_l^m h_l^m, \\ g_l^{mi} &= (1 - c_l^m) g_l^m, & h_l^{mi} &= (1 - s_l^m) h_l^m, \end{aligned}$$

onde os sobrescritos i e e foram aplicados aos coeficientes g_l^m e h_l^m para fazer indicar as porções interna e externa do potencial magnético, respectivamente. Note que $g_l^m = g_l^{me} + g_l^{mi}$ e $h_l^m = h_l^{me} + h_l^{mi}$. Assim sendo, a equação (2.32) assume a forma

$$\begin{aligned}
V(r, \theta, \phi) &= a \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^l [g_l^{me} \cos(m\phi) + h_l^{me} \sin(m\phi)] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} [g_l^{mi} \cos(m\phi) + h_l^{mi} \sin(m\phi)] \right\} \\
&= a \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l [g_l^{mi} \cos(m\phi) + h_l^{mi} \sin(m\phi)] P_l^m(\cos \theta) \\
&\quad + a \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^l \sum_{m=0}^l [g_l^{me} \cos(m\phi) + h_l^{me} \sin(m\phi)] P_l^m(\cos \theta) \\
&= V_i + V_e,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

em que

$$V_i = a \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l [g_l^{mi} \cos(m\phi) + h_l^{mi} \sin(m\phi)] P_l^m(\cos \theta)$$

e

$$V_e = a \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^l \sum_{m=0}^l [g_l^{me} \cos(m\phi) + h_l^{me} \sin(m\phi)] P_l^m(\cos \theta).$$

Em estudos geomagnéticos, o potencial magnético V não é mensurado diretamente, apenas os elementos geomagnéticos X , Y e Z na superfície da Terra. As equações (2.1)-(2.3) relacionam esses elementos com as componentes do campo geomagnético \mathbf{B} em coordenadas esféricas. A equação (2.13) mostra que essas componentes são dadas pelo gradiente de V . Então, considerando o potencial na equação (2.33), os elementos geomagnéticos podem

ser escritos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
X &= - \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\
&= \frac{a}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} \left[\left(g_l^{me} \left(\frac{r}{a} \right)^l + g_l^{mi} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right) \cos(m\phi) \right. \\
&\quad \left. + \left(h_l^{me} \left(\frac{r}{a} \right)^l + h_l^{mi} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right) \sin(m\phi) \right], \tag{2.34a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\
&= \frac{a}{r \sin \theta} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) \left[m \left(g_l^{me} \left(\frac{r}{a} \right)^l + g_l^{mi} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right) \sin(m\phi) \right. \\
&\quad \left. - m \left(h_l^{me} \left(\frac{r}{a} \right)^l + h_l^{mi} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right) \cos(m\phi) \right] \tag{2.34b}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Z &= - \left(-\frac{\partial V}{\partial r} \right) \\
&= \frac{\partial V}{\partial r} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) \left[\left(l g_l^{me} \left(\frac{r}{a} \right)^{l-1} - (l+1) g_l^{mi} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+2} \right) \cos(m\phi) \right. \\
&\quad \left. + \left(l h_l^{me} \left(\frac{r}{a} \right)^{l-1} - (l+1) h_l^{mi} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+2} \right) \sin(m\phi) \right]. \tag{2.34c}
\end{aligned}$$

Portanto, na superfície terrestre ($r = a$) as equações (2.34a)-(2.34c) assumem a forma

$$X = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} [g_l^m \cos(m\phi) + h_l^m \sin(m\phi)], \tag{2.35}$$

$$Y = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) [m g_l^m \sin(m\phi) - m h_l^m \cos(m\phi)] \tag{2.36}$$

e

$$Z = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) \left[\left(l g_l^{me} - (l+1) g_l^{mi} \right) \cos(m\phi) + \left(l h_l^{me} - (l+1) h_l^{mi} \right) \sin(m\phi) \right]. \tag{2.37}$$

As medições de X e Y na superfície terrestre permitem determinar os coeficientes de Gauss g_l^m e h_l^m , pois os termos das equações (2.35) e (2.36) envolvem apenas esses coeficientes. Quaisquer diferenças entre os dois conjuntos de coeficientes g_l^m e h_l^m obtidos

por análises independentes de X e Y são muito pequenas e podem ser atribuídas a erros de medida (LANZA; MELONI, 2006). Com esses elementos geomagnéticos apenas, não é possível separar os coeficientes em suas partes interna e externa. Isso é feito por meio de medições de Z , pois seus coeficientes na equação (2.37) permitem fazer essa separação e, conseqüentemente, estimar as contribuições de origem interna e externa. Portanto, a importância relativa de fontes internas dada pelos coeficientes c_l^m e s_l^m , bem como a de fontes externas dada pelos coeficientes $1 - c_l^m$ e $1 - s_l^m$, podem ser determinadas. Gauss verificou que os coeficientes c_l^m e s_l^m são praticamente nulos, concluindo que o campo geomagnético é essencialmente de origem interna. Nesse caso, a equação (2.33) se reduz a

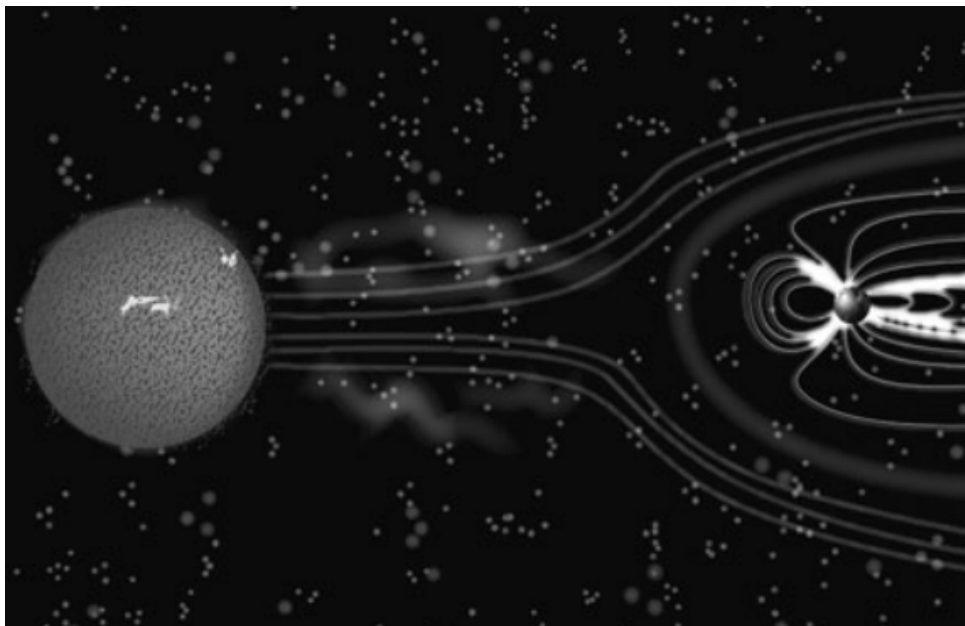
$$V = a \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l [g_l^m \cos(m\phi) + h_l^m \sin(m\phi)] P_l^m(\cos\theta).$$

O índice l determina o potencial devido a um multipolo magnético de ordem l . Assim, $l = 0$ é o potencial de um monopolo magnético, $l = 1$ de um dipolo magnético, $l = 2$ de um quadrupolo magnético e assim por diante. Uma vez que monopolos magnéticos não foram observados até o momento (são irrealis), a série se inicia em $l = 1$ (RISHBETH; GARRIOTT, 1969).

2.5 Vento Solar e a Magnetosfera

O vento solar é um plasma (gás ionizado) que permeia o meio interplanetário (ver Figura 13). Ele existe como consequência da expansão supersônica da coroa solar e consiste essencialmente de elétrons, prótons (hidrogênio ionizado), partículas alfa (hélio

Figura 13 – Representação artística do vento solar.



Fonte: Zolesi e Cander (2014).

duas vezes ionizado) e de traços de íons de outros elementos pesados como carbono e oxigênio (MCFADDEN; WEISSMAN; JOHNSON, 2007). Os parâmetros que descrevem o vento solar são altamente variáveis, pois variam tanto em tempo quanto em espaço. Na órbita da Terra, 1 AU do Sol, os valores típicos de densidade, velocidade e temperatura estão na ordem de $8 \text{ prótons} \cdot \text{cm}^{-3}$, $440 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ e $1,2 \times 10^5 \text{ K}$, respectivamente. Uma vez que a matéria ionizada é um bom condutor de eletricidade e que campos magnéticos decaem lentamente em condutores, pôde-se verificar imediatamente que o vento solar carrega consigo um campo magnético de origem solar (HOLTON; CURRY; PYLE, 2003). Assim sendo, o meio interplanetário está permeado com plasma magnetizado.

As primeiras evidências indiretas da existência do vento solar remontam à segunda metade do século XIX. Em 1859, o astrônomo amador Richard C. Carrington fez uma das primeiras observações de uma explosão solar na porção visível do espectro eletromagnético (MCFADDEN; WEISSMAN; JOHNSON, 2007). Em torno de 17 horas após a explosão, ele verificou a ocorrência de uma intensa tempestade geomagnética, indicando uma possível relação de causa e efeito entre eventos solares e geomagnéticos. No início do século XX, F. Lindemann sugeriu que essa relação poderia ser explicada caso as tempestades geomagnéticas fossem resultado da interação do campo geomagnético com nuvens de plasma emitidas no meio interplanetário pela atividade solar. Além disso, os primeiros estudos envolvendo a atividade geomagnética mostraram que as tempestades geomagnéticas tendem a ocorrer novamente segundo o período de rotação do Sol (~ 27 dias). Esse fato parecia sugerir que certas regiões do Sol produzem ocasionalmente um fluxo de longa duração de partículas carregadas no meio interplanetário. Ademais, visto que a ocorrência de eventos aurorais e geomagnéticos são recorrentes em altas latitudes, era natural inferir que partículas carregadas advindas do Sol impactam e perturbam continuamente o campo geomagnético.

Uma outra evidência indireta da presença do vento solar era a eventual diminuição da intensidade dos raios cósmicos em períodos com atividade solar intensa. De fato, S. Forbush notou que durante intensas tempestades geomagnéticas a intensidade dos raios cósmicos apresenta um decréscimo súbito e retorna gradualmente aos seus valores habituais ao longo de um período de vários dias (MCFADDEN; WEISSMAN; JOHNSON, 2007). Uma possível explicação para esse fenômeno consistia em argumentar que os raios cósmicos são removidos da vizinhança da Terra por campos magnéticos embebidos em nuvens de plasma oriundas do Sol. Já no início dos anos 1950, L. Biermann concluiu que um fluxo contínuo de partículas carregadas advindas do Sol deve existir para explicar o fato de que as caudas iônicas de cometas estão sempre na direção oposta ao Sol. Ele estimou um fluxo na ordem de $\sim 1 \times 10^9 \text{ prótons} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ em 1 AU, muito próximo da média observada para o vento solar de $\sim 3,8 \times 10^8 \text{ prótons} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ em 1 AU.

No final dos anos 1950, o geofísico e matemático britânico S. Chapman se interessou

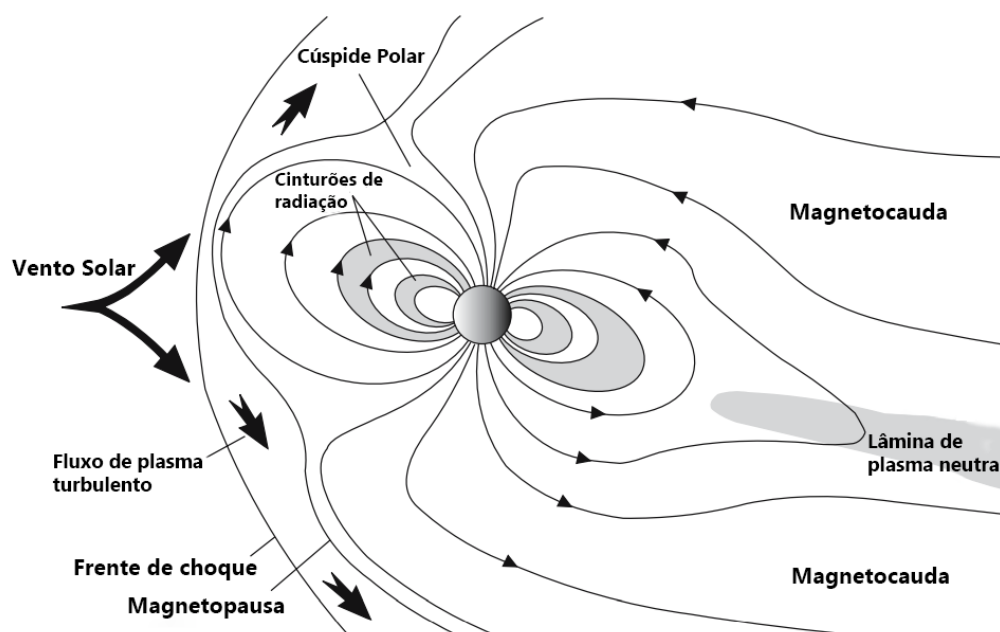
por uma possível relação entre as altas temperaturas da coroa solar e as altas temperaturas observadas na alta ionosfera, cuja média está na ordem de 2000 K ou mais (AKASOFU, 2011). Com base nessa possível relação, ele desenvolveu um modelo teórico de uma coroa solar estática que se estende para além da Terra, publicando um artigo sobre o assunto (CHAPMAN; ZIRIN, 1957). Esse artigo, assim como as observações indiretas da existência de um vento solar, chamaram a atenção do físico solar e astrofísico americano Eugene N. Parker. Em 1958, Parker formulou um novo modelo teórico de coroa solar, no qual ela está continuamente se expandindo. Parker argumentou que a coroa solar não pode estar em equilíbrio hidrostático em virtude da grande diferença de pressão entre o plasma quente na base da coroa solar e o meio interplanetário (GOMBOSI, 1998). O seu modelo conduzia a um fluxo de baixa velocidade nas proximidades do Sol, a um fluxo supersônico em grandes distâncias a partir do Sol e pressões cada vez menores em grandes distâncias heliocêntricas (MCFADDEN; WEISSMAN; JOHNSON, 2007). Ele chamou essa expansão contínua e supersônica da coroa solar de vento solar¹.

Várias sondas espaciais russas e americanas entre 1959 e 1961 encontraram evidências tentadoras da existência de um vento solar como previa a teoria de Parker (MCFADDEN; WEISSMAN; JOHNSON, 2007). Embora as observações dessas sondas tenham detectado um fluxo similar ao esperado na presença de um vento solar, elas não foram suficientes para provar sua existência. As sondas realizaram suas observações em períodos curtos de tempo, de modo que não foi possível mostrar que o fluxo era contínuo (HUNDHAUSEN, 1972). Felizmente, as observações da espaçonave Mariner 2, enviada a Vênus no final de 1962, removeram qualquer dúvida a respeito da existência do vento solar. Ao longo de três meses de observação quase ininterrupta, um fluxo sempre esteve presente. Os valores médios de densidade, velocidade e temperatura durante esse período de tempo foram de $5,4 \text{ cm}^{-3}$, $504 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ e $1,7 \times 10^5 \text{ K}$, respectivamente. Esse fluxo contínuo de plasma supersônico ratificou as previsões do modelo de Parker.

Os planetas imersos na atmosfera solar interagem o tempo todo com o vento solar. Essa interação induz correntes elétricas de larga escala e forma cavidades magnéticas em torno dos planetas que possuem um campo magnético próprio. Cada cavidade é chamada de magnetosfera. Com exceção de Marte e Vênus, todos os planetas do sistema solar apresentam uma magnetosfera (HOLTON; CURRY; PYLE, 2003). A primeira a ser descoberta foi a magnetosfera terrestre, como ilustra a Figura 14. O termo magnetosfera foi cunhado por T. Gold em 1959 para descrever a região acima da ionosfera na qual o campo geomagnético controla o movimento de partículas carregadas (GOLD, 1959; MCFADDEN; WEISSMAN; JOHNSON, 2007). A magnetosfera é composta essencialmente de elétrons e prótons advindos tanto do vento solar quanto da ionosfera. Além dessas partículas, há também pequenas frações de He^+ e O^+ de origem ionosférica e de He^{2+}

¹ Em certo sentido, é possível dizer que o início do estudo do vento solar foi estimulado pelo interesse de Chapman na coroa solar.

Figura 14 – Representação esquemática da magnetosfera terrestre.



Fonte: Adaptado de [Lanza e Meloni \(2006\)](#).

de origem solar ([BAUMJOHANN; NAKAMURA, 2007](#)). Ademais, a magnetosfera é o sistema astrofísico mais próximo da Terra e vem sendo estudada e mensurada por instrumentos a bordo de espaçonaves desde os anos 1960 ([BOROVSKY; VALDIVIA, 2018](#)). Os dados coletados são disponibilizados publicamente pela NASA no endereço <https://cdaweb.sci.gsfc.nasa.gov/index.html/>². Um dos motivos que torna o estudo da magnetosfera tão importante é que a sua interação com o vento solar dá origem ao clima espacial, que impõe perigo aos astronautas, a operações de espaçonaves e a redes de energia elétrica em altas latitudes.

As partículas carregadas que constituem o vento solar, elétrons e prótons, são repelidas pelo campo geomagnético e não são capazes de penetrá-lo. Conseqüentemente, o vento solar exerce uma força sobre a magnetosfera em sua fronteira externa, que é chamada de magnetopausa ([CRAVENS, 1997](#)). A fronteira interna da magnetosfera começa na parte da atmosfera neutra em que os constituintes ionizados desempenham um papel importante na dinâmica da alta atmosfera, isto é, na ionosfera. A magnetopausa consiste de uma superfície essencialmente paraboloidal que separa os domínios do campo geomagnético e do vento solar incidente ([LANZA; MELONI, 2006](#)). A sua localização é determinada pelo balanço entre a pressão magnética associada ao campo geomagnético e a pressão dinâmica do vento solar. Dessa forma, a distância entre a Terra e a magnetopausa depende da atividade solar, variando entre 5 e 12 raios terrestres, mas com um valor típico em torno de 10 raios terrestres no lado diurno ([HOLTON; CURRY; PYLE, 2003](#)). No lado

² Analogamente, os parâmetros do vento solar vêm sendo mensurados desde 1963 e são disponibilizados no endereço <https://omniweb.gsfc.nasa.gov>.

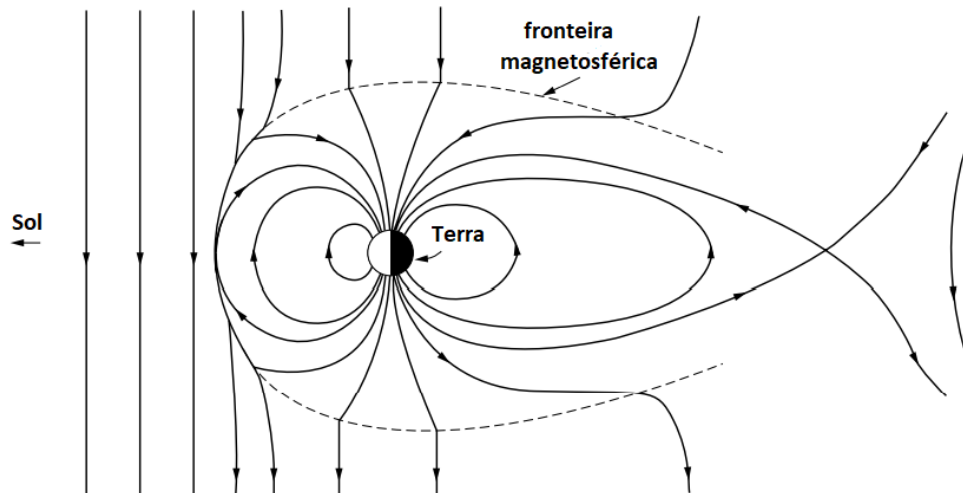
noturno, o vento solar deforma as linhas do campo geomagnético concebendo uma longa cauda que se estende para além de 100 raios terrestres, a chamada magnetocauda.

A magnetocauda é um reservatório de energia magnética que impulsiona vários processos magnetosféricos (BOROVSKY; VALDIVIA, 2018). As auroras em ambos os hemisférios (austral e boreal) são causadas pela precipitação na atmosfera polar de elétrons energéticos (vários keV) advindos da magnetocauda. Na porção norte da magnetocauda, as linhas do campo geomagnético geralmente apontam em direção ao Sol, enquanto na porção sul a orientação é invertida (MCFADDEN; WEISSMAN; JOHNSON, 2007). Essas regiões são chamadas de lóbulos norte e sul, sendo caracterizadas por campos magnéticos intensos e plasmas de baixa densidade. Elas são separadas por uma lâmina de corrente elétrica fluindo do amanhecer ao anoitecer através da magnetocauda equatorial na lâmina de plasma. A lâmina de plasma é uma região que contém plasma quente com densidades entre $0,1$ e 1 cm^{-3} . Ela está localizada no plano equatorial e se estende por dezenas de raios terrestres (CRAVENS, 1997). No meio da lâmina de plasma há uma lâmina neutra, onde o alongado campo magnético altera sua orientação de solar para antissolar e tem sua componente normal mínima.

Uma vez que a magnetosfera representa um obstáculo contundente ao vento solar supersônico, uma frente de choque é concebida em frente a magnetopausa, de forma bastante semelhante ao que acontece quando uma aeronave na atmosfera neutra ultrapassa a velocidade do som. Essa frente de choque desacelera o vento solar e uma fração substancial de sua energia cinética é convertida em energia térmica (BAUMJOHANN; NAKAMURA, 2007). Conseqüentemente, uma região turbulenta mais densa e quente, chamada de magnetobainha, é formada entre a frente de choque e a magnetopausa (GUBBINS; HERRERO-BERVERA, 2007). A magnetopausa não é impermeável ao vento solar. Dungey (1961) reconheceu que a magnetopausa não é uma barreira completa para o vento solar, e que a topologia do campo geomagnético é controlada por meio da reconexão magnética com o IMF (ver Figura 15). Quando ele está orientado para o norte, paralelo ao campo de dipolo da Terra no equador, a magnetosfera tem um aspecto fechado e a transferência de energia e partículas é mínima (MCFADDEN; WEISSMAN; JOHNSON, 2007). Em contrapartida, quando ele está orientado para o sul, antiparalelo ao campo de dipolo no equador, as linhas de campo do IMF se conectam com as do campo geomagnético no lado diurno da magnetopausa. Isso deixa a magnetosfera com uma configuração magneticamente aberta, na qual as linhas do campo geomagnético nas regiões polares estão conectadas ao IMF. Essa configuração favorece a entrada de partículas do vento solar nas regiões polares. Além disso, na magnetocauda as linhas de campo abertas voltam a ser fechadas de modo que o campo geomagnético não fica permanentemente aberto.

Desde há muito, tem-se especulado que o vento solar pode penetrar a magnetosfera através de regiões magneticamente neutras resultantes do acoplamento do vento solar

Figura 15 – A reconexão magnética é o principal mecanismo pelo qual energia, massa e momento são transferidos do vento solar para a magnetosfera, e pelo qual a energia magnética armazenada na magnetocauda é liberada em eventos explosivos conhecidos como subtempestades magnetosféricas.



Fonte: Adaptado de [Campbell \(2003\)](#).

com o campo geomagnético. A primeira indicação da existência de um par de pontos magneticamente neutros em altas latitudes na magnetopausa diurna é atribuída a [Chapman e Ferraro \(1931\)](#) em uma discussão teórica sobre a interação entre um plasma condutor e o campo geomagnético ([SANDHOLT; EGELAND; LYBEKK, 1985](#)). A primeira evidência direta da entrada de plasma nessas regiões foi obtida nos anos 1970, quando observações de satélites revelaram a existência de plasma da magnetobainha em baixas altitudes e em altas altitudes na magnetosfera diurna. Atualmente, há fortes evidências de que a interação entre o campo magnético do vento solar e o campo geomagnético resulta em funis magnéticos localizados na magnetosfera diurna, as cúspides polares. O plasma da magnetobainha tem acesso direto à ionosfera por meio das cúspides polares ([RUSSELL, 2000](#)).

A magnetosfera não é um vácuo, embora a densidade do plasma na magnetosfera interior seja, em geral, menor que a densidade do vento solar. Na magnetosfera interior, o campo geomagnético dipolar aprisiona partículas energéticas advindas do vento solar e da ionosfera em regiões com geometria toroidal em torno da Terra. Essas regiões, chamadas de cinturões de radiação (ver [Figura 16](#)), foram descobertas em 1958 pelo físico americano James Alfred Van Allen (1914-2006) utilizando dados obtidos com contadores Geiger a bordo do primeiro satélite americano Explorer 1 ([YOUNG et al., 2016; LI; HUDSON, 2019](#)). A natureza diversa e a ampla faixa de energia dessas partículas conduz à formação de um cinturão interno, composto basicamente por prótons, e de um cinturão externo, formado essencialmente por elétrons ([OBODOVSKIY, 2019](#)). Na superfície equatorial, o cinturão interno compreende altitudes entre 600 e 6000 km, enquanto o cinturão externo

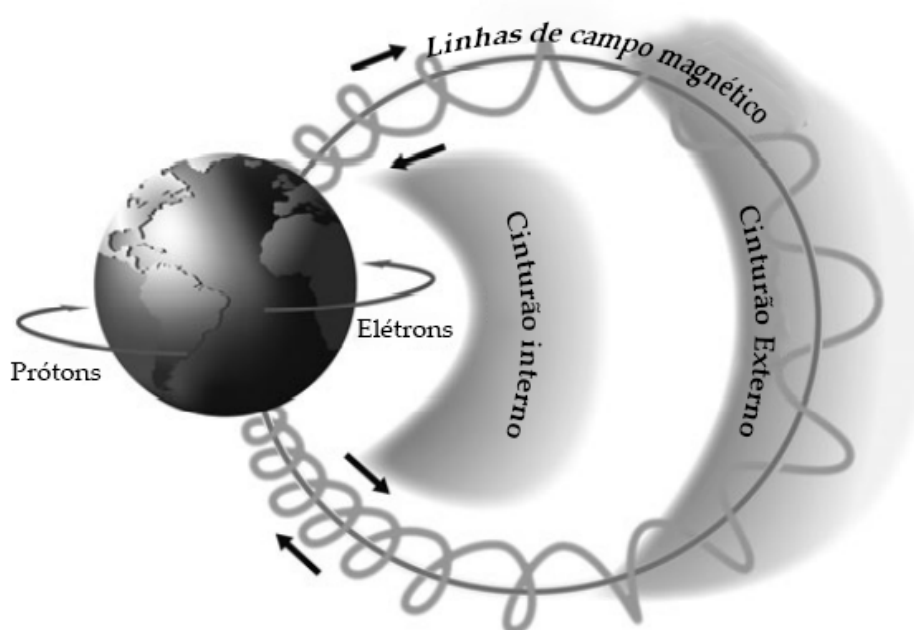
se estende ao longo de altitudes entre 20000 e 60 000 km. Isso é de particular importância para os satélites em órbitas geossíncronas, cujo raio orbital é da ordem de 42 000 km.

2.6 Índices Geomagnéticos

Um índice é um conceito bastante comum e amplamente utilizado em várias áreas do conhecimento, cujo objetivo é fornecer informações resumidas, pertinentes e confiáveis sobre um determinado fenômeno complexo que varia com o tempo (MAYAUD, 1980; MENVIELLE et al., 2011). Dessa forma, um índice é composto por um conjunto discreto de valores que caracterizam e descrevem um fenômeno de interesse ao longo de intervalos de tempo constantes. Uma vez que a definição de um índice é passível de modificação, é preciso ter cautela quanto ao seu uso indiscriminado. Os índices não são substitutos dos dados originais e não podem implicar em muitas hipóteses teóricas. Eles propiciam apenas informações resumidas de um certo fenômeno.

Em geofísica, há um conjunto de índices que são coletivamente chamados de índices geomagnéticos. Eles fornecem uma medida da atividade geomagnética, que é uma assinatura da resposta da magnetosfera e ionosfera terrestres ao forçante solar (MENVIELLE et al., 2011). Um índice geomagnético deve corresponder, na medida do possível, a um único e bem definido fenômeno. Além disso, ele deve ser derivado de tal forma que os dados

Figura 16 – Nos cinturões de radiação, as partículas estão sujeitas a um movimento de rotação em torno das linhas do campo geomagnético, oscilando entre Norte e Sul. Além disso, os elétrons e prótons são caracterizados por outro movimento em direções longitudinalmente opostas, gerando a chamada corrente de anel.



Fonte: Adaptado de Zolesi e Cander (2014).

utilizados em sua derivação sejam consistentes com esse fenômeno (MAYAUD, 1980). Isso não é uma tarefa tão simples, pois traz à tona uma série de indagações importantes. Em particular, é possível discriminar o fenômeno de interesse dos outros nos dados utilizados? Qual a taxa de amostragem adequada para monitorar a variação temporal do fenômeno de interesse? Se ele varia tanto com a longitude quanto com a latitude, como selecionar a rede de estações a fim de obter resultados confiáveis? Estas são apenas algumas das perguntas que devem ser respondidas na hora de se projetar um índice geomagnético.

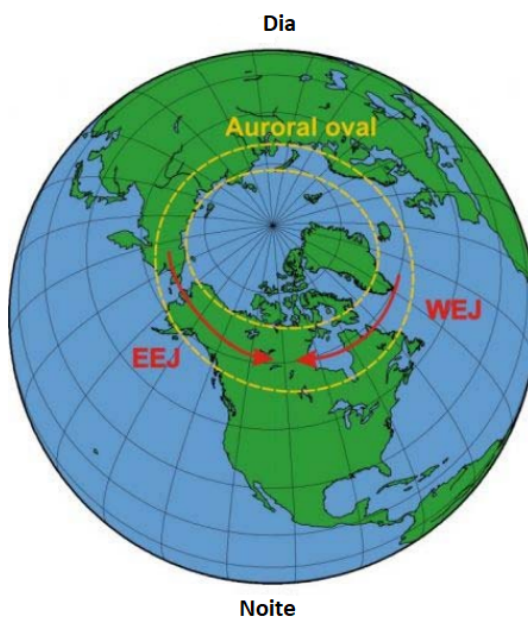
Em geral, um índice geomagnético está associado a um único fenômeno físico. Nesse sentido, é possível identificar duas categorias de pessoas que podem se beneficiar com o seu uso. A primeira categoria compreende as pessoas que estudam o fenômeno propriamente dito, enquanto a segunda abrange as que necessitam do índice como uma referência para estudar fenômenos correlatos. Os maiores erros advêm das pessoas na primeira categoria (MAYAUD, 1980). Por exemplo, se o fenômeno de interesse for uma subtempestade magnetosférica, o instante de início da subtempestade certamente não poderá ser descrito por um índice cujo intervalo de tempo entre seus valores discretos esteja na ordem de horas. Assim, é preciso ter bom senso no uso de índices geomagnéticos para estudar um fenômeno físico.

Os índices geomagnéticos monitoram variações geomagnéticas que podem ser seculares ou transientes (ver [Introdução](#)). As variações transientes não ocorrem por conta de um único fenômeno e, por isso, é difícil derivar índices geomagnéticos capazes de monitorá-las (MAYAUD, 1980). As variações transientes irregulares são causadas por correntes elétricas magnetosféricas e ionosféricas que eventualmente são intensificadas por conta do acoplamento do vento solar com a magnetosfera. A intensificação dessas correntes produz tempestades geomagnéticas e subtempestades magnetosféricas. A ocorrência de tempestades se deve ao enriquecimento da corrente de anel equatorial, enquanto a ocorrência de subtempestades está relacionada com a intensificação dos eletrojetos aurorais. Há um índice geomagnético associado a cada um desses fenômenos físicos (LAKHINA et al., 2006).

O índice AE foi introduzido por Davis e Sugiura (1966) para fornecer uma medida quantitativa global da atividade magnética na zona auroral, a qual é produzida por correntes ionosféricas que fluem abaixo e no interior do oval auroral (ALLEN; ABSTON; MORRIS, 1975). Como ilustra a Figura 17, na região auroral tem-se a ocorrência transiente e irregular de uma corrente na direção leste ao longo de um setor de longitudes limitado, chamada de EEJ (do inglês *Eastward Electrojet*), e de uma corrente na direção oeste, chamada de WEJ (do inglês *Westward Electrojet*). As correntes EEJ e WEJ são coletivamente chamadas de eletrojetos aurorais, os quais fluem na baixa ionosfera e provavelmente estão associados à correntes remotas na magnetosfera por meio das correntes de Birkeland (MAYAUD, 1980).

Devido a direção dos eletrojetos aurorais, a componente H do campo geomagnético é obviamente a escolha mais adequada para monitorar suas variações temporais. O índice

Figura 17 – Representação esquemática dos eletrojetos aurorais EEJ e WEJ.



Fonte: Adaptado de [Piccinelli e Krausmann \(2014\)](#).

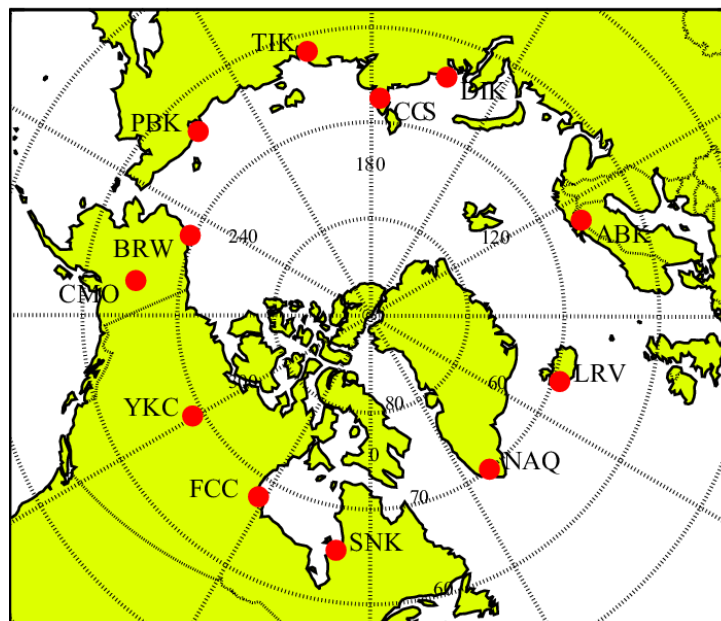
AE é derivado a partir das variações geomagnéticas na componente H , as quais são observadas por 12 observatórios selecionados ao longo da zona auroral no hemisfério norte ([MENVIELLE et al., 2011](#)). A Tabela 1 contém a lista com as coordenadas geomagnéticas dos observatórios, enquanto a Figura 18 ilustra suas respectivas localizações na zonal auroral. Para entender como o índice AE é derivado, suponha que a data de interesse seja 24/12/2002. O primeiro passo consiste em calcular um nível de referência para cada observatório com base na média da componente H de cada observatório nos 5 dias

Tabela 1 – Lista dos 12 observatórios na zona auroral responsáveis pelo índice AE.

| Observatório | Abreviação | Coordenadas Geomagnéticas | |
|-----------------|------------|---------------------------|---------------|
| | | Latitude (°) | Longitude (°) |
| Abisko | ABK | 66,06 | 114,66 |
| Dixon Island | DIK | 64,04 | 162,53 |
| Cape Chelyuskin | CCS | 67,48 | 177,82 |
| Tixie Bay | TIK | 61,76 | 193,71 |
| Pebek | PBK | 63,82 | 223,31 |
| Barrow | BRW | 69,57 | 246,18 |
| College | CMO | 65,38 | 261,18 |
| Yellowknife | YKC | 68,87 | 299,53 |
| Fort Churchill | FCC | 67,98 | 328,36 |
| Sanikiluaq | SNK | 66,6 | 349,7 |
| Narssarssuaq | NAQ | 69,96 | 37,95 |
| Leirvogur | LRV | 69,32 | 71,04 |

Fonte: Adaptado de [Menvielle et al. \(2011\)](#).

Figura 18 – Localização em coordenadas geomagnéticas dos 12 observatórios na zona auroral a partir dos quais o índice AE é derivado. Os círculos de latitude estão desenhados em intervalos de 10° , enquanto os círculos de longitude estão separados por intervalos de 30° .

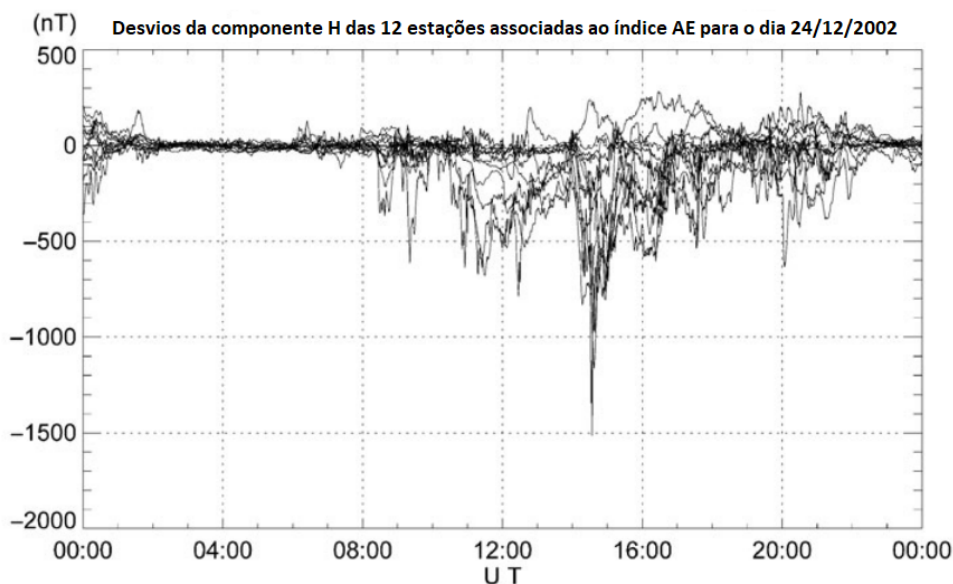


Fonte: Adaptado de Tomita et al. (2011).

internacionalmente mais calmos do mês de dezembro de 2002. Por conseguinte, os níveis de referência são subtraídos das séries temporais da componente H do dia 24/12/2002 nas respectivas estações. Portanto, 12 séries temporais que representam os desvios ΔH a partir dos níveis de referência são obtidas, conforme Figura 19. Esses desvios estão diretamente relacionados com a magnitude do EEJ ($\Delta H > 0$) e do WEJ ($\Delta H < 0$) (MAYAUD, 1980). Em seguida, os desvios são superpostos. Isso permite a definição dos índices AU (do inglês *Auroral Upper*) e AL (do inglês *Auroral Lower*). O índice AU representa o envelope superior dos desvios e está associado ao EEJ, enquanto o índice AL representa o envelope inferior e está associado ao WEJ.

Apesar das latitudes auroras reduzirem a influência da corrente de anel equatorial, esta última ainda é suficiente para “contaminar” os índices AL e AU. Durante intensas tempestades geomagnéticas o índice AU pode assumir valores negativos que contrariam sua definição, a qual assume que ele sempre deve ser positivo (MAYAUD, 1980). É por este motivo que Davis e Sugiura (1966) introduziram o índice AE, o qual foi definido como a diferença $AU - AL$. Essa diferença corresponde a separação entre os envelopes AU e AL, e independe das correntes zonais. Isso permite eliminar as variações provocadas pela corrente de anel equatorial em todos os instantes de tempo. Por outro lado, a média aritmética dos índices AL e AU definem um outro índice, chamado de índice AO, que fornece uma medida da corrente zonal equivalente (MENVIELLE et al., 2011). Em conjunto, os índices AU, AL,

Figura 19 – Ilustração da superposição dos desvios da componente H a partir de um nível de referência em cada um dos 12 observatórios associados com a derivação do índice AE no dia 24/12/2002. Os envelopes superior e inferior desses desvios definem os índices AU e AL, respectivamente. O índice AE é dado pela diferença AU - AL. Isso elimina a influência da corrente de anel equatorial.



Fonte: Adaptado de [Menvielle et al. \(2011\)](#).

AO e AE fornecem à comunidade científica informações resumidas das variações aurorais. Apesar dos significados físicos dos índices AL, AU e AO estarem bem definidos, o mesmo não pode ser dito do índice AE. Realmente, a validade deste índice é motivo de controvérsia na comunidade científica ([KAMIDE; ROSTOKER, 2004](#)). Além das subtempestades, o índice AE é utilizado na definição e caracterização de eventos HILDCAA (ver seção 2.8).

Assim como há um índice geomagnético para subtempestades e eventos HILDCAA, há também um índice para as tempestades geomagnéticas. Estudos indicam que em baixas e médias latitudes o decréscimo da componente H durante as tempestades se deve a um campo magnético que pode ser aproximadamente representado por duas componentes. Uma componente uniforme e paralela ao eixo do dipolo terrestre, direcionada para o sul (componente axialmente simétrica), e uma componente longitudinalmente não uniforme (componente assimétrica) ([MENVIELLE et al., 2011](#)). Os índices que mensuram a componente axialmente simétrica são os índices Dst e SYM-H, enquanto o índice que mensura a componente assimétrica é o índice ASY-H. O índice Dst é computado a cada hora e difere do SYM-H apenas na resolução temporal, pois este último é computado a cada minuto ([LAKHINA et al., 2012](#)).

Assume-se que a fonte da componente axialmente simétrica em períodos de tempestade seja uma corrente de anel equatorial. O índice Dst foi desenvolvido para mensurar a magnitude dessa corrente ([MENVIELLE et al., 2011](#)). Dentre todos os índices geomag-

néticos, o índice Dst é provavelmente aquele que monitora e registra com maior acurácia o fenômeno para o qual foi projetado (MAYAUD, 1980). Isso se deve, em grande parte, a simplicidade das variações geomagnéticas causadas pela corrente de anel, visto que o campo magnético estabelecido por ela tem simetria axial. Dessa forma, os projetistas do índice Dst utilizaram apenas a componente H em sua derivação (CAMPBELL, 2003). Para que o índice fosse confiável, eles tiveram que determinar a localização ótima dos observatórios magnéticos envolvidos na derivação do índice (SUGIURA, 1964). Finalmente, eles estabeleceram os seguintes critérios:

1. os observatórios devem estar em baixas latitudes a fim de eliminar o máximo possível a influência dos eletrojetos aurorais;
2. os observatórios próximos ao equador magnético devem ser evitados, pois o eletrojetos equatorial pode introduzir variações indesejadas. Além disso, as variações magnéticas durante tempestades geomagnéticas são irregulares e frequentemente amplificadas no equador magnético;
3. os observatórios devem estar, na medida do possível, distribuídos uniformemente em longitude.

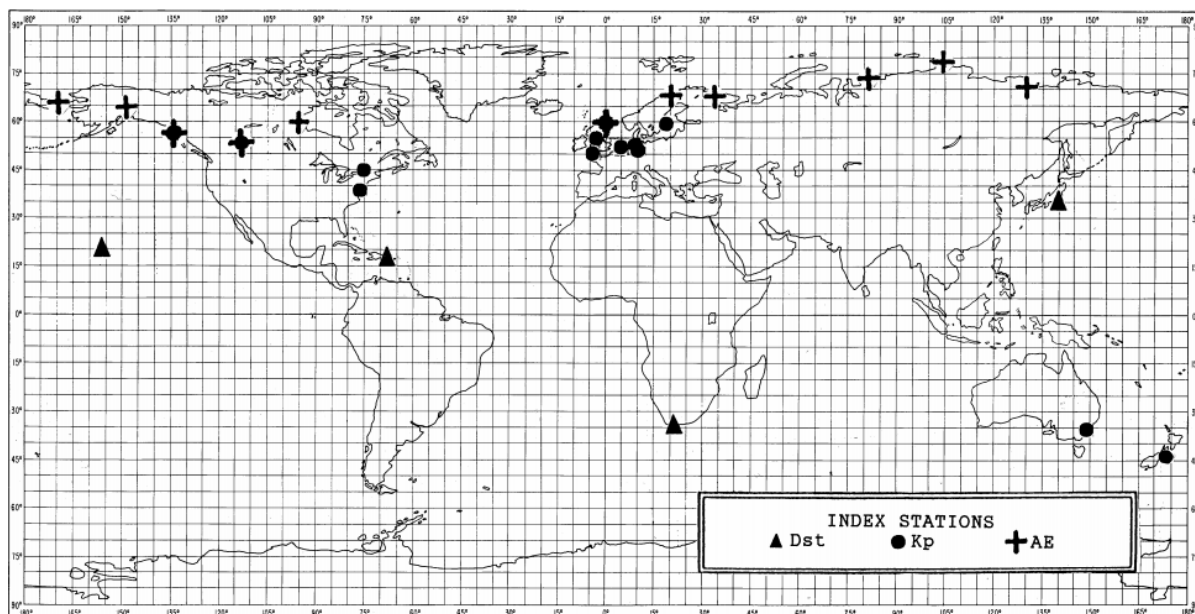
No início, um número maior de observatórios magnéticos eram utilizados para a concepção do índice Dst. Porém, atualmente só os quatro observatórios listados na Tabela 2 permanecem. A Figura 20 ilustra suas posições no mapa. Note que eles não estão uniformemente espaçados em longitude, pois há uma grande lacuna no setor da Ásia Central. Além disso, três desses observatórios estão no hemisfério norte (CAMPBELL, 2003). Cabe ressaltar que uma vez que os efeitos da corrente de anel são majoritariamente zonais, a densidade dos observatórios não precisa ser tão elevada (MAYAUD, 1980). O fato dos observatórios estarem em baixas latitudes induz um novo problema. A variação Sq nessas latitudes é intensa, então como eliminá-la? Sugiura (1964) propôs o cômputo de uma variação Sq média para cada mês a partir dos 5 dias internacionalmente mais calmos do mês em cada observatório magnético. Além disso, o campo geomagnético

Tabela 2 – Lista dos 4 observatórios magnéticos responsáveis pela concepção do índice Dst para o ano de 2010.

| Observatório | País | Abreviação | Coordenadas Geomagnéticas | |
|--------------|---------------|------------|---------------------------|---------------|
| | | | Latitude (°) | Longitude (°) |
| Kakioka | Japão | KAK | 27,37 | 208,75 |
| San Juan | Porto Rico | SJG | 28,31 | 6,08 |
| Honolulu | Havaí, EUA | HON | 21,64 | 269,74 |
| Hermanus | África do Sul | HER | -33,98 | 84,02 |

Fonte: Adaptado de Menvielle et al. (2011).

Figura 20 – Este mapa global apresenta a localização, para o ano de 2002, dos observatórios magnéticos que contribuem para a concepção dos três principais índices geomagnéticos: Dst (triângulo sólido), AE (sinal de +) e Kp (círculo sólido). O índice Kp não é utilizado neste trabalho e não será descrito neste texto.



Fonte: [Campbell \(2003\)](#).

principal, oriundo das correntes elétricas que circulam no núcleo da Terra, também deve ser eliminado. Após a subtração da variação Sq e do campo principal, a componente restante do campo geomagnético é o campo de distúrbio, que é o utilizado para o cômputo do índice. Informações detalhadas sobre como o índice Dst é derivado podem ser encontradas em [Sugiura \(1964\)](#).

2.7 Tempestades Geomagnéticas

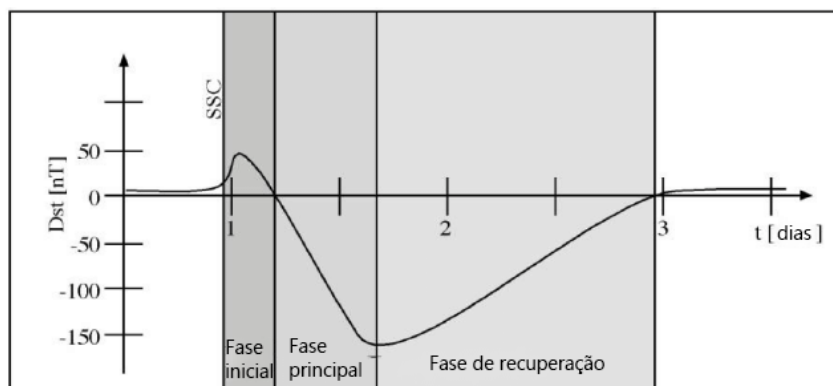
Quando o acoplamento entre a magnetosfera e o vento solar se torna acentuado e prolongado, verifica-se a ocorrência de um tipo de atividade geomagnética bastante conhecida: as tempestades geomagnéticas ([KIVELSON; RUSSELL, 1995](#)). O estudo de tempestades geomagnéticas tem tanto importância teórica, pois é um assunto central em geofísica, quanto prática, devido ao potencial que elas possuem de causar danos aos seres humanos e a sistemas tecnológicos de distribuição de energia, comunicação e navegação, que são essenciais para o pleno funcionamento da sociedade moderna ([LAKHINA et al., 2012](#)). Há registros históricos que relatam a ocorrência de tempestades geomagnéticas super intensas nos meses de agosto e setembro de 1859, as quais afetaram os sistemas telegráficos de comunicação em operação naquela época ([BOTELER, 2006](#)). Este é um dos motivos pelos quais as tempestades geomagnéticas constituem a atividade geomagnética mais conhecida e minuciosamente estudada, desde antes da invenção dos satélites ([ROSTOKER; FRIEDRICH; DOBBS, 1997](#)).

Em geral, as tempestades geomagnéticas apresentam uma assinatura semelhante no que diz respeito à componente H , principalmente em baixas e médias latitudes (CAMPBELL, 2003). Usualmente, elas se manifestam por meio de um aumento súbito global da componente H em baixas latitudes chamado de SSC. O SSC é causado por uma onda de choque na magnetosfera formada em virtude da chegada de feixes rápidos do vento solar. Ele pode ser seguido por um aumento geral da componente H que pode durar várias horas, caracterizando a fase inicial da tempestade (PARKER, 1962). A intensificação da componente H tanto no SSC quanto na fase inicial se deve ao aumento das correntes na magnetopausa devido à elevação da pressão dinâmica que o vento solar exerce sobre a magnetosfera (JUNIOR et al., 2011b). É importante ressaltar que as tempestades geomagnéticas nem sempre possuem fase inicial.

Após a fase inicial (se ela existir) tem-se a fase principal, durante a qual a componente H do campo geomagnético de baixa latitude apresenta uma diminuição drástica que pode perdurar de uma até poucas horas. A fase principal é causada pela intensificação da corrente de anel, composta por elétrons e íons magnetosféricos com energias entre 30 e 300 keV, em virtude de longos intervalos de tempo nos quais a componente B_z do IMF está orientada na direção sul (ECHER; GONZALEZ; TSURUTANI, 2008). Nesses períodos, tem-se um aumento considerável da transferência de energia do vento solar para a magnetosfera por meio do mecanismo de reconexão magnética. Isso conduz a uma intensa injeção de plasma da magnetocauda em direção à magnetosfera interna (LAKHINA et al., 2012). Assim sendo, verifica-se a ocorrência de intensas auroras nas regiões noturnas de altas latitudes, bem como a intensificação da corrente de anel que estabelece um campo magnético com contribuição negativa para a componente H . A fase principal é seguida pela fase de recuperação, na qual a intensidade da componente H retorna gradualmente aos seus valores usuais. Essa fase é causada pelos processos físicos responsáveis pelo decaimento da corrente de anel, tais como a troca de cargas entre íons e neutros, colisões Coulombianas, convecção de íons da corrente de anel fora da magnetopausa e interação onda-partícula (LAKHINA; TSURUTANI, 2016). A Figura 21 é um gráfico do índice Dst ilustrando todas as fases de uma tempestade geomagnética típica.

A intensidade de uma tempestade geomagnética é expressa em termos dos índices Dst ou SYM-H, que constituem uma medida da intensidade da corrente de anel. Essa intensidade é definida em termos do valor mínimo que o índice Dst assume durante a fase principal da tempestade (LAKHINA et al., 2012). De fato, diz-se que uma tempestade é fraca quando $-30 \text{ nT} > \text{Dst}_{\min} > -50 \text{ nT}$, moderada quando $-50 \text{ nT} > \text{Dst}_{\min} > -100 \text{ nT}$, intensa quando $-100 \text{ nT} > \text{Dst}_{\min} > -200 \text{ nT}$, muito intensa quando $-200 \text{ nT} > \text{Dst}_{\min} > -350 \text{ nT}$ e super intensa quando $\text{Dst}_{\min} < -350 \text{ nT}$, em que Dst_{\min} denota o valor mínimo do índice Dst durante a fase principal da tempestade (KAMIDE et al., 1998; TSURUTANI, 2003; BOROVSKY; SHPRITS, 2017).

Figura 21 – O índice Dst é derivado da componente H registrada por observatórios em regiões de baixa latitude de hora em hora. Por este motivo, as fases de uma tempestade geomagnética típica (SSC, inicial, principal e recuperação) são classificadas com base no índice Dst. Esta é uma curva suavizada do índice Dst durante uma tempestade geomagnética com todas as fases, visto que nas curvas reais as coisas não são tão simples assim.



Fonte: Adaptado de [Kasran et al. \(2018\)](#).

2.7.1 Mecanismos de geração

A ocorrência de tempestades geomagnéticas se deve, principalmente, à estruturas interplanetárias de plasma embebidas em campos magnéticos intensos que permanecem orientados na direção sul por longos períodos de tempo, os quais determinam a intensidade da tempestade ([GONZALEZ et al., 1994](#)). Estes campos interconectam-se com o campo geomagnético por meio do processo de reconexão magnética, o qual favorece a injeção de partículas e o transporte de energia do vento solar para a magnetosfera, com a subsequente formação de uma tempestade geomagnética. Por exemplo, se a componente B_z do IMF permanecer por pelo menos 3 horas na direção sul com uma intensidade superior a 10 nT, verifica-se a ocorrência de uma tempestade intensa ([GUARNIERI et al., 2006](#)).

As estruturas interplanetárias que mais causam tempestades geomagnéticas são as ejeções de massa coronal (CMEs, do inglês *Coronal Mass Ejections*) e as regiões de interação corrotantes (CIRs, do inglês *Corotating Interaction Regions*). Durante o máximo solar, as CMEs dominam o meio interplanetário e são responsáveis por produzir as tempestades mais intensas. Em contrapartida, durante a fase descendente as CIRs predominam. Elas possuem a capacidade de produzir apenas tempestades fracas e moderadas por conta das oscilações alfvênicas do campo magnético em seu interior. Essas oscilações impedem que o campo magnético permaneça na direção sul por períodos prolongados de tempo ([TSURUTANI et al., 1999](#)).

As CMEs são estruturas tridimensionais de grande escala que emergem de forma explosiva da coroa solar em direção à heliosfera ([GOPALSWAMY, 2002](#)). Elas são imensas bolhas de plasma e campo magnético aprisionado que se expandem da coroa solar,

despejando o seu conteúdo no vento solar (MULLAN, 2010). Para se ter uma ideia, cada ejeção é capaz de despejar bilhões de toneladas de matéria. As CMEs podem conter massas tão grandes quanto 1×10^{13} kg e atingir velocidades de vários milhares de quilômetros por segundo (HUNDHAUSEN; BURKEPILE; CYR, 1994). Uma CME típica tem uma massa em torno de 10^{11} e 1×10^{12} kg, bem como uma velocidade entre 400 e 1000 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ (HOWARD, 2011). As CMEs são observadas por meio de coronógrafos que bloqueiam o brilho intenso da fotosfera para que a coroa solar possa ser visualizada. A Figura 22a ilustra uma CME observada com o coronógrafo LASCO (do inglês *Large Angle Spectrometer Coronagraph*) a bordo da sonda espacial SOHO (do inglês *Solar and Heliospheric Observatory*).

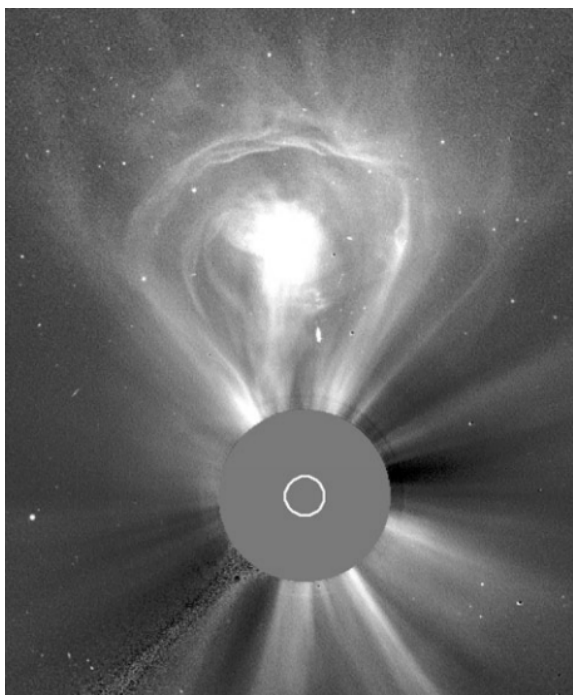
As CMEs ocorrem mais frequentemente no período de máximo solar, no qual várias ejeções podem ocorrer em um único dia (cerca de 4 ou 5 vezes por dia), com origens que compreendem uma ampla distribuição latitudinal (HOWARD, 2011). No entanto, durante o mínimo solar elas são provenientes principalmente das regiões equatoriais do Sol e possuem uma taxa de ocorrência média de menos de uma ejeção por dia. Esses fatos indicam que as CMEs devem sua existência ao campo magnético presente na coroa solar (MULLAN, 2010). As causas exatas das CMEs ainda não são bem conhecidas. Apesar disso, acredita-se que a energia armazenada no campo magnético é transformada em energia cinética, fazendo com que grandes estruturas magnéticas se desprendam do Sol e transportem consigo uma grande quantidade de matéria (KUCERA; CRANNELL, 2002).

Uma vez que as CMEs propagam-se por longas distâncias antes de serem detectadas pelas sondas espaciais, suas subestruturas apresentam uma evolução em relação ao lugar em que foram originadas (GOPALSWAMY, 2002). Assim, as CMEs distantes do Sol (maior que 50 raios solares) são chamadas de ICMEs (do inglês *Interplanetary Coronal Mass Ejections*). Veja a Figura 22b. Em geral, as ICMEs são mais lentas que as CMEs por conta da desaceleração causada pelo vento solar circundante. Ainda assim, elas apresentam grandes massas e campo magnético assim como uma típica CME. A velocidade de muitas ICMEs é supersônica. Sendo assim, elas são capazes de estabelecer ondas de choque no meio interplanetário (HOWARD, 2011). A região entre uma ICME e sua onda de choque dianteira é chamada de bainha. Ela é caracterizada por ser uma região turbulenta na qual o vento solar é aquecido por conta da compressão (ECHER; ALVES; GONZALEZ, 2006). Nessa região, há uma intensificação do IMF devido ao acúmulo de linhas de campo, o que pode aumentar a geofetividade da ICME dependendo da direção e da intensidade que o IMF adquire nessa região (BURLAGA et al., 1981).

No interior de uma ICME, a estrutura do campo magnético é variável e, em geral, sua intensidade é maior que a do IMF ao seu redor. Entretanto, é possível encontrar ICMEs com campos magnéticos estruturados de forma helicoidal que recebem o nome de nuvens magnéticas (BURLAGA, 1991). São as ICMEs e suas ondas de choque que

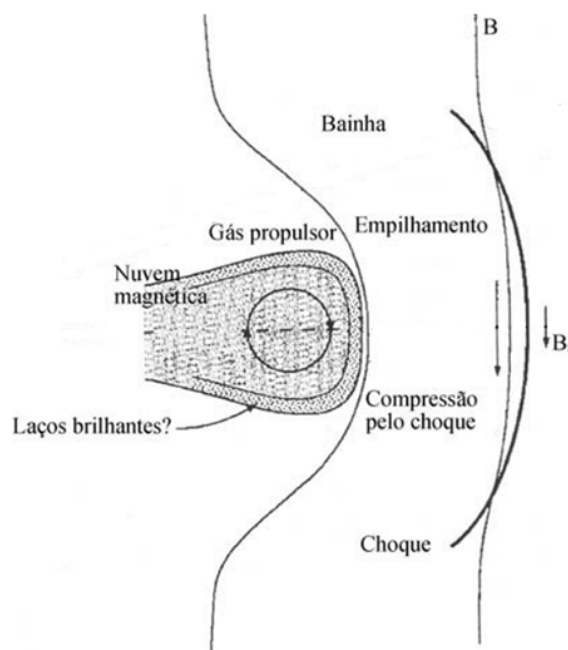
Figura 22 – As CMEs são estruturas tridimensionais de grande escala (plasma e campo magnético) que dominam o meio interplanetário durante o máximo solar. Elas produzem as tempestades geomagnéticas mais intensas.

(a) Imagem de uma imensa CME que ocorreu no dia 27 de fevereiro de 2000. Ela se expande praticamente na direção norte a partir do Sol. No meio, há um disco de ocultação cinza para bloquear o brilho intenso do disco solar e evidenciar a coroa solar. A circunferência branca indica a real localização do disco solar.



Fonte: Kucera e Crannell (2002).

(b) As subestruturas que compõem uma CME evoluem à medida que elas se propagam no meio interplanetário, gerando as ICMEs. As ICMEs têm velocidades supersônicas e, portanto, são capazes de estabelecer ondas de choque em suas dianteiras. O vento solar é comprimido e aquecido entre uma ICME e sua respectiva onda de choque.

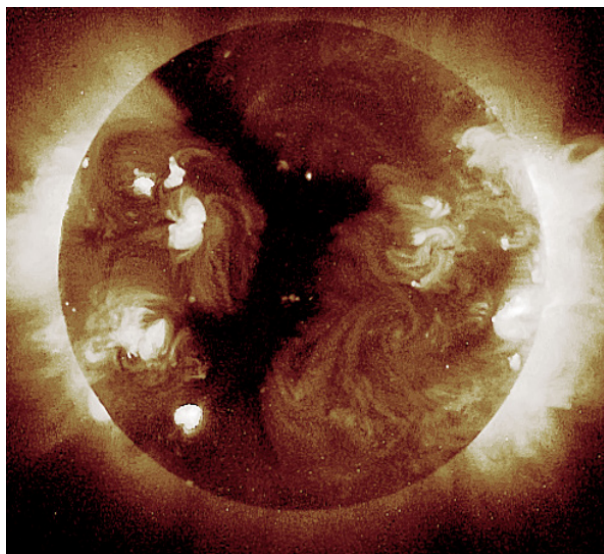


Fonte: Echer, Alves e Gonzalez (2006).

impactam a Terra e causam intensas tempestades geomagnéticas dependendo de suas respectivas geofetividades (HOWARD, 2011). Quando as ICMEs atingem a Terra, elas comprimem a magnetosfera devido as suas elevadas densidades, favorecendo a penetração de partículas do vento solar na magnetosfera e enriquecendo os diversos sistemas de corrente magnetosféricas, tal como a corrente de Chapman-Ferraro (GUARNIERI et al., 2006). Esse processo aparece como um impulso positivo súbito no índice Dst que é chamado de SSC se preceder uma tempestade geomagnética (ver Figura 21). É importante ressaltar que nem toda tempestade geomagnética é precedida por um SSC (GOPALSWAMY, 2002).

Durante as fases descendente e de mínimo solar, as CMEs se tornam menos frequentes e dão lugar a um outro tipo de estrutura solar bastante conhecida: os buracos coronais. Eles aparecem como regiões escuras em imagens do Sol obtidas nas porções UV e raio X do espectro eletromagnético (KUCERA; CRANNELL, 2002). A Figura 23 ilustra um buraco coronal. No máximo solar, os buracos coronais ficam confinados nos polos solares. Durante a fase descendente, eles aumentam de tamanho e se movem em direção

Figura 23 – Imagem de um imenso buraco coronal obtida pelo telescópio de raios X moles SXT (do inglês *Soft X-ray Telescope*) do satélite Yohkoh no dia 6 de dezembro de 2000.

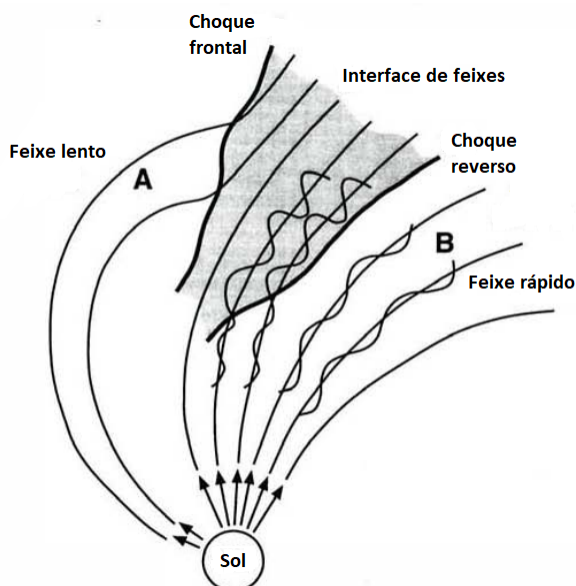


Fonte: [Cranmer \(2009\)](#).

ao equador solar ([HUNDHAUSEN, 1972](#); [GUARNIERI et al., 2006](#)). Além disso, eles apresentam uma topologia magnética diferente, pois são constituídos de linhas de campo magnético “abertas” que se estendem para fora do Sol em direção a um ponto de conexão no meio interplanetário ([MULLAN, 2010](#)). O vento solar consegue fluir facilmente em direção ao sistema solar seguindo essas linhas de campo magnético. Portanto, os buracos coronais são regiões do Sol com densidades mais baixas que dão origem aos feixes rápidos do vento solar com velocidades entre 700 e $800 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. A conexão entre buracos coronais e feixes rápidos foi confirmada pela sonda espacial Ulysses. Nesse sentido, os buracos coronais favorecem a formação de CIRs que, por sua vez, podem gerar tempestades geomagnéticas fracas e moderadas.

Em termos simples, uma CIR é uma estrutura interplanetária formada quando feixes rápidos do vento solar provenientes de buracos coronais interagem com feixes mais lentos oriundos de outras partes do Sol. Para entender como uma CIR é gerado, em primeiro lugar é preciso ter em mente como uma região de interação é formada. No vento solar, os plasmas associados a feixes com velocidades distintas estão em regimes diferentes, visto que os feixes lentos são usualmente mais densos que os feixes rápidos e, portanto, possuem uma temperatura menor que estes últimos. De acordo com [Alfvén \(1942\)](#), as linhas de campo em plasmas com regimes distintos não podem se misturar. Dessa forma, os feixes rápidos desviam os feixes lentos para oeste, enquanto estes últimos desviam os feixes rápidos para leste ([RICHARDSON, 2018](#)). Veja a Figura 24. Ambos os feixes são comprimidos nesse processo. Os feixes lentos são acelerados, enquanto os rápidos são desacelerados. A compressão resultante conduz a um aumento na densidade do plasma e na intensidade do campo magnético, formando uma região de interação (área sombreada

Figura 24 – Ilustração da interação entre um feixe lento (A) e um feixe rápido (B) do vento solar com a subsequente formação de uma região de interação corrotante (área sombreada) na qual o plasma está comprimido. Em grandes distâncias do Sol, esta região é delimitada por um par de choques (FS e RS) que se desenvolvem em virtude de discontinuidades na velocidade do vento solar. A interface de feixes demarca a fronteira entre A e B, sendo caracterizada por uma mudança abrupta em vários parâmetros do vento solar, com exceção da intensidade do campo magnético.



Fonte: Adaptado de [Tsurutani et al. \(1995\)](#).

na Figura 24).

Em uma região de interação, a interface entre os feixes é caracterizada por um transição relativamente abrupta em vários parâmetros do vento solar. Apesar disso, a intensidade do campo magnético tende apenas a aumentar na vizinhança da interface, não havendo uma mudança súbita como acontece com o vento solar ([RICHARDSON, 2018](#)). Para grandes distâncias heliocêntricas, as regiões de interação devem ser limitadas por um par de choques: choque frontal (FS, do inglês *Forward Shock*) e choque reverso (RS, do inglês *Reverse Shock*). Eles ocorrem em virtude de discontinuidades (mudanças abruptas) que se desenvolvem na velocidade do vento solar à medida que este se afasta do Sol ([GOSLING et al., 1978](#)). As regiões de interação corrotam com o Sol com uma periodicidade de aproximadamente 27 dias, pois os buracos coronais possuem a tendência de persistir por meses. É por este motivo que essas regiões são ditas corrotantes.

Uma característica marcante dos feixes rápidos é a presença das ondas de Alfvén³, as quais são amplificadas na região entre RS e a interface dos feixes devido a compressão que elas sofrem à medida que a região de interação se expande em virtude do aumento

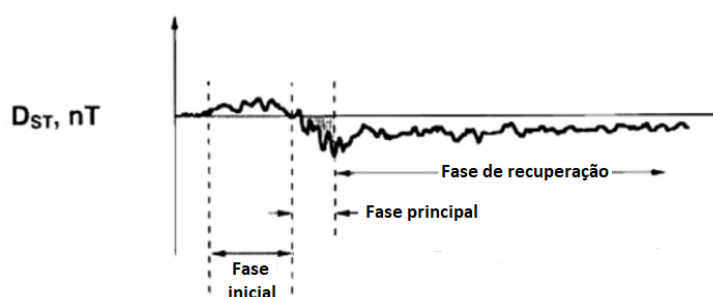
³ As ondas de Alfvén são ondas transversais que se propagam ao longo das linhas de campo magnético, podendo ser geradas em qualquer fluido eletricamente condutor imerso em um campo magnético ([JUNIOR et al., 2011a](#)).

da pressão do plasma em seu interior (RICHARDSON, 2018). Belcher e Davis (1971) concluíram que as ondas de Alfvén nos feixes rápidos são oriundas do Sol e não da interação entre os feixes. Acredita-se que elas são ondas remanescentes geradas na fotosfera pela circulação de super grânulos (HOLLWEG, 1978; GUARNIERI et al., 2006). Uma vez que a velocidade das ondas de Alfvén é de aproximadamente um décimo da velocidade do vento solar na distância de 1 AU, elas são convectadas com o vento solar. Portanto, no interior de uma CIR verifica-se a presença de intensas oscilações na componente B_z do IMF. Essas oscilações são as responsáveis pela geração de tempestades geomagnéticas fracas ou moderadas durante a fase descendente do ciclo solar (TSURUTANI et al., 1995). A Figura 25 ilustra o perfil típico do índice Dst para uma tempestade geomagnética causada por uma CIR. Observe que durante a fase principal não se verifica um decréscimo tão acentuado no índice Dst como ocorre com tempestades oriundas de ICMEs. Apesar disso, as tempestades causadas por CIRs podem ser muito mais longas, transferindo quantidades consideráveis de energia para a magnetosfera.

2.7.2 Subtempestades Magnetosféricas

Durante décadas os pesquisadores assumiram tacitamente que as tempestades geomagnéticas se desenvolvem em virtude da ocorrência frequente de subtempestades magnetosféricas (GONZALEZ et al., 1994). O termo subtempestade magnetosférica se refere a uma coleção de fenômenos físicos que ocorrem ao longo da magnetosfera em momentos em que se verifica o aparecimento súbito de auroras (subtempestade auroral) e a presença de distúrbios magnéticos na região polar (subtempestade magnética polar) (MCPHERRON, 1970; EBIHARA, 2019). Basicamente, uma subtempestade magnetosférica é um fenômeno complexo e transiente que se inicia no lado noturno da Terra, no qual uma quantidade significativa de energia oriunda da interação do vento solar com a magnetosfera é depositada na ionosfera auroral e na própria magnetosfera (ROSTOKER et al., 1980). A energia advinda dessa interação depende tanto da velocidade do vento solar quanto da

Figura 25 – Perfil típico do índice Dst para uma tempestade geomagnética causada por uma CIR. Durante a fase principal, o índice Dst não apresenta um decréscimo tão súbito e intenso como ocorre em tempestades causadas por ICMEs. Apesar disso, elas podem apresentar durações mais prolongadas.



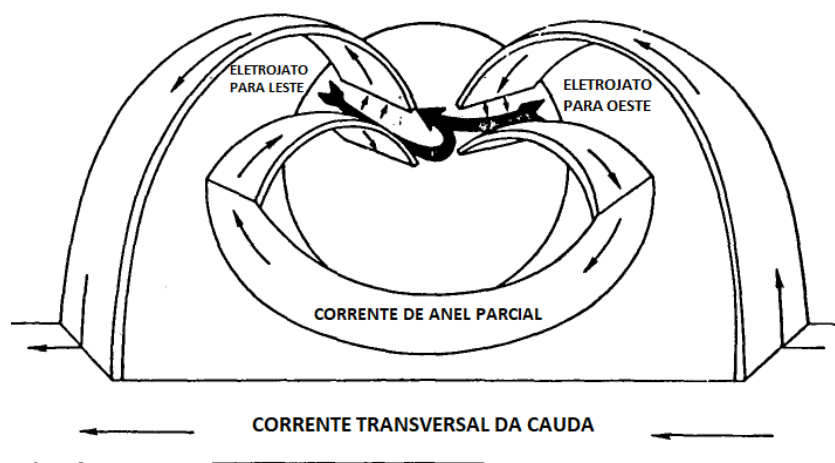
Fonte: Adaptado de Guarnieri et al. (2006).

intensidade e direção do IMF. As subtempestades ocorrem de forma mais frequente quando a componente B_z está na direção sul. O início de uma subtempestade frequentemente coincide com o instante em que B_z muda sua orientação para a direção para sul. Há situações nas quais uma subtempestade se inicia no momento em que B_z muda sua direção para norte, após ter ficado na direção sul por uma ou duas horas. Durante esse período, verifica-se um acúmulo de energia que é liberada pelo choque causado pela mudança de direção (HARGREAVES, 1992).

Assim como uma típica tempestade geomagnética, as subtempestades magnetosféricas também são divididas em fases, a saber: fase de crescimento, fase de expansão e fase de recuperação. Durante a fase de crescimento, antes do início da atividade auroral, a magnetocauda armazena a energia advinda do vento solar. Conseqüentemente, a corrente transversal da cauda se intensifica. Essa intensificação causa uma distensão da magnetocauda próxima à Terra conforme a lâmina de plasma fica mais estreita, além do aumento do campo magnético nos lóbulos (LOPEZ, 1990). A fase de expansão é o resultado da liberação explosiva da energia armazenada na magnetocauda durante a fase de crescimento (MCPHERRON, 1979). No início da fase de expansão, uma região limitada da corrente transversal da cauda é desviada ao longo das linhas de campo em direção à ionosfera, retornando posteriormente à magnetocauda (ver Figura 26). A corrente desviada concebe um arco auroral discreto brilhoso que se expande longitudinalmente e também em direção ao polo, conforme Figura 27. A fase de recuperação corresponde ao retorno da magnetosfera as suas condições usuais (KIVELSON; RUSSELL, 1995).

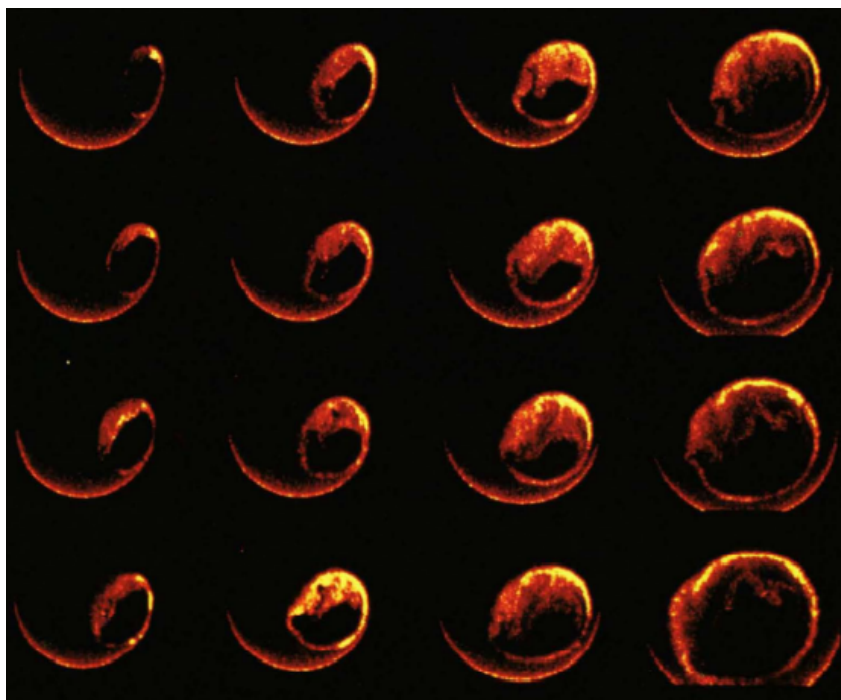
Há várias razões para acreditar que uma tempestade geomagnética consiste de intensas subtempestades magnetosféricas. Durante a ocorrência de uma subtempestade, a energia depositada na magnetosfera conduz à formação de uma corrente de anel parcial,

Figura 26 – Ilustração da possível conexão entre correntes magnetosféricas e ionosféricas durante uma subtempestade magnetosférica.



Fonte: Adaptado de Hargreaves (1992).

Figura 27 – Uma sequência de imagens da atividade auroral desenvolvida durante uma subtempestade magnetosférica. As imagens estão na porção UV do espectro eletromagnético e foram obtidas pelo satélite de órbita polar *Dynamics Explorer 1* no dia 13 de junho de 1983. Observe como o arco auroral discreto se expande longitudinalmente e em direção ao polo à medida que a subtempestade se desenvolve. O ordenamento das imagens está de cima para baixo e da esquerda para a direita.



Fonte: Adaptado de [Lopez \(1990\)](#).

que é conectada aos eletrojetos aurorais por meio das correntes de Birkeland (ver Figura 26). Especificamente, uma subtempestade provoca um aumento da população de prótons com energias entre 1 e 50 keV na região de aprisionamento, cujos movimentos adiabáticos induzem correntes elétricas e reduzem a intensidade do campo geomagnético em baixas latitudes ([AKASOFU, 1968](#)). Dessa forma, se as subtempestades ocorrerem frequentemente com intervalos de poucas horas entre elas, então verifica-se um acúmulo de prótons na região de aprisionamento. Isso faz com que a corrente de anel parcial evolua para uma corrente de anel com simetria azimutal, típica da fase principal de uma tempestade geomagnética ([GONZALEZ et al., 1994](#)). Se o intervalo de tempo entre elas for muito prolongado, então a maior parte desses prótons irá desaparecer devido aos diversos processos de decaimento da corrente de anel. Noutros termos, os efeitos de subtempestades sucessivas não serão superpostos. Isso parece indicar que uma tempestade geomagnética se desenvolve sempre quando subtempestades ocorrem de forma frequente. Essa asserção é controversa, pois há alguns contraexemplos a essa regra que tornam a relação entre subtempestades e tempestades um problema ainda sem solução ([EBIHARA, 2019](#)).

2.8 Eventos HILDCAA

A atividade solar é responsável por produzir perturbações no campo geomagnético devido a sua interação com o vento solar, caracterizando o que se conhece por atividade geomagnética. As atividades geomagnéticas mais conhecidas são as tempestades geomagnéticas e as subtempestades magnetosféricas, que vêm sendo estudadas e descritas desde meados do século XX. Na verdade, o termo “tempestade” foi utilizado já na metade do século XIX para descrever episódios nos quais o campo geomagnético apresentava flutuações extraordinárias (GONZALEZ et al., 1994). No final do século XX, Tsurutani e Gonzalez (1987) identificaram um novo tipo de atividade geomagnética durante a análise de tempestades geomagnéticas com fases de recuperação mais longas que o usual, nas quais o índice Dst não retornava aos seus valores habituais por dias ou até mesmo semanas (GUARNIERI, 2006).

Eles sabiam que não havia nenhuma hipótese física conhecida capaz de explicar a existência dessas fases de recuperação tão prolongadas. Os principais processos físicos que explicam o decaimento da corrente de anel, tais como a troca de cargas entre íons e neutros, as colisões Coulombianas, a convecção de íons através da magnetopausa e a interação onda-partícula, possuem escalas de tempo que vão de horas a uma fração de dias apenas (KOZYRA et al., 1997; TSURUTANI et al., 2004). Dessa forma, Tsurutani e Gonzalez (1987) verificaram que se tratava de um novo tipo de atividade geomagnética que continuava a ocorrer durante essas fases de recuperação (GUARNIERI, 2006). Eles a chamaram de evento HILDCAA, pois ela foi definida em termos do índice AE. As quatro condições para a identificação de um evento HILDCAA são:

1. *High-Intensity*: O índice AE deve atingir um pico com intensidade maior ou igual a 1000 nT em algum momento durante o evento;
2. *Long-Duration*: O evento deve ter ao menos 2 dias de duração;
3. *Continuous AE Activity*: O índice AE não pode permanecer abaixo de 200 nT por períodos superiores a 2 horas consecutivas;
4. O evento deve ocorrer fora da fase principal de uma tempestade geomagnética.

A ideia do quarto critério é separar o mecanismo responsável por conceber um evento HILDCAA dos que geram a fase principal de uma tempestade magnética, visto que nenhuma hipótese física conhecida pode explicar fases de recuperação que duram por dias ou semanas (TSURUTANI et al., 2004). Na verdade, a explicação para a prolongada fase de recuperação durante um evento HILDCAA foi dada por Søråas et al. (2004). Eles argumentam que ela se deve à injeção de prótons na porção mais externa da corrente de anel, impedindo o seu decaimento natural e retardando a recuperação do índice Dst.

Os critérios propostos por [Tsurutani e Gonzalez \(1987\)](#) são bastante restritivos a fim de minimizar o número de eventos a serem estudados. O mesmo processo físico associado a um evento HILDCAA pode ocorrer mesmo se um ou mais desses critérios não forem atendidos ([HAJRA et al., 2013](#)). Novos critérios foram adicionados aos tradicionais. [Koga et al. \(2011\)](#) declaram que os seguintes critérios adicionais são necessários para um evento HILDCAA:

1. uma variação moderada do índice SYM-H (não menos que -100 nT);
2. a presença de feixes rápidos do vento solar;
3. e uma oscilação de alta frequência da componente B_z do IMF em torno de zero, com amplitudes de ± 10 nT.

[Hajra et al. \(2013\)](#) estudaram a dependência de eventos HILDCAA com o ciclo solar e concluíram que eles podem ocorrer em qualquer uma das fases do ciclo solar. Entretanto, a probabilidade de ocorrência de um evento HILDCAA na fase descendente é aproximadamente três vezes maior que a das fases ascendente e de máximo solar. Este fato pode ser explicado da seguinte forma. Durante as fases descendente e de mínimo solar (principalmente), os feixes rápidos do vento solar são predominantes no meio interplanetário ([TSURUTANI; GONZALEZ, 1997](#)). Nesses feixes, é comum a presença de ondas de Alfvén que possuem uma alta correlação com a ocorrência de eventos HILDCAA. Devido a natureza oscilatória dessas ondas, elas alteram a direção da componente B_z do IMF com uma certa periodicidade. Assim, em certos intervalos de tempo ela está na direção norte, enquanto em outros ela está na direção sul. Consequentemente, tem-se a ocorrência de reconexões magnéticas intermitentes entre o IMF e o campo geomagnético. Durante essas reconexões, verifica-se a transferência de energia do vento solar para a magnetosfera e a eventual deposição de energia na ionosfera auroral ([TSURUTANI et al., 2004](#)). É por este motivo que o índice AE permanece intenso durante longos períodos de tempo ([KOGA et al., 2011](#)).

Em suma, um evento HILDCAA é um evento magnetosférico e ionosférico causado por múltiplas reconexões magnéticas em decorrência da presença de ondas de Alfvén nos feixes rápidos do vento solar. Ele é mais provável de ocorrer durante as fases descendente e de mínimo solar, visto que a ocorrência de buracos coronais é mais frequente nesses períodos. Na fase de máximo solar, os feixes rápidos são transientes e, portanto, a ocorrência de eventos HILDCAA é menos provável ([TSURUTANI et al., 1995](#)). As ondas de Alfvén e a presença de campo magnético na direção sul são condições indispensáveis para a ocorrência de eventos HILDCAA. Então, é de se esperar que qualquer estrutura interplanetária que favoreça o desenvolvimento e/ou intensificação desses entes físicos seja uma potencial geradora de eventos HILDCAA. De fato, a maioria desses eventos ocorrem após tempestades

provocadas por CIRs. Porém, eles também podem ocorrer após tempestades produzidas por ICMEs ou mesmo sem a ocorrência de qualquer tempestade ([GUARNIERI et al., 2006](#)).

3 ATMOSFERA NEUTRA

A atmosfera neutra é o termo utilizado para se referir a fina camada de gases que envolve a Terra, tendo em vista que a sua espessura equivale a apenas 1% do raio terrestre (BARRY; CHORLEY, 2009). Apesar disso, a sua existência é um dos fatores primordiais que asseguram a vida na Terra, pois ela atua como um “escudo” para a radiação solar em comprimentos de onda que são nocivos aos seres vivos, tais como os pertinentes à radiação ultravioleta (UV, do inglês *Ultraviolet*). Além disso, ela fornece os compostos químicos necessários em diversos processos realizados por animais e plantas (fotossíntese, por exemplo).

Basicamente, existem duas teorias que tentam explicar o surgimento da atmosfera neutra. A primeira teoria afirma que os gases atmosféricos estavam originalmente aprisionados no interior do material sólido que compõe a Terra, os quais foram liberados gradualmente por meio da atividade vulcânica e dos violentos impactos de asteroides com a superfície terrestre. Por outro lado, a segunda teoria propõe que os gases não estavam originalmente na Terra, mas que foram trazidos por cometas¹ que os liberavam ao colidir com a superfície terrestre. Há uma cisão na comunidade científica sobre qual dessas teorias é a correta, visto que ambas têm suas vantagens e desvantagens. De fato, nenhuma delas explica os elevados níveis de O₂ na atmosfera (ARNY; SCHNEIDER, 2017). Supõe-se que isto se deve à fotossíntese realizada por microrganismos e plantas, e à quebra de moléculas de água por conta da radiação UV. Além disso, durante a sua formação a atmosfera neutra apresentava uma concentração elevada de gases nocivos aos seres humanos, tais como metano (CH₄) e amônia (NH₃). Felizmente, a concentração desses gases hoje é reduzida por conta da radiação solar, que no caso da Terra é intensa o suficiente para dissociá-los, gerando átomos de carbono, hidrogênio e nitrogênio. Consequentemente, tanto o metano quanto a amônia não se formam novamente porque a gravidade da Terra não é suficiente para manter os átomos de hidrogênio.

Uma vez que a atmosfera neutra é o ambiente no qual a ionosfera se desenvolve por meio dos processos de fotoionização e ionização corpuscular (ver Capítulo 4), o propósito deste capítulo é fornecer ao leitor uma visão geral sobre a atmosfera neutra antes de tratar da ionosfera propriamente dita. Sua redação está estruturada da seguinte forma. A seção 3.1 discute a composição e a estrutura da atmosfera neutra a fim de que o leitor se familiarize com as terminologias e o significado de cada uma delas. A seção 3.2 é uma discussão sobre como a pressão e a densidade atmosféricas variam com a altitude em alguns modelos atmosféricos simples. Essas grandezas são essenciais para o entendimento das propriedades de qualquer atmosfera. Por fim, a seção 3.3 discorre sobre as ondas de

¹ Os cometas são formados essencialmente por uma mistura de água congelada e gases.

gravidade, que são fenômenos ondulatórios que se desenvolvem na atmosfera neutra. Como será visto, as ondas de gravidade podem ser causadas por diversos fenômenos físicos, dentre os quais destacam-se os terremotos e os tsunamis.

3.1 Composição e Estrutura

A atmosfera neutra é composta por uma miríade de gases cujas respectivas concentrações (porcentagens em volume) estão listadas na Tabela 3. Os valores são fornecidos com relação ao ar seco, visto que o vapor d'água é um constituinte de concentração altamente variável (WALLACE; HOBBS, 2006). O nitrogênio e o oxigênio moleculares, N_2 e O_2 , são os constituintes mais abundantes. O argônio (Ar) está presente em concentrações muito maiores que a dos outros gases nobres. Note que o ar seco, em volume, é mais de 99% composto de nitrogênio e oxigênio (BARRY; CHORLEY, 2009). Além disso, estes gases são tratados como permanentes, pois ocorrem em concentrações aproximadamente constantes até cerca de 100 km de altitude. Apesar da predominância dos mesmos, eles não desempenham um papel importante no que tange aos fenômenos climáticos, visto que estes últimos estão relacionados com as propriedades radiativas e termodinâmicas dos gases atmosféricos e não a sua abundância relativa (SAHA, 2008). Os gases traço², tais como o dióxido de carbono, vapor d'água e ozônio, têm um papel crucial na termodinâmica da atmosfera. Os dois primeiros têm a capacidade de aprisionar a radiação infravermelha (IR, do inglês *Infrared*) emitida pela Terra, gerando o famigerado efeito estufa. O último absorve boa parte da radiação UV, contribuindo para o aumento da temperatura na estratosfera.

Os gases que compõem a atmosfera neutra são capazes de absorver a radiação solar.

² Os gases traço são aqueles que ocorrem em pequenas concentrações na atmosfera.

Tabela 3 – Composição do ar atmosférico seco até 25 km.

| Constituinte | Símbolo | Volume (%) |
|--------------------|---------|------------|
| Nitrogênio | N_2 | 78,08 |
| Oxigênio | O_2 | 20,95 |
| Argônio | Ar | 0,93 |
| Dióxido de Carbono | CO_2 | 0,037 |
| Neônio | Ne | 0,0018 |
| Hélio | He | 0,0005 |
| Ozônio | O_3 | 0,00006 |
| Hidrogênio | H | 0,00005 |
| Criptônio | Kr | 0,0011 |
| Xenônio | Xe | 0,00009 |
| Metano | CH_4 | 0,00017 |

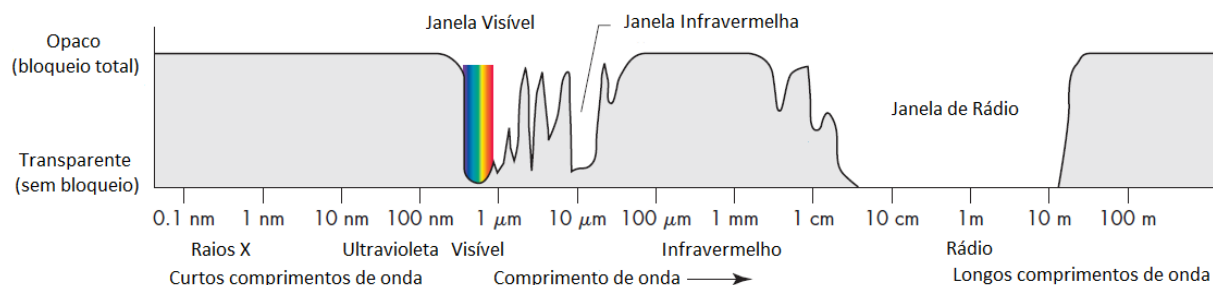
Fonte: Barry e Chorley (2009).

Como ilustra a Figura 28, a eficiência da absorção depende do comprimento de onda da radiação. Para certas porções do espectro, a atmosfera é praticamente transparente, dando origem às “janelas atmosféricas”, e em outras ela é opaca. São as janelas atmosféricas que permitem o estudo de objetos astronômicos, tais como estrelas e galáxias, a partir da superfície terrestre, visto que eles irradiam bastante na porção visível do espectro. Apesar disso, devido a intensa absorção de radiação UV e IR, os astrônomos frequentemente necessitam de telescópios no espaço (ARNY; SCHNEIDER, 2017). A absorção da radiação varia com o comprimento de onda devido a forma como ela interage com a matéria. Um átomo de um elemento químico só absorve a radiação em comprimentos de onda específicos, cujas energias correspondem a diferença de energia entre o estado fundamental e um de seus estados excitados, definindo suas linhas de absorção (KNIGHT, 2017). Dessa forma, sempre haverá certas porções do espectro que serão fracamente absorvidas. As moléculas são mais eficientes do que os átomos na absorção de radiação, visto que elas conseguem armazenar energia de mais formas (rotação e vibração, por exemplo) do que um átomo isolado. Assim, elas bloqueiam a radiação em mais comprimentos de onda.

A Figura 28 mostra que a atmosfera possui uma janela na porção visível do espectro eletromagnético, cujos comprimentos de onda estão entre 380 e aproximadamente 700 nm. A luz visível transpassa a atmosfera e atinge a superfície terrestre com pouca dificuldade, aquecendo-a. Conseqüentemente, esta última emite radiação IR que é absorvida pela atmosfera devido a presença de gases como vapor d’água e dióxido de carbono. Estes, por sua vez, reemitem parte dessa radiação de volta à superfície (ver Figura 29). Portanto, há uma redução na perda de calor que previne o esfriamento da superfície e mantém sua temperatura média elevada, gerando o efeito estufa³ (AHRENS, 2011). É importante salientar que o efeito estufa é um fenômeno natural amplificado por ações antrópicas. Ele não é exclusivo da Terra, pois pode ocorrer em qualquer planeta com uma atmosfera

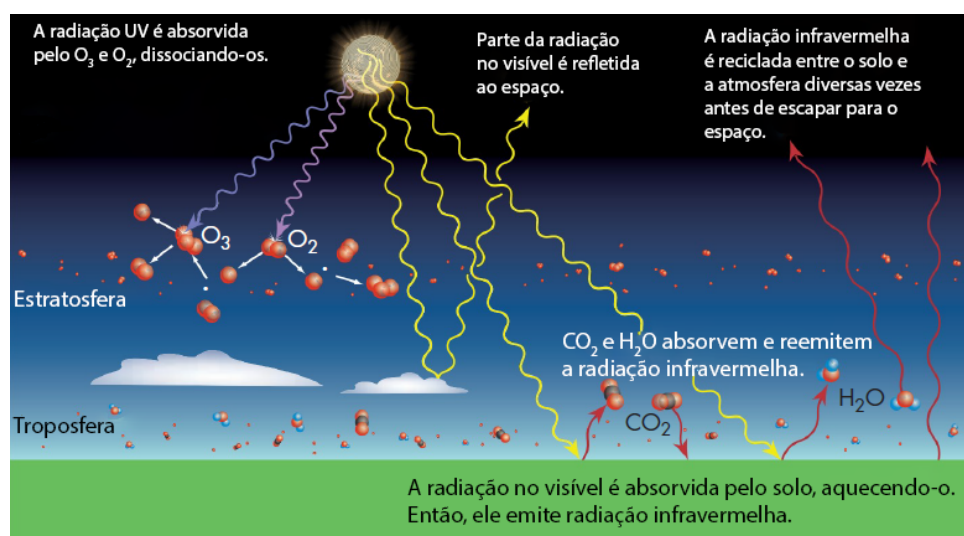
³ Há outros gases que contribuem para o efeito estufa, tais como o gás metano (CH_4), o óxido nitroso (N_2O) e os clorofluorcarbonetos (CFCs, do inglês *Chlorofluorocarbons*).

Figura 28 – A atmosfera absorve fortemente certas porções do espectro eletromagnético, mas há outras em que isso não acontece. De fato, nas chamadas janelas atmosféricas a atmosfera é essencialmente transparente à radiação.



Fonte: Adaptado de Arny e Schneider (2017).

Figura 29 – O efeito estufa ocorre por conta da presença de gases como dióxido de carbono e vapor d’água na atmosfera. Eles aprisionam a radiação IR emitida pela superfície terrestre, prevenindo que ela esfrie.



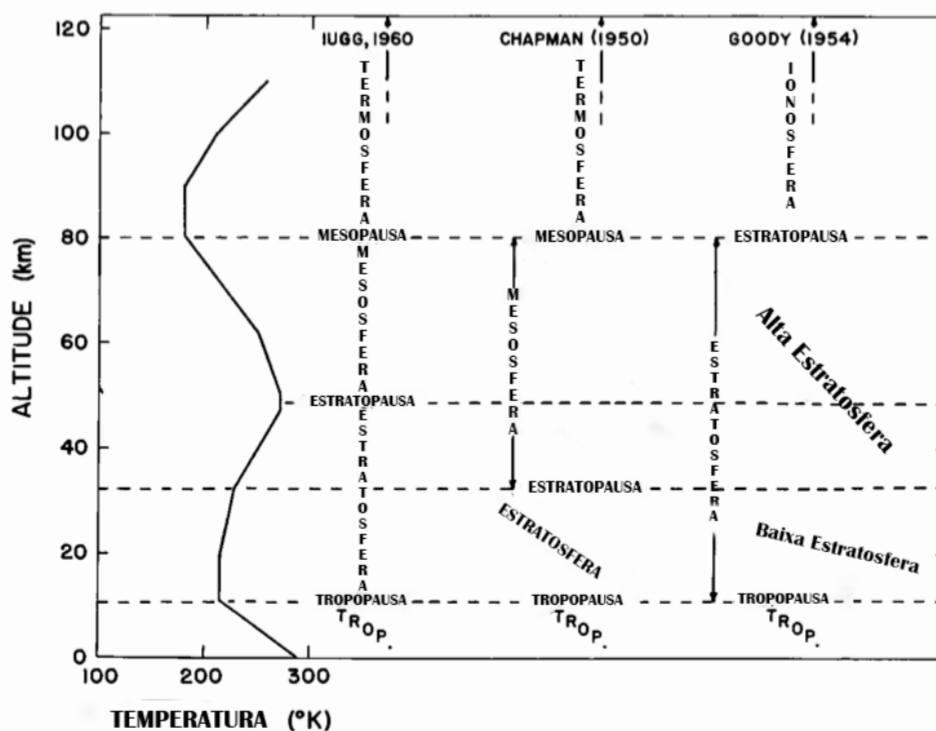
Fonte: Adaptado de [Arny e Schneider \(2017\)](#).

formada por gases capazes de absorver a radiação em longos comprimentos de onda emitida por sua superfície ([SAHA, 2008](#)). No entanto, é sabido que a concentração de dióxido de carbono na atmosfera tem aumentado desde a Revolução Industrial. Alguns modelos matemáticos estimam que se ela continuar a crescer na taxa atual, a temperatura da superfície terrestre irá aumentar cerca de $3^\circ C$ até o fim deste século. Isso pode trazer uma série de consequências negativas, tais como o degelo das calotas polares e o subsequente aumento do nível do mar.

Assim como ocorre com todo sistema natural complexo, uma nomenclatura foi desenvolvida para descrever as diferentes partes da atmosfera. Ela pode ser baseada na temperatura, na composição química ou em propriedades elétricas ([RISHBETH; GARRIOTT, 1969](#); [AHRENS, 2011](#)). Em cada caso, há uma série de palavras terminadas em “sfera” que são definidas de acordo com alguma propriedade que caracteriza a atmosfera em um certo intervalo de altitudes. O limite superior de cada “sfera” é denotado por uma palavra semelhante terminando em “pausa”. Há vários sistemas de nomenclatura que utilizam dessas palavras para designar as regiões da atmosfera. Isso produz ambiguidades, pois uma dada palavra pode se referir a regiões diferentes. A Figura 30 mostra três sistemas de nomenclatura baseados na temperatura.

[Chapman \(1950\)](#) dividiu a alta atmosfera em estratosfera, mesosfera e termosfera, cujos limites estão evidenciados na Figura 30. Na sequência, ele subdividiu a mesosfera em duas partes com base no valor máximo de temperatura próximo a 50 km de altitude. A estratosfera e a mesosfera são limitadas superiormente pela estratopausa e mesopausa, respectivamente. A região acima da mesopausa ele designou de termosfera. O sistema

Figura 30 – Perfil vertical de temperatura da atmosfera neutra até 110 km de altitude, junto com três sistemas de nomenclatura distintos.



Fonte: Adaptado de [Craig \(1965\)](#).

introduzido por [Goody \(1954\)](#) difere deste último em vários aspectos, sendo que o mais visível deles diz respeito à estratosfera. Nesse sistema, ela compreende a região entre a tropopausa e o mínimo de temperatura próximo a 80 km de altitude. Além disso, [Goody \(1954\)](#) nomeou de baixa estratosfera a região quase isotérmica entre a tropopausa e a altitude de 32 km, enquanto a região remanescente recebeu o nome de alta estratosfera. Um outro aspecto se refere à região acima da estratopausa, que [Goody \(1954\)](#) designou de ionosfera em vez de termosfera.

Infelizmente, a discrepância entre os sistemas de nomenclatura era um problema naquela época, pois uma ciência só pode ser construída com o uso de terminologias amplamente conhecidas e aceitas, com um significado bem definido. Nesse sentido, em 1960 a União Internacional de Geodésia e Geofísica (IUGG, do inglês *International Union of Geodesy and Geophysics*) recomendou o sistema “IUGG, 1960”, que desde então tem sido adotado na literatura especializada ([RATCLIFFE, 1960](#); [CRAIG, 1965](#)). Nesse sistema, a estratosfera se estende da tropopausa até cerca de 50 km (estratopausa), enquanto a mesosfera está entre a estratopausa e o mínimo de temperatura próximo a 80 km (mesopausa). A termosfera está acima da mesopausa. Este texto utiliza as terminologias definidas por esse sistema para tratar das regiões atmosféricas.

A troposfera é a camada mais baixa da atmosfera neutra, onde cerca de 75% da massa atmosférica se encontra. Ela é caracterizada por sua composição uniforme e pelo

decréscimo gradual de temperatura com a altitude a uma taxa de lapso média de $6,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ (KELLEY, 2009; SALBY, 2012). Contudo, no interior da troposfera verifica-se a presença de finas camadas onde a temperatura aumenta com a altitude (WALLACE; HOBBS, 2006). A transferência radiativa é o processo físico responsável por esse decréscimo, enquanto a convecção é o processo que impede que a taxa exceda $10 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$. A emissão e absorção de radiação IR por moléculas de vapor d'água, dióxido de carbono e ozônio, fornecem uma transferência de calor eficiente entre os diferentes níveis dessa camada (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). O nome troposfera é derivado da palavra grega “tropos”, que significa mudança. Ele foi introduzido pelo meteorologista francês Léon-Philippe Teisserenc de Bort (1855-1913) em 1908 (ALLABY; GARRATT, 2009). É um nome adequado, visto que é nessa camada onde o clima, que está em constante mudança, acontece. O limite superior da troposfera é chamado de tropopausa, cuja altitude varia de um valor próximo de 16 km nos trópicos para cerca de 8 km próximo dos polos (HOLTON; CURRY; PYLE, 2003). A tropopausa se comporta como um ponto de inflexão no que tange à temperatura, pois ela demarca a fronteira entre a troposfera e a estratosfera, as quais possuem taxas de lapso com sinais distintos. Este é o critério utilizado para determinar a altura da tropopausa em uma dada localização e instante de tempo (CRAIG, 1965).

Na virada do século XIX para o século XX, acreditava-se que a temperatura continuava a diminuir com a altitude e que a atmosfera imergia no meio interplanetário em uma altitude próxima a 50 km (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Entretanto, essa crença foi desconstruída por meio de experimentos com termômetros transportados por balão, como os realizados por Teisserenc de Bort. Em 1902, ele revelou a existência de uma região quase isotérmica, com uma temperatura em torno de 220 K, próxima a 11 km de altitude em médias latitudes (CRAIG, 1965). Como não havia evidências de movimento vertical de ar, Teisserenc de Bort argumentou que os gases atmosféricos nessa região se separam de acordo com os seus respectivos pesos moleculares. Os gases mais pesados embaixo, enquanto os mais leves em cima (ALLABY; GARRATT, 2009). Nessa região da atmosfera o ar formaria camadas ou estratos de diferentes gases. Então, ele chamou a região de estratosfera. Em verdade, Teisserenc de Bort estava errado, visto que o ar estratosférico está misturado e tem a mesma composição que o ar troposférico. Apesar disso, a nomenclatura ainda é utilizada atualmente. A estratosfera se estende da tropopausa até uma altitude em torno de 50 km. Ela contém cerca de 20% da massa atmosférica (ROBERTSON; VITART, 2019).

Na estratosfera, a temperatura aumenta com a altitude devido a presença de um constituinte minoritário da atmosfera: o ozônio. Ele é responsável por absorver boa parte radiação UV solar incidente. Dessa forma, o ozônio aquece a atmosfera e atua como um escudo para uma radiação nociva a muitas formas de vida na Terra. Especificamente, ele absorve toda a radiação UV com comprimentos de onda inferiores a 2900 Å, e parcialmente os comprimentos de onda entre 2900 e 3600 Å (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Tendo em

vista a sua importância, muitas autoridades políticas ao redor do mundo têm cooperado para limitar o uso de químicos, tais como os CFCs, com o potencial de destruir a camada de ozônio. O aumento de temperatura causado pelo ozônio é maximizado próximo a 50 km de altitude, na estratopausa (HARGREAVES, 1992). A estratopausa é uma região dentro da qual a temperatura permanece constante com o aumento da altitude. Ela demarca a fronteira entre a estratosfera e a mesosfera (ALLABY; GARRATT, 2009).

A mesosfera é uma camada atmosférica situada entre 50 e 80 km, na qual a temperatura volta a decrescer com a altitude, embora em um ritmo mais lento que o troposférico (SAHA, 2008). Ela é uma região da atmosfera muito alta para aviões e muito baixa para satélites. Isso dificulta a realização de experimentos para a coleta de informações. Nesse sentido, suas características são obtidas por meio de experimentos baseados em Terra e a bordo de foguetes, os quais envolvem a propagação de ondas de rádio na atmosfera (GHOSH, 2010). Na mesosfera, a temperatura decresce até um mínimo na mesopausa entre 80 e 85 km (HARGREAVES, 1992). Com uma temperatura em torno de 180 K, a mesopausa é a parte mais fria da atmosfera. Ela demarca a região a partir da qual a temperatura começa a aumentar novamente, atingindo valores consideráveis nas partes mais elevadas da atmosfera. Essa região da atmosfera é chamada de termosfera.

A termosfera começa em torno de 85 km de altitude e se estende até cerca de 500 km, sendo a região mais quente da atmosfera (SOLOMON; ROBLE, 2015). A baixa termosfera é composta majoritariamente de nitrogênio molecular (N_2), oxigênio molecular (O_2) e oxigênio atômico (O) (ALLABY; GARRATT, 2009). Na alta termosfera, o oxigênio atômico torna-se predominante devido à importância dos processos de fotodissociação e difusão molecular em altitudes elevadas. O aumento da temperatura termosférica decorre da absorção da radiação ultravioleta extrema (EUV, do inglês *Extreme Ultraviolet*) pelo oxigênio (atômico e molecular), podendo atingir valores entre 800 e 1200 K próximo a 350 km (BARRY; CHORLEY, 2009). A temperatura aumenta até atingir um valor máximo que é altamente dependente da atividade solar (SPEIGHT, 2017). Quando ela é intensa, a temperatura fica em torno de 2000 K a 500 km de altitude. Quando é mais branda, ela é da ordem de 500 K (SAHA, 2008). Apesar das elevadas temperaturas, elas são essencialmente teóricas por conta da baixa densidade na termosfera. Isso significa que um satélite artificial orbitando no interior da termosfera não adquire tais temperaturas devido à baixíssima quantidade de moléculas disponíveis para transferir calor por meio de colisões. A baixa densidade também implica que, em média, uma molécula percorrerá uma distância de mais de 1 km antes de colidir com outra (AHRENS, 2011).

As pressões na termosfera são tão baixas que na prática ela pode ser considerada uma região de vácuo excelente. No entanto, ainda há atmosfera o suficiente para que a radiação solar mais energética, na forma de raios X e radiação UV, ionize os constituintes neutros. Assim, um plasma fracamente ionizado, chamado de ionosfera, é estabelecido

no interior da termosfera (HOLTON; CURRY; PYLE, 2003). Apesar da maior parte da ionosfera se encontrar na termosfera, a ionosfera começa a partir de uma altura em torno de 50 km e não apresenta um limite superior bem definido (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Suas diversas regiões, em ordem crescente de altitude, são distinguidas utilizando as letras D, E e F (ver seção 4.3). Na ionosfera, íons e elétrons estão presentes em quantidades suficientes para afetar a propagação de ondas de rádio. No período diurno, a região D absorve fortemente e enfraquece as ondas de rádio AM (do inglês *Amplitude Modulation*). Isso impede que elas sejam captadas por receptores distantes (AHRENS, 2011). No período noturno, as ondas de rádio AM são fortemente refletidas pela região F, permitindo que elas percorram grandes distâncias. Nas regiões polares, a termosfera e a ionosfera são afetadas por processos aurorais que resultam da interação do vento solar com o campo geomagnético (ver seção 2.5). Além disso, elas também são influenciadas por processos dinâmicos advindos da baixa atmosfera, tais como ondas de gravidade, marés e ondas interplanetárias (SOLOMON; ROBLE, 2015). Tudo isso explica a grande variabilidade observada no sistema termosférico/ionosférico.

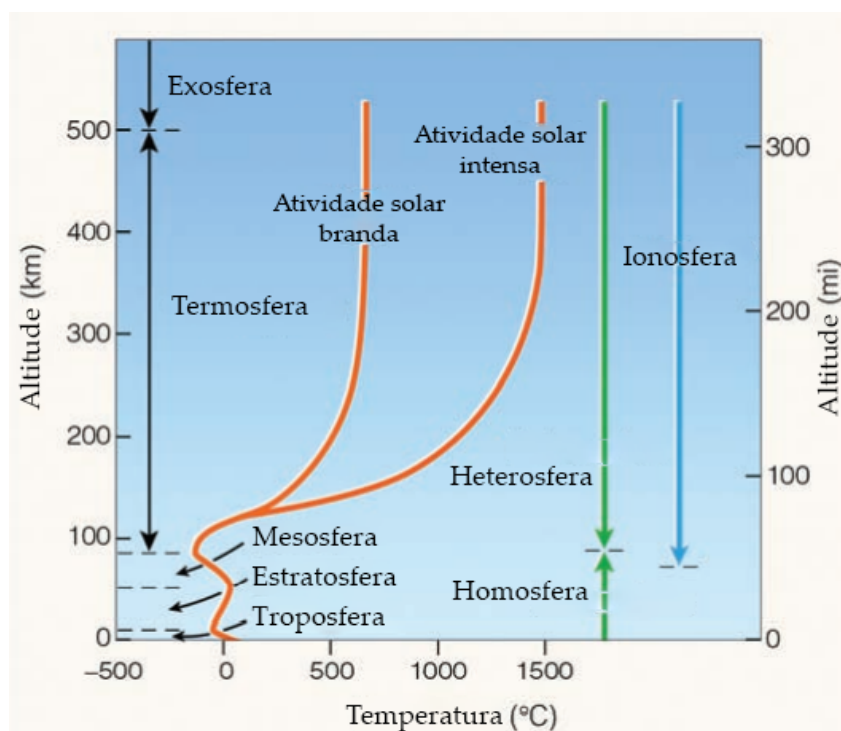
A partir da parte superior da termosfera, próximo a 500 km de altura, os átomos e moléculas estão tão distantes uns dos outros que podem percorrer centenas de quilômetros antes de colidirem entre si (SPEIGHT, 2020). Essa região da atmosfera deve ser tratada de forma diferente, não como um fluido único, mas como um conjunto de átomos ou moléculas individuais que perfazem suas próprias trajetórias no campo gravitacional terrestre (HARGREAVES, 1992). As colisões são tão infrequentes que os constituintes neutros perfazem trajetórias balísticas, sujeitos apenas à atração gravitacional, e eventualmente conseguem escapar para o espaço (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Essa região corresponde à camada atmosférica mais externa, sendo chamada de exosfera. A exosfera começa em uma altitude que geralmente é chamada de exobase, situada entre 500 e 750 km, e se estende até o espaço (HOLTON; CURRY; PYLE, 2003; BARRY; CHORLEY, 2009; BAUER; LAMMER, 2011). A exosfera é composta essencialmente de hidrogênio, hélio e de várias moléculas pesadas nas regiões mais próximas da exobase, as quais incluem nitrogênio, oxigênio e dióxido de carbono.

Além da classificação com base na temperatura, é comum classificar a atmosfera neutra em termos de sua composição (AHRENS, 2011). Abaixo de 100 km, a turbulência desempenha um papel importante na atmosfera ao misturar os seus constituintes neutros. Assim, sua composição permanece essencialmente uniforme⁴ da superfície terrestre até uma altura logo abaixo de 100 km (HOLTON; CURRY; PYLE, 2003). Essa região, que engloba a troposfera, estratosfera e mesosfera, é chamada de homosfera. Acima dela, a ausência de turbulência permite o estabelecimento de uma condição de separação difusiva, na qual a distribuição vertical dos constituintes neutros depende de seus respectivos pesos

⁴ 78% de N₂ e 21% de O₂, junto com pequenas quantidades de outros constituintes.

moleculares (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Nessa região, os constituintes se separam sob a ação da gravidade e assim a composição varia com a altitude. Os mais pesados, tais como oxigênio e nitrogênio, tendem a permanecer nas partes inferiores, enquanto os mais leves, tais como hidrogênio e hélio, nas partes superiores. Essa região é chamada heterosfera. A fronteira entre essas regiões, que ocorre próximo a 100 km, recebe o nome de turbopausa. A Figura 31 ilustra as camadas atmosféricas com base na temperatura, composição e propriedades elétricas discutidas nesta seção.

Figura 31 – Camadas atmosféricas baseadas na temperatura (laranja), composição (verde) e propriedades elétricas (azul).



Fonte: Adaptado de Ahrens (2011).

3.2 Distribuições de Densidade e Pressão

A presente seção trata das distribuições de densidade e pressão em duas camadas atmosféricas simples. A ideia é obter expressões analíticas que descrevam o comportamento da densidade e pressão atmosféricas. Em cada caso, o ponto de partida é a equação hidrostática dada por

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{1}{H}p,$$

em que p é a pressão atmosférica e H é a altura de escala da atmosfera. A subseção 3.2.1 discorre sobre uma camada atmosférica isotérmica com altura de escala constante. Isso significa que o peso molecular médio e a gravidade não variam com a altura. Há também uma discussão sobre os efeitos causados nas distribuições de densidade e pressão quando

a dependência da gravidade com a altura é considerada. A subseção 3.2.2 aborda uma camada atmosférica na qual a temperatura varia linearmente com a altura (taxa de lapso constante), assim como ocorre com a troposfera.

3.2.1 Camada Atmosférica em Equilíbrio Isotérmico

Desconsiderando a dependência com a altura z da aceleração da gravidade g e do peso molecular médio m , verifica-se que a altura de escala $H = kT/mg$ depende apenas da temperatura T , pois k é a constante de Boltzmann. Dessa forma, se a temperatura for uniforme obtém-se uma camada atmosférica em equilíbrio isotérmico com altura de escala constante. Esse é o caso mais simples, uma vez que a equação hidrostática pode ser resolvida diretamente. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{p'} = -\frac{1}{H}dz' &\implies \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = -\frac{1}{H} \int_{z_0}^z dz' \\ &\implies \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{z - z_0}{H} \\ &\implies p = p_0 \exp\left(-\frac{z - z_0}{H}\right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que p_0 é a pressão atmosférica em uma altura de referência z_0 . Uma vez que pressão e densidade são grandezas diretamente proporcionais, da equação (3.1) infere-se que

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{z - z_0}{H}\right), \quad (3.2)$$

em que ρ_0 é a densidade atmosférica em z_0 . As Figuras 32a e 32b ilustram, respectivamente, os gráficos das equações (3.1) e (3.2) considerando as condições médias atribuídas ao nível do mar ($z_0 = 0$). Em outras palavras, $p_0 = 101\,325$ Pa, $\rho_0 = 1,225$ kg · m⁻³, $g = 9,81$ m · s⁻², $T = 288,15$ K e $m = 4,808 \times 10^{-26}$ kg. Com estes valores, a altura de escala H é de aproximadamente 8434 m.

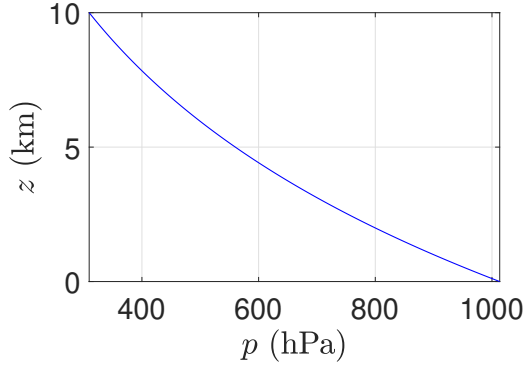
Em cálculos mais precisos dos parâmetros atmosféricos, a variação de g tanto com a altura quanto com a latitude não pode ser negligenciada (CRAIG, 1965; RISHBETH; GARRIOTT, 1969). A expressão que rege a variação com a altura é obtida por meio da Lei da Gravitação Universal,

$$g(z) = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{R_E^2} \frac{R_E^2}{(R_E + z)^2} = g_0 \frac{R_E^2}{(R_E + z)^2}, \quad (3.3)$$

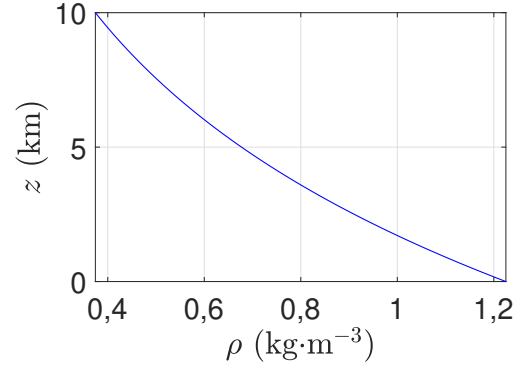
em que G é a constante gravitacional universal, M_E e R_E a massa e o raio da Terra, respectivamente, $r = R_E + z$ a distância geocêntrica radial e g_0 o valor de g no nível do mar. Substituindo a equação (3.3) na definição de H , e sabendo que $dr = dz$, a equação

Figura 32 – Gráficos da pressão e densidade atmosféricas para uma camada atmosférica em equilíbrio isotérmico com altura de escala constante.

(a) Gráfico da pressão p em função da altura z .



(b) Gráfico da densidade ρ em função da altura z .



Fonte: O autor.

hidrostática pode ser reescrita em termos de r da seguinte forma

$$\frac{dp}{dr} + \frac{m}{kT} \frac{GM_E}{r^2} p = 0, \quad (3.4)$$

cuja solução pode ser encontrada pelo método do fator integrante. De fato, definindo

$$P(r) = \frac{m}{kT} \frac{GM_E}{r^2},$$

obtem-se

$$\int P(r) dr = \frac{GmM_E}{kT} \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{GmM_E}{kT} \frac{1}{r}.$$

Assim, o fator integrante da equação (3.4) é dado por

$$\exp\left(\int P(r) dr\right) = \exp\left(-\frac{GmM_E}{kT} \frac{1}{r}\right). \quad (3.5)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.4) pela equação (3.5), chega-se em

$$\exp\left(-\frac{GmM_E}{kT} \frac{1}{r}\right) \frac{dp}{dr} + \frac{GmM_E}{kTr^2} \exp\left(-\frac{GmM_E}{kT} \frac{1}{r}\right) p = 0$$

ou

$$\frac{d}{dr} \left[p \exp\left(-\frac{GmM_E}{kT} \frac{1}{r}\right) \right] = 0. \quad (3.6)$$

Portanto, da equação (3.6) vem que

$$p = C \exp\left(\frac{GmM_E}{kT} \frac{1}{r}\right), \quad (3.7)$$

em que C é uma constante a ser determinada. Para isso, faça $p = p_0$ em $r = r_0$. Assim, a equação (3.7) é reescrita como

$$p = p_0 \exp \left[\frac{GmM_E}{kT} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Para escrever a equação (3.8) em termos de z , basta fazer $r = R_E + z$ e $r_0 = R_E$. Procedendo desta forma, tem-se que

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{m}{kT} g_0 \frac{zR_E}{R_E + z} \right], \quad (3.9)$$

de modo que

$$\rho = \rho_0 \exp \left[-\frac{m}{kT} g_0 \frac{zR_E}{R_E + z} \right]. \quad (3.10)$$

A fim de “absorver” a variabilidade de g com a altura, é bastante comum definir uma nova grandeza. Ela é chamada de altura geopotencial z^* . A definição de z^* envolve a função geopotencial Φ , que é dada por

$$\Phi(z) = \int_0^z g(z') dz'. \quad (3.11)$$

A função geopotencial corresponde ao trabalho realizado contra o campo gravitacional terrestre para elevar uma massa de 1 kg do nível do mar até uma altura z (CRAIG, 1965; RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Em $z = 0$ (nível do mar), tem-se $\Phi(0) = 0$. A altura geopotencial é definida igualando a equação (3.11) ao trabalho realizado para elevar a mesma massa unitária por uma altura z^* em um campo gravitacional uniforme g_0 , isto é,

$$g_0 z^* = \Phi(z). \quad (3.12)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.11), e isolando z^* na equação (3.12), resulta em

$$z^* = \int_0^z \frac{R_E^2}{(R_E + z')^2} dz' = \int_{R_E}^{R_E+z} \frac{R_E^2}{u^2} du = \frac{zR_E}{R_E + z}. \quad (3.13)$$

A equação (3.13) mostra que $z^* \approx z$ próximo à superfície terrestre, uma vez que $z \ll R_E$. Por fim, basta utilizar a equação (3.13) nas equações (3.9) e (3.10) para obter

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{mg_0}{kT} z^* \right],$$

e

$$\rho = \rho_0 \exp \left[-\frac{mg_0}{kT} z^* \right].$$

Essas equações apresentam uma estrutura muito semelhante à das equações (3.1) e (3.2), mas com a variabilidade de g embutida em z^* .

3.2.2 Camada Atmosférica com Taxa de Lapso Constante

Em uma camada atmosférica mais realista é preciso levar em conta a variação da temperatura T com a altura z . Em uma primeira aproximação, é bastante comum considerar que T decresce uniformemente com z a uma taxa de lapso $\Gamma > 0$. Noutros termos,

$$T = T_0 - \Gamma z, \quad (3.14)$$

em que T_0 é a temperatura na parte inferior da camada ($z = 0$). Substituindo a equação (3.14) na equação hidrostática chega-se em

$$\frac{dp}{dz} + \frac{mg}{k(T_0 - \Gamma z)}p = 0. \quad (3.15)$$

A solução da equação (3.15) pode ser encontrada pelo método do fator integrante. Definindo $P(z) = mg/[k(T_0 - \Gamma z)]$ obtém-se

$$\int P(z)dz = \frac{mg}{k} \int \frac{dz}{T_0 - \Gamma z} = \ln[(T_0 - \Gamma z)^{-mg/k\Gamma}]. \quad (3.16)$$

O fator integrante da equação (3.15) é obtido tomando a exponencial da equação (3.16). Assim,

$$\exp\left(\int P(z)dz\right) = (T_0 - \Gamma z)^{-mg/k\Gamma}. \quad (3.17)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.15) pela equação (3.17) resulta em

$$(T_0 - \Gamma z)^{-mg/k\Gamma} \frac{dp}{dz} - \frac{mg}{k\Gamma} (T_0 - \Gamma z)^{-mg/k\Gamma - 1} (-\Gamma)p = 0$$

ou

$$\frac{d}{dz} \left[(T_0 - \Gamma z)^{-mg/k\Gamma} p \right] = 0. \quad (3.18)$$

A equação (3.18) admite apenas uma solução constante C , de modo que

$$(T_0 - \Gamma z)^{-mg/k\Gamma} p = C \implies p = C(T_0 - \Gamma z)^{mg/k\Gamma}. \quad (3.19)$$

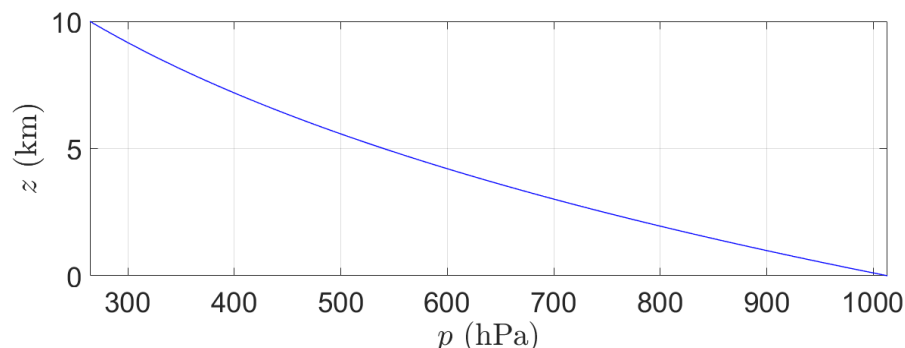
Assumindo que a pressão seja p_0 em $z = 0$, vem da equação (3.19) que

$$\begin{aligned} p &= p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{mg/k\Gamma} \\ &= p_0 \left(1 - \frac{\Gamma z}{T_0} \right)^{mg/k\Gamma} \end{aligned} \quad (3.20)$$

A equação (3.20) representa fielmente a dependência da pressão com a altura para a troposfera, com $p_0 = 101\,325$ Pa, $g = 9,81$ m \cdot s $^{-2}$, $T_0 = 288,15$ K, $m = 4,808 \times 10^{-26}$ kg e $\Gamma = 6,5$ K \cdot km $^{-1}$ (BERBERAN-SANTOS; BODUNOV; POGLIANI, 2010). A Figura 33

ilustra a variação pressão atmosférica com z considerando esses valores.

Figura 33 – Gráfico da pressão em função da altura (até 10 km) para uma camada atmosférica com taxa de lapso constante.



Fonte: O autor.

3.3 Ondas de Gravidade

A atmosfera neutra é capaz de suportar uma miríade de fenômenos ondulatórios, pois no geral ela pode ser considerada um fluido estratificado e estável, com exceção de uma fina camada próxima à superfície terrestre (NAPPO, 2013). A estratificação da atmosfera é resultado da ação do campo gravitacional. Ele causa a variação da densidade e da pressão com a altura e dificulta a ocorrência de movimentos verticais. Nesse sentido, é necessário dispendir energia para mover uma parcela de ar na vertical, seja este movimento contra ou a favor da gravidade (SUTHERLAND, 2010). Portanto, uma parcela de ar que se desloca na vertical estará sujeita a forças restauradoras que atuam na direção oposta ao deslocamento, tendo em vista o equilíbrio hidrostático da atmosfera. É nesse contexto que as ondas de gravidade (GWs, do inglês *Gravity Waves*) aparecem. O leitor não deve confundir as GWs com as ondas gravitacionais da teoria da relatividade geral, pois estas não têm nenhuma relação com fenômenos atmosféricos (BEER, 1972).

Além das GWs, a atmosfera neutra também suporta outros fenômenos ondulatórios, a saber: ondas acústicas (sonoras), marés atmosféricas e ondas planetárias (Rossby). As GWs estão de certa forma relacionadas às ondas acústicas, pois a gravidade também atua nas regiões de compressão e rarefação estabelecidas por elas. As regiões de compressão têm alta densidade e tendem a descer sob a ação da gravidade, enquanto as de rarefação têm baixa densidade e tendem a subir. Para altas frequências, este é um fenômeno que tem pouca consequência, mas que se torna cada vez mais importante à medida que a frequência é reduzida (HINES, 1972). É nesse ponto que as ondas começam a ser chamadas de GWs, visto que a natureza da oscilação muda abruptamente. No caso da atmosfera neutra, isso ocorre para frequências associadas a períodos entre 5 e 15 minutos. Dessa forma, há um meio termo entre ondas acústicas e de gravidade. Quando as

forças restauradoras devido a gravidade e a compressibilidade tornam-se comparáveis, as ondas resultantes são chamadas de AGWs (BEER, 1972; GODIN, 2012). O interesse nas AGWs vem crescendo continuamente, pois elas também são manifestações troposféricas e ionosféricas de terremotos e tsunamis. Assim, elas podem ser utilizadas no desenvolvimento de tecnologias para a detecção prévia e alerta de tsunamis.

Em termos simples, as GWs são originadas na atmosfera neutra quando uma parcela de ar perfaz um deslocamento adiabático para regiões com densidades diferentes. Quando uma parcela é deslocada para cima, ela se expande adiabaticamente e esfria em função do decréscimo de pressão, afundando logo em seguida devido a sua maior densidade. Em contrapartida, quando a parcela é deslocada para baixo ela se comprime adiabaticamente e aquece em função do aumento de pressão, subindo logo em seguida devido a sua menor densidade (BEER, 1972; AHRENS, 2011). Consequentemente, a gravidade e o empuxo⁵, coletivamente denominados de forças de fluatuabilidade, atuam como forças restauradoras fazendo com que a parcela de ar oscile em torno de sua posição de equilíbrio. Dessa forma, as GWs são oscilações transversais estabelecidas na atmosfera neutra em virtude das forças de fluatuabilidade que tentam restituir o equilíbrio hidrostático após uma perturbação, tendo em vista a estabilidade da atmosfera. Em menor medida, a viscosidade e outras forças também desempenham um papel importante (HUNSUCKER, 1987). Cabe ressaltar que as GWs recebem esse nome devido a relevância da gravidade para a sua existência (SUTHERLAND, 2010). Na realidade, sem a gravidade elas não existiriam.

A fim de tornar mais precisa a discussão sobre a oscilação de uma parcela de ar na atmosfera neutra, considere uma camada atmosférica em repouso onde a temperatura varia linearmente segundo a equação

$$T_a = T_0 - \gamma_a \delta z, \quad (3.21)$$

em que γ_a é a taxa de lapso do ambiente, T_0 é a temperatura em $z = z_0$ e $\delta z = z - z_0$ é o deslocamento relativo à altura z_0 . No interior dessa camada, suponha uma parcela de ar não saturada que esteja na altura z_0 e em equilíbrio com o ambiente ao seu redor. Assuma também que o movimento dessa parcela seja um processo adiabático, isto é, que ela não troque calor com o ambiente ao movimentar-se pela camada. A princípio, suponha que este movimento seja restrito à vertical, e que a temperatura da parcela varie linearmente segundo a equação

$$T_p = T_0 - \Gamma \delta z, \quad (3.22)$$

em que Γ é a taxa de lapso adiabática. Nesta discussão, as únicas forças que atuam na parcela de ar são as forças de fluatuabilidade (empuxo e gravidade). Dessa forma, ao aplicar

⁵ O empuxo é uma força vertical para cima exercida em uma parcela de ar em virtude da diferença de densidade entre a parcela e o ar circundante.

a segunda lei de Newton no movimento vertical da parcela de ar obtém-se

$$m_p \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -g(m_p - m_a), \quad (3.23)$$

em que m_p é a massa da parcela de ar, e m_a é a massa de ar deslocada pela parcela. Utilizando a densidade e o volume da parcela e do ambiente, as massas m_p e m_a podem ser escritas como

$$m_p = \rho_p v_p \quad (3.24)$$

e

$$m_a = \rho_a v_a, \quad (3.25)$$

em que ρ_p é a densidade referente ao volume v_p da parcela e ρ_a é a densidade referente ao volume v_a da massa de ar deslocada pela parcela. Supõe-se que estes volumes são iguais, ou seja, que $v_a = v_p$. Nessas condições, ao substituir as equações (3.24) e (3.25) na equação (3.23) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta z}{dt^2} &= -g \left(\frac{m_p - m_a}{m_p} \right) \\ &= -g \left(\frac{\rho_p v_p - \rho_a v_a}{\rho_p v_p} \right) \\ &= -g \left(\frac{\rho_p - \rho_a}{\rho_p} \right). \end{aligned} \quad v_a = v_p \quad (3.26)$$

Considere que a pressão da parcela de ar se ajuste instantaneamente, isto é, que a parcela assuma de modo instantâneo a pressão da altura na qual ela se encontra. Isso significa dizer que $p_a = p_p$ é válida em todas as alturas. Assim sendo, a equação (3.26) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta z}{dt^2} &= -g \left(\frac{\rho_p - \rho_a}{\rho_p} \right) \\ &= -g \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p} \right) \\ &= -g \left(1 - \frac{p_a}{RT_a} \frac{RT_p}{p_p} \right) && p = \rho RT \\ &= -g \left(1 - \frac{T_p p_a}{T_a p_p} \right) \\ &= -g \left(1 - \frac{T_p}{T_a} \right) && p_a = p_p \\ &= -g \left(\frac{T_a - T_p}{T_a} \right), \end{aligned}$$

donde

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -g \left(\frac{T_a - T_p}{T_a} \right). \quad (3.27)$$

A equação (3.27) ainda não está em sua forma final. O primeiro passo nesse sentido é escrever a diferença de temperatura no numerador em termos das taxas de lapso da parcela e do ambiente (Γ e γ_a , respectivamente). Isso pode ser feito por meio das equações (3.21) e (3.22). De fato,

$$T_a - T_p = (\Gamma - \gamma_a)\delta z. \quad (3.28)$$

Substituindo a equação (3.28) na equação (3.27) obtém-se

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -\frac{g}{T_a}(\Gamma - \gamma_a)\delta z \iff \frac{d^2\delta z}{dt^2} + \frac{g}{T_a}(\Gamma - \gamma_a)\delta z = 0. \quad (3.29)$$

Em geral, a equação (3.29) é escrita em termos da temperatura potencial θ de uma parcela de ar, posto que este é um parâmetro extremamente útil na termodinâmica atmosférica. A temperatura potencial de uma parcela de ar representa a temperatura que ela teria se fosse expandida ou comprimida adiabaticamente de seu estado corrente de pressão p_a e temperatura T_a para uma pressão padrão p_0 , que usualmente é 1000 hPa (WALLACE; HOBBS, 2006). Matematicamente, a temperatura potencial θ é expressa como

$$\theta = T_a \left(\frac{1000}{p_a} \right)^{R/c_p}, \quad (3.30)$$

em que c_p é o calor específico a pressão constante. Para escrever a equação (3.29) em termos de θ , é preciso aplicar o logaritmo natural em ambos os lados da equação (3.30), diferenciar o resultado em relação a z e assumir equilíbrio hidrostático. Procedendo desta forma, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{T_a} \frac{\partial T_a}{\partial z} - \frac{R}{c_p} \frac{1}{p_a} \frac{\partial p_a}{\partial z} \\ &= \frac{1}{T_a} \frac{\partial T_a}{\partial z} + \frac{\rho_a R}{p_a} \frac{g}{c_p} & \frac{\partial p_a}{\partial z} &= -\rho_a g \\ &= -\frac{1}{T_a} \gamma_a + \frac{\rho_a R}{p_a} \Gamma & \Gamma &= \frac{g}{c_p} \\ &= \frac{1}{T_a} (\Gamma - \gamma_a). & p_a &= \rho_a R T_a \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.31) na equação (3.29) chega-se em

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} + \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta z = 0$$

ou

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} + N^2 \delta z = 0, \quad (3.32)$$

em que

$$N = \sqrt{\frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}}. \quad (3.33)$$

A equação (3.32) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. A mesma do oscilador harmônico simples se N for real, isto é, quando $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$ se verificar. Nesse caso, a parcela de ar deve oscilar na vertical em torno de sua posição de equilíbrio, $z = z_0$, com frequência angular N . Ela é chamada de frequência de Brunt-Väisälä (NAPPO, 2013). Assim, a solução da equação (3.32) é dada por

$$\delta z(t) = A \cos(Nt) + B \sin(Nt), \quad (3.34)$$

em que A e B são coeficientes definidos pelas condições de contorno. Portanto, diz-se que a atmosfera é estratificada e estável quando $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$. Quando $\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$ (N imaginário), a equação que descreve o movimento da parcela de ar assume a forma

$$\delta z(t) = A \exp(-N_I t) + B \exp(N_I t), \quad (3.35)$$

em que $N_I = iN$. A equação (3.35) irá conter ao menos uma exponencial que cresce indefinidamente, fazendo com que a parcela de ar oscile com amplitudes cada vez maiores, caracterizando uma atmosfera instável. Em suma, o movimento ondulatório das parcelas de ar só é possível em atmosferas estratificadas e estáveis, sendo este o motivo pelo qual as GWs conseguem se desenvolver na atmosfera terrestre. É importante ressaltar que a frequência das GWs não precisa ser necessariamente igual à frequência de Brunt-Väisälä (NAPPO, 2013). A equação (3.23) está restrita a deslocamentos verticais da parcela de ar. No entanto, as GWs sempre se propagam em um ângulo com a vertical e, portanto, as parcelas de fluido serão deslocadas em um ângulo com a vertical. O leitor pode consultar Nappo (2013) para uma discussão desse caso.

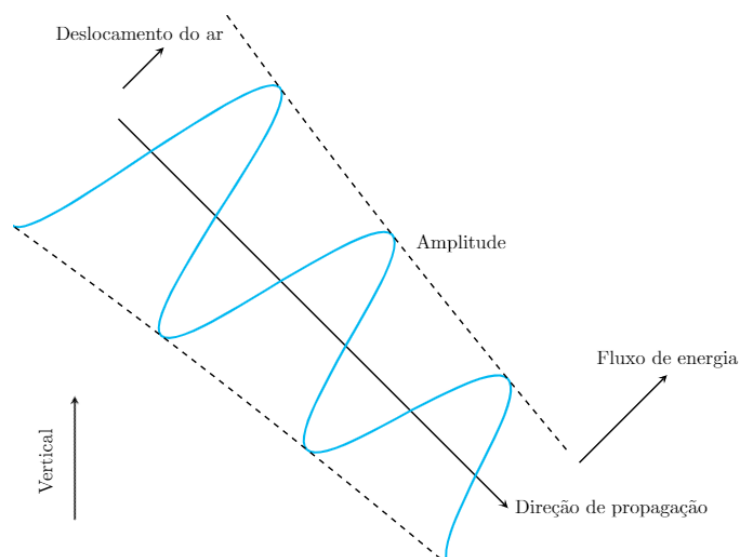
As GWs podem ser internas ou externas. O tipo mais comum de onda de gravidade externa se propaga horizontalmente ao longo da interface entre dois fluidos com densidades distintas. Por outro lado, as ondas de gravidade interna (IGWs, do inglês *Internal Gravity Waves*) são aquelas que se propagam (vertical e horizontalmente) no interior de um fluido cuja variação de densidade é contínua (DUNKERTON, 2015). As IGWs têm escalas espaciais que vão desde poucos quilômetros até centenas de quilômetros, enquanto suas escalas temporais estão na ordem de poucos minutos até várias horas (YIGIT; MEDVEDEV, 2015). As IGWs são as mais importantes na atmosfera. Elas transportam energia e momento da troposfera para a mesosfera e termosfera, atuando como um mecanismo de acoplamento entre as camadas atmosféricas (NAPPO, 2013). À medida que elas se propagam verticalmente para cima, a energia é transportada para regiões de baixa densidade, onde poucos constituintes neutros estão disponíveis para levar a energia adiante.

Dessa forma, as IGWs começam a oscilar com amplitudes cada vez maiores para compensar a diminuição de densidade, como ilustra a Figura 34 (HINES, 1972). Esse comportamento é muito semelhante ao que acontece com as ondas de um tsunami ao se aproximar das regiões costeiras. Em virtude do decréscimo de profundidade, suas amplitudes aumentam consideravelmente. O crescimento da amplitude não é indefinido, pois é cessado quando um nível crítico é atingido, onde verifica-se a transferência de energia e momento para o fluxo básico devido a quebra da maior parte das IGWs (BEER; TOLSTOY, 1975).

Há uma variedade de processos físicos que atuam como fontes geradoras de GWs. Usualmente, elas são geradas na baixa atmosfera por processos meteorológicos, tais como convecção troposférica (HOLTON; ALEXANDER, 1999), forçantes orográficas (HINDLEY et al., 2021), tempestades elétricas (CURRY; MURTY, 1974) e frontogêneses⁶ (GALL; WILLIAMS; CLARK, 1988). As fontes troposféricas das IGWs são importantes em todas as latitudes devido ao aumento exponencial de suas amplitudes quando se propagam de forma ascendente. Mesmo que as amplitudes sejam relativamente pequenas em suas regiões de origem, elas se tornam significativas em altitudes termosféricas (YIGIT; MEDVEDEV, 2015). As IGWs também podem ser geradas pela atividade auroral na termosfera polar (OYAMA et al., 2001). Em verdade, as IGWs são geradas e se fazem presentes em praticamente todas as regiões da atmosfera neutra (ŠAULI et al., 2006). Além das fontes supracitadas, é sabido que as IGWs podem ser geradas por terremotos e tsunamis (HUNSUCKER, 1987). De fato, Artru et al. (2005) foram os primeiros a observar a existência de um acoplamento entre GWs e tsunamis. Devido aos seus longos comprimentos de onda, as ondas de um tsunami são capazes de gerar GWs que se propagam

⁶ Frontogênese é o processo de formação ou intensificação de uma frente.

Figura 34 – À medida que as GWs se propagam na atmosfera, elas crescem em amplitude devido ao decréscimo exponencial da densidade atmosférica com a altura.



Fonte: Adaptado de Hargreaves (1992).

obliquamente para cima (ver Figura 35). Ao atingir altitudes ionosféricas, elas perturbam o plasma ionosférico e geram TIDs (ver seção 4.5) que se manifestam em dados de TEC obtidos a partir de sinais GPS. À vista disso, alguns estudos propõem a possibilidade de detecção de tsunamis por meio das assinaturas ionosféricas das GWs (PELTIER; HINES, 1976).

Figura 35 – Ilustração de um tsunami gerado em decorrência de um terremoto submarino. Um tsunami pode gerar GWs e AGWs que se propagam na atmosfera neutra. Suas amplitudes aumentam em virtude do decréscimo da densidade atmosférica com a altura. Analogamente, as ondas de Rayleigh de um terremoto causam deslocamentos verticais no solo que podem produzir ondas acústicas com amplitudes crescentes. Em todo caso, as ondas geram perturbações significativas no sistema ionosférico/termosférico.



Fonte: Klausner, Cezarini e Santos (2020).

4 IONOSFERA

A ionosfera é a região da atmosfera neutra que contém íons e elétrons livres em quantidades suficientes para afetar a propagação de ondas eletromagnéticas na porção de rádio do espectro eletromagnético (CRAIG, 1965). Na prática, isso significa que ela se estende de cerca de 60 até mais de 1000 km e engloba completamente a Terra (SCHUNK; NAGY, 2009). A descoberta da ionosfera ocorreu há cerca de um século quando experimentadores observaram que as ondas de rádio podem se propagar ao longo de grandes distâncias. Portanto, era necessário supor a existência de uma camada condutora de eletricidade na alta atmosfera que fosse capaz de refletir ondas de rádio. Apesar disso, a maior parte do conhecimento sobre os processos físicos e químicos que operam na ionosfera foi obtido durante a era espacial por meio de experimentos conduzidos a bordo de foguetes e satélites (CRAVENS, 1997).

A ionosfera é formada principalmente quando a componente mais energética do espectro solar, composta por raios X e radiação EUV, incide sobre o lado iluminado da Terra. Esses fótons energéticos ionizam a alta atmosfera e perdem energia no processo. À medida que o feixe de radiação penetra na atmosfera, sua intensidade é atenuada gradualmente deixando para trás uma camada de ionização (KELLEY, 2003). Parte dessa energia também é transformada em calor, resultando em um aumento da temperatura para valores muito superiores aos encontrados em qualquer parte da densa atmosfera abaixo. Além da fotoionização, em algumas regiões a ionização corpuscular causada pela precipitação de partículas magnetosféricas ou de raios cósmicos galácticos também pode ser importante (GOMBOSI, 1998). Finalmente, a recombinação remove os elétrons livres e transforma os íons em constituintes neutros novamente.

A redação do presente capítulo está estruturada da seguinte forma. A seção 4.1 apresenta algumas notas históricas a respeito do descobrimento da ionosfera que remontam ao século XIX. A seção 4.2 trata da formação da ionosfera. Ela discute os processos físicos de produção e destruição da ionização na atmosfera neutra, com ênfase na teoria de fotoionização formulada pelo geofísico britânico Sydney Chapman em 1931. Essa teoria é capaz de descrever o comportamento de uma camada ionosférica e suas variações ao longo do dia (ZOLESI; CANDER, 2014). A seção 4.3 apresenta as diferentes regiões da ionosfera e procura evidenciar suas principais características. A seção 4.4 discorre sobre o sistema de posicionamento global (GPS). Por fim, a seção 4.5 aborda os distúrbios ionosféricos propagantes (TIDs), que são assinaturas ionosféricas das GWs.

4.1 Notas Históricas

A primeira sugestão da existência de uma região condutora na alta atmosfera remonta ao início do século XIX e está relacionada com geomagnetismo. Em 1839, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) sugeriu que as variações do campo geomagnético observadas na superfície da Terra são causadas por correntes elétricas na atmosfera (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Essa sugestão aparece em seu trabalho intitulado *General Theory of Terrestrial Magnetism* publicado em Leipzig em 1839 (KAISER, 1962). Como relata Kaiser (1962), Gauss escreveu:

“Pode-se, de fato, duvidar se a sede das causas imediatas das mudanças regulares e irregulares que estão ocorrendo de hora em hora nesta força magnética terrestre não pode ser considerada como externa em referência à Terra. Outra parte da teoria sobre a qual pode existir dúvida é a suposição de que os agentes da força magnética terrestre estão situados exclusivamente no interior da Terra. Se procurarmos por suas causas imediatas, parcial ou totalmente, sem a Terra, e nos confinarmos em bases científicas conhecidas, nós poderemos apenas pensar em correntes galvânicas. Mas, a atmosfera não é condutora de tais correntes, tampouco o vácuo; portanto, ao buscar nas regiões superiores por um veículo de correntes galvânicas, iremos além de nosso conhecimento. Porém, nossa ignorância não nos dá o direito de negar a possibilidade de tais correntes; estamos proibidos de fazê-lo pelo fenômeno enigmático da Aurora Boreal, no qual é evidente que a eletricidade em movimento desempenha um papel principal.”

Em 1882, o físico escocês Balfour Stewart (1828-1887) propôs a hipótese de que as variações geomagnéticas diurnas são causadas por correntes elétricas fluindo em uma região condutora da alta atmosfera (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Ele sugeriu que essas correntes são causadas por movimentos periódicos da atmosfera neutra que, na presença do campo geomagnético, produzem campos elétricos e correntes elétricas. A sugestão de Stewart passou a ser conhecida como a teoria do dínamo (CRAIG, 1965). De acordo com sua teoria, o movimento do ar eletricamente condutor (\mathbf{U}) através do campo geomagnético (\mathbf{B}) produz forças eletromotrizes ($\mathbf{U} \times \mathbf{B}$) que geram campos elétricos e correntes elétricas. Essa é considerada a primeira indicação científica da ionosfera (YAMAZAKI; MAUTE, 2017). Ela precede em cerca de 20 anos a sugestão de uma ionosfera para explicar as transmissões de rádio e em cerca de 45 anos a descoberta oficial da ionosfera em estudos experimentais envolvendo ondas de rádio em meados dos anos 1920.

Em 1889, o físico alemão Arthur Schuster (1851-1934) foi o primeiro a dar especificidade e substância as inferências de Stewart sobre as correntes elétricas fluindo na alta atmosfera (EGAÑA, 2016). Schuster demonstrou que a localização das correntes respon-

sáveis pelas variações geomagnéticas diurnas é majoritariamente externa e parcialmente interna à Terra (SCHUSTER, 1889). Apesar disso, a origem e a natureza da condutividade e das correntes não pôde ser entendida até a descoberta dos elétrons e dos íons no final do século (RISHBETH, 1991). Já em 1908, como professor de física na Universidade de Manchester, Schuster forneceu uma forma matemática para a teoria do dínamo de Stewart. Ele estimou a condutividade da atmosfera que é necessária para explicar as variações geomagnéticas diurnas e argumentou que ela se deve a ionização da atmosfera causada pela radiação solar (SCHUSTER, 1908; YAMAZAKI; MAUTE, 2017).

Na verdade, o início do século XX marca o renascimento do interesse pela estrutura elétrica da alta atmosfera, tendo em vista o trabalho pioneiro do engenheiro italiano Guglielmo Marconi (1874-1937), conforme Figura 36a. Desde 1887, quando o físico alemão Heinrich Hertz (1857-1894) estabeleceu empiricamente a existência das ondas de rádio, muitos experimentadores passaram a investigar suas aplicações práticas (HAYKIN, 2009). Em 1894, Marconi tomou conhecimento dos trabalhos de Hertz sobre a produção de ondas eletromagnéticas. Iniciando em 1896, ele começou a demonstrar a radiotelegrafia sobre distâncias cada vez maiores. Em março de 1897, ele transmitiu sinais de código Morse ao longo de uma distância de 6 km na planície de Salisbury (GRIFFITHS, 2018). Em seguida, no mês de maio, ele realizou sua primeira transmissão através do mar, de Flat Holm, no canal de Bristol, até Lavernock Point, compreendendo a mesma distância. Em março de 1899, ele realizou a primeira transmissão através do canal da Mancha, de Wimereux, na França, até o farol de South Foreland. Nesse caso, a distância é de

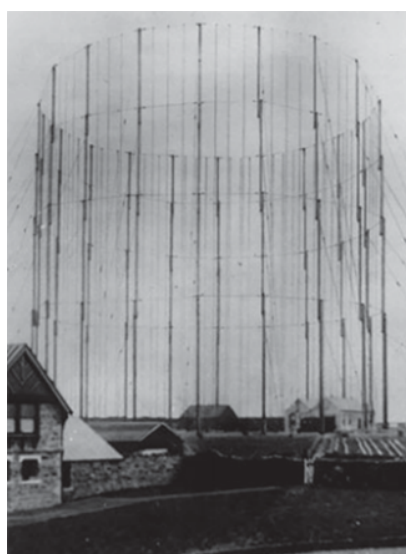
Figura 36 – A telegrafia sem fio é uma das maravilhas advindas da era das invenções no final do século XIX e início do século XX. Marconi foi uma figura de destaque em seu desenvolvimento.

(a) Guglielmo Marconi aos 34 anos de idade.



Fonte: Smulyan et al. (2017).

(b) A antena do transmissor em Poldhu.



Fonte: Griffiths (2018).

aproximadamente 45 km. Encorajado por seus experimentos bem-sucedidos, Marconi voltou sua atenção para um grande desafio, que era a transmissão de ondas de rádio ao longo de distâncias transatlânticas. No dia 12 de dezembro de 1901, ele realizou com êxito a primeira transmissão transatlântica via rádio de sinais telegráficos (GREEN, 1974). Os sinais foram transmitidos por J. A. Fleming (1849-1945) de Poldhu em Cornwall (Inglaterra) e recebidos em St. John's na Newfoundland (Canadá). Marconi contratou Fleming para atuar como consultor, o qual projetou e construiu tanto a antena quanto o transmissor em Poldhu, como ilustra a Figura 36b.

Os experimentos iniciais realizados por Marconi não desafiavam as ideias correntes da propagação retilínea de ondas eletromagnéticas (GREEN, 1974). Naquela época, os físicos argumentavam ser impossível a detecção, na superfície terrestre, de ondas de rádio fora da linha de visão entre um transmissor e um receptor, uma vez que elas se propagam em trajetórias retilíneas (DABAS, 2000). Esse fato não permitiria o uso de ondas eletromagnéticas para comunicação em longas distâncias, tendo em vista a curvatura da Terra. Porém, o feito de Marconi em 1901 envolvia uma distância transatlântica de cerca de 3500 km (GRIFFITHS, 2018). Claramente, algum mecanismo físico deveria estar presente, seja refração ou reflexão, para explicar o feito inesperado de Marconi.

A primeira hipótese razoável a ser publicada para explicar esse fenômeno, sugerindo a existência de uma camada condutora de eletricidade na alta atmosfera, é devida ao engenheiro americano A. E. Kennelly (1861-1939), ilustrado na Figura 37a, em um artigo de 1902 (GREEN, 1974). Em seu artigo, não há nenhuma menção quanto as especulações prévias dos geomagnetistas e lida especificamente com o problema apresentado pelos engenheiros de telecomunicações. Para estimar a altura da camada, Kennelly citou as medidas realizadas pelo físico britânico J. J. Thomson (1856-1940) da condutividade elétrica do ar em baixas pressões. Então, ele verificou que a atmosfera terrestre apresenta pressões semelhantes em uma altura próxima a 80 km. Portanto, ele deduziu que a atmosfera nessa altura deveria possuir uma condutividade cerca de 20 vezes maior que a das águas oceânicas. Em uma tradução livre, Kennelly (1902) relata:

“Para as ondas que são transmitidas por poucas milhas, o estrato condutor da alta atmosfera é pouco influente. Contudo, para as transmitidas ao longo de grandes distâncias, quando comparadas com 50 milhas, parece provável que elas possam encontrar uma superfície refletora no estrato rarefeito condutor do ar. Parece razoável inferir que as perturbações eletromagnéticas emitidas por uma antena espalham-se horizontalmente para fora, e também para cima, até que o estrato condutor da atmosfera seja encontrado, a partir do qual as ondas irão se mover horizontalmente em uma camada de 50 milhas entre as superfícies eletricamente refletoras do oceano abaixo e do ar rarefeito acima.”

Figura 37 – Em 1902, Arthur E. Kennelly nos Estados Unidos e Oliver Heaviside no Reino Unido propuseram, independentemente, a existência de uma camada refletora como um mecanismo para a propagação de ondas de rádio em torno da curvatura da Terra.

(a) Arthur E. Kennelly.



Fonte: [Brittain \(2010\)](#).

(b) Oliver Heaviside.



Fonte: [Brittain \(2010\)](#).

Pouco tempo depois, ainda em 1902, o engenheiro Oliver Heaviside (1850-1925), ilustrado na Figura 37b, postulou de forma independente a existência de uma camada condutora na atmosfera a fim de explicar as transmissões via rádio ([CRAIG, 1965](#); [GREEN, 1974](#)). Heaviside tinha sido incumbido de escrever sobre telegrafia na nova edição da *Encyclopaedia Britannica* que apareceria na América e na Inglaterra em 1902. Apesar do conteúdo tratar essencialmente da propagação de ondas em linhas de transmissão, há uma curta passagem na qual ele considera a propagação de ondas de rádio além da linha de visão. Como relata [Griffiths \(2018\)](#), Heaviside escreveu:

“Há algo similar na telegrafia sem fio. As águas oceânicas, embora transparentes à luz, têm condutividade suficiente para que se comportem como um condutor para as ondas Hertzianas, e o mesmo é verdade, embora de forma mais imperfeita, para a Terra. Portanto, as ondas se acomodam à superfície do mar da mesma forma que elas seguem os fios. As irregularidades causam confusão, sem dúvidas, mas as ondas principais são puxadas pela curvatura da Terra, e não saltam. Há outra consideração. Pode haver uma camada suficientemente condutora na alta atmosfera. Então, as ondas serão guiadas pelo mar de um lado e pela camada superior do outro.”

Na realidade, o primeiro manuscrito de Heaviside sobre a existência de uma camada

refletora foi uma carta não publicada que ele redigiu para o *The Electrician* (GRIFFITHS, 2018). Nessa carta, Heaviside se questionava se o sucesso recente de Marconi em enviar sinais telegráficos de Cornwall para Newfoundland não poderia ser explicado pela presença de uma camada superior condutora permanente na atmosfera. Essa explicação foi repetida posteriormente por Heaviside em seu artigo na *Encyclopaedia Britannica* em 1902 (ECCLES, 1927). Ao longo dos anos, a explicação de Heaviside foi gradualmente ganhando aprovação, até que, por volta de 1910, o físico britânico William Eccles (1875-1966) introduziu o termo “camada de Heaviside” para designar a porção da atmosfera que funciona de forma tão útil para os propósitos da telegrafia sem fio. Mais tarde, Russell (1925) argumentou que essa terminologia não é adequada. Ele escreveu:

“Todo engenheiro de telecomunicações é familiarizado com o que é chamado de ‘camada de Heaviside’ e suas supostas funções. Eu acho, contudo, que a hipótese de um estrato condutor de eletricidade na alta atmosfera foi claramente enunciada pelo professor A. E. Kennelly, da Universidade de Harvard, em um artigo publicado na *Electrical World and Engineer* de Nova York em 15 de março de 1902. A data oficial da divulgação da hipótese de Heaviside é 19 de dezembro de 1902. Se um nome deve ser atribuído a essa camada hipotética, ela deveria ser chamada, por equidade, de ‘camada de Kennelly-Heaviside’, um nome que está começando a ser utilizado na América.”

Assim sendo, Kennelly e Heaviside sugeriram, independentemente, que as ondas de rádio estavam sendo refletidas por cargas elétricas em uma camada condutora de eletricidade na atmosfera da Terra. J. E. Taylor em 1903 e Fleming em 1906 estavam entre os primeiros a sugerir que a radiação solar na porção UV do espectro era a fonte das cargas elétricas, implicando em um controle solar sobre a propagação das ondas de rádio (TAYLOR, 1903; RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Anos mais tarde, essa constatação veio a ser tratada com rigor por Chapman (1931a). Essas explicações não foram universalmente aceitas e o mito acadêmico de uma camada condutora continuaria a provocar controvérsia por mais vinte anos.

Depois dos experimentos de Marconi em 1901 e das hipóteses de Kennelly e Heaviside em 1902, provavelmente o próximo acontecimento significativo na história da ionosfera foi a publicação de Eccles, em 1912, sobre a teoria da refração de ondas de rádio em um meio ionizado (ECCLES, 1912; ROCHE, 1990). Ele mostrou teoricamente a maneira pela qual as ondas eletromagnéticas seriam refratadas em uma atmosfera contendo íons e sugeriu a existência, na atmosfera, de uma camada condutora de eletricidade que reflete as ondas em todas as frequências (BEYNON, 1969). O assunto foi abordado novamente por Larmor (1924), o qual forneceu uma explicação elementar da reflexão de ondas de rádio em regiões ionizadas (CRAIG, 1965).

Embora exista pouca referência direta à camada de Kennelly-Heaviside na literatura especializada entre 1902 e 1920, o uso das ondas de rádio para propósitos de comunicação aumentou consideravelmente. Além disso, havia um amplo suporte experimental para a hipótese de tal camada (BEYNON, 1969). No Reino Unido, em dezembro de 1924, o físico inglês E. V. Appleton (1892-1965), com a assistência do físico neozelandês M. A. F. Barnett (1901-1979), forneceu a primeira evidência empírica da existência de uma camada na alta atmosfera capaz de refletir e refratar ondas de rádio (APPLETON; BARNETT; LARMOR, 1925; APPLETON; BARNETT, 1925; ROCHE, 1990). Appleton, ilustrado na Figura 38, registrou e analisou sinais de rádio de um transmissor da BBC (do inglês *British Broadcasting Company*) localizado em Boumemouth. Variando a frequência do transmissor e estudando a interferência entre as ondas terrestres e celestes, Appleton determinou que a altura da camada de Kennelly-Heaviside era próxima de 100 km (BRITAIN, 2010).

No inverno de 1925, Appleton descobriu que, antes do amanhecer, a ionização da camada de Kennelly-Heaviside era reduzida por processos de recombinação. Ele verificou que a reflexão estava ocorrendo em uma camada superior com uma ionização muito maior, a uma altura próxima de 250 km (BEYNON, 1969). Appleton utilizou as letras E e F para designar o campo elétrico das ondas refletidas, respectivamente, pelas camadas de Kennelly-Heaviside e a superior recém descoberta. Mais tarde, ele nomeou as próprias camadas de E e F, apontando que qualquer uma que fosse descoberta abaixo da camada de Kennelly-Heaviside poderia ser rotulada com as letras A, B, C e D, com todas as outras letras do alfabeto disponíveis para rotular qualquer camada encontrada acima da camada F (SILBERSTEIN, 1959). Appleton mostrou a existência de uma região fracamente ionizada

Figura 38 – Um retrato informal de E. V. Appleton na Universidade de Edimburgo.



Fonte: Excell (1994).

abaixo da camada E, nomeada naturalmente por ele de camada D em 1927 (STUART, 2013). Pôde-se verificar também que a camada F apresenta uma tendência de se dividir em dois estratos que se sobrepõem, os quais foram chamados de camadas F_1 e F_2 . Nos Estados Unidos, em julho de 1925, o físico russo G. Breit (1899-1981) e o geofísico americano M. A. Tuve (1901-1982) confirmaram os resultados obtidos por Appleton (BRITTAIN, 2010). Eles utilizaram uma técnica diferente, com um transmissor projetado para gerar pulsos de radiofrequência com longos intervalos (BREIT; TUVE, 1925; BREIT; TUVE, 1926). O tempo mensurado entre um pulso transmitido e o eco recebido permitiu determinar precisamente a altura da camada de Kennelly-Heaviside.

Tendo em vista a importância econômica de uma camada condutora na alta atmosfera para comunicações de longa distância e seu grande interesse científico, uma quantidade considerável de trabalhos teóricos seguiram dessas descobertas experimentais iniciais (WAYNICK, 1974). À medida que essa nova área da ciência se desenvolvia, a necessidade por um padrão de nomenclatura aumentava. Nesse sentido, em uma carta de 8 de novembro de 1926, o físico britânico R. A. Watson-Watt (1892-1973) sugeriu o termo “ionosfera” para designar toda a região atmosférica ou regiões atmosféricas nas quais as partículas ionizadas são responsáveis pela ocorrência dos fenômenos (GILLMOR, 1976). Appleton também tinha sugerido esse termo na mesma época, pois em uma carta para J. A. Ratcliffe de 2 de novembro de 1926 ele escreveu:

“Para a parte ionizada da alta atmosfera, eu acho que os termos ionosfera e eletrosfera podem ser úteis. Qual você prefere?”

Apesar disso, o termo ionosfera começou a ser amplamente utilizado apenas no início da década de 30, quando diversos cientistas começaram a utilizá-lo no título de seus artigos publicados e em aulas (GILLMOR, 1976). O primeiro livro dedicado a ionosfera foi publicado em 1952 (SCHUNK; NAGY, 2009). A tecnologia de foguetes disponível no final da Segunda Guerra Mundial foi utilizada por cientistas para estudar a alta atmosfera e a ionosfera, pavimentando o caminho para a exploração espacial por meio de satélites.

4.2 Formação da Ionosfera

Em termos simples, a formação de uma ionosfera requer a presença de uma atmosfera neutra e de uma fonte de ionização para as espécies neutras que a compõem. As fontes de ionização incluem fótons e partículas energéticas carregadas precipitantes. O processo físico referente à primeira fonte de ionização é chamado de fotoionização, enquanto o da segunda é chamado de ionização corpuscular. Os fótons advêm majoritariamente do Sol, ao passo que as partículas ionizantes têm diferentes origens além desta última. Elas podem vir de uma galáxia (raios cósmicos galácticos), de uma magnetosfera ou da própria ionosfera se um processo de aceleração local de elétrons ou íons estiver presente (KIVELSON;

RUSSELL, 1995). É importante ressaltar que os elétrons energéticos que precipitam em uma atmosfera produzem fótons ionizantes adicionais em seu interior como consequência do efeito *bremsstrahlung*. A única requisição para que a ionização ocorra é que tanto a energia $h\nu$ dos fótons incidentes quanto a energia cinética das partículas energéticas precipitantes devem exceder o potencial de ionização das espécies neutras.

A formação de uma ionosfera é usualmente atribuída a uma mistura de várias fontes de ionização, porém uma geralmente domina. O corpo principal da ionosfera terrestre aparece em decorrência da fotoionização causada tanto pela radiação UV solar, principalmente em comprimentos de onda inferiores a 1026 Å, quanto por raios X, pelo menos em baixas e médias latitudes (RISHBETH; GARRIOTT, 1969; BANKS; KOCKARTS, 2013). Em altas latitudes, íons e elétrons são produzidos em virtude das colisões entre partículas energéticas carregadas e as espécies neutras da atmosfera (ionização corpuscular). Em 1931, Chapman introduziu uma teoria simples de fotoionização para o caso de uma radiação monocromática que incide sobre uma atmosfera de composição uniforme, cuja densidade varia exponencialmente com a altura (CHAPMAN, 1931a; CHAPMAN, 1931b; CRAIG, 1965). Ele deduziu uma expressão matemática capaz de prever a forma de uma camada ionosférica simples e de descrever a sua variação ao longo do dia (HARGREAVES, 1992). A teoria de Chapman é de suma importância para muitos modelos que descrevem o comportamento da ionosfera terrestre. Por esse motivo, ela será descrita em detalhes na subseção 4.2.1. A fotoionização e a ionização corpuscular são processos de produção de íons. Em contrapartida, tem-se os processos de perda de íons. A subseção 4.2.2 discute brevemente sobre esse assunto.

4.2.1 Produção de Íons: Fotoionização

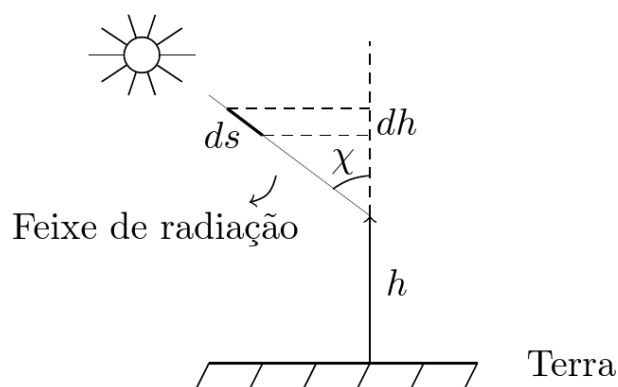
O primeiro passo para modelar uma ionosfera produzida em uma atmosfera neutra consiste em determinar o perfil de altitude da taxa de produção de íons, denotada pela letra q . A expressão analítica dessa taxa é chamada de função de produção de Chapman (HARGREAVES, 1992). No caso da fotoionização, a produção de íons envolve a transferência radiativa de fótons ao longo da atmosfera neutra. Este é um problema bastante complexo quando tratado de forma rigorosa, pois requer o conhecimento de todas as seções transversais de absorção de fótons e de alguma forma de rastrear os eventos de absorção que causam tanto a excitação de elétrons ligados quanto a remoção de fotoelétrons (KIVELSON; RUSSELL, 1995). Assim sendo, Chapman (1931a) e Chapman (1931b) abordaram uma versão idealizada desse problema ao considerar uma série de hipóteses simplificadoras no que diz respeito à atmosfera neutra e radiação incidente. São elas:

1. a atmosfera é composta por uma única espécie neutra distribuída exponencialmente e tem altura de escala $H = kT/mg$ constante;

2. a atmosfera é plana e horizontalmente estratificada, ou seja, não há variações no plano horizontal;
3. a radiação é monocromática, sendo absorvida em proporção à concentração da espécie neutra.

Tais hipóteses permitiram que [Chapman \(1931a\)](#) abordasse o problema da formação de uma ionosfera de forma analítica, resultando na teoria de Chapman. Sua teoria tem por propósito descrever a taxa de produção de íons, tanto em função da altura h quanto do ângulo zenital solar χ , assumindo que ela depende apenas da quantidade de energia radiativa absorvida e que os complexos detalhes de absorção da radiação estão “escondidos” em uma seção transversal de absorção σ ([KIVELSON; RUSSELL, 1995](#)). Em suma, o problema envolve a absorção de um feixe paralelo de radiação monocromática que incide em uma atmosfera de composição uniforme cuja densidade varia exponencialmente com a altura ([CRAIG, 1965](#)). Veja a Figura 39. Considere as seguintes grandezas físicas:

Figura 39 – Representação esquemática do cenário considerado por [Chapman \(1931a\)](#) para estudar a absorção da radiação monocromática em uma atmosfera neutra de composição uniforme distribuída exponencialmente.



Fonte: O autor.

$n(h)$ = concentração da espécie neutra (m^{-3});

$I(h, \chi)$ = intensidade da radiação ($\text{eV}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$);

σ = seção transversal de absorção (m^2);

$q(h, \chi)$ = taxa de produção de íons ($\text{elétrons}/\text{m}^3 \cdot \text{s}$);

η = eficiência de ionização ($\text{elétrons}/\text{eV}$).

É possível escrever q em termos dessas grandezas utilizando o seguinte raciocínio: é sabido que I representa a intensidade da radiação incidente e, por hipótese, que a atmosfera é composta por uma única espécie neutra com concentração n e seção transversal de absorção σ . Então, a energia total absorvida por unidade de volume e por unidade

de tempo é dada por σnI . Apesar disso, apenas uma parcela dessa energia é utilizada no processo de ionização, sendo necessário multiplicar a energia total pela eficiência de ionização η para levar esse fato em consideração (HARGREAVES, 1992). Dessa forma, a equação básica para a taxa de produção por unidade de volume é

$$q = \eta \sigma nI. \quad [\text{elétrons}/\text{m}^3 \cdot \text{s}] \quad (4.1)$$

À medida que a radiação se propaga na atmosfera, sua intensidade I é reduzida de seu valor inicial $I(\infty)$ fora dela. A redução da intensidade depende da concentração da espécie neutra ao longo do caminho percorrido pela radiação (RISHBETH; GARRIOTT, 1969). Assim, para um elemento ds do caminho da radiação, define-se um incremento da profundidade óptica τ (explanada mais adiante) por meio das equações

$$-\frac{dI}{I} = d\tau = \sigma n ds. \quad (4.2)$$

A equação (4.2) pode ser entendida da seguinte forma: o fator σnI representa a energia total absorvida por unidade de volume e por unidade de tempo. Conseqüentemente, o produto $(\sigma nI)ds$ é a porção dessa energia, por unidade de área e por unidade de tempo, absorvida ao longo de uma distância infinitesimal ds (ver Figura 39). Como a absorção da energia atenua a intensidade da radiação na mesma proporção (hipótese 3), vem que $-dI = (\sigma nI)ds$. O sinal de menos se deve ao simples fato de que qualquer absorção de energia ocorre a custa da intensidade da radiação. Substituindo a equação (4.2) na equação (4.1) obtém-se

$$q = -\eta \frac{dI}{ds},$$

a qual expressa o fato de que a taxa de produção é proporcional a taxa de atenuação da radiação (RISHBETH; GARRIOTT, 1969).

Para obter a variação da altura h ao longo do caminho s percorrido pela radiação, é preciso recorrer a geometria ilustrada na Figura 39. Além disso, é preciso observar que à medida que a radiação adentra na atmosfera, s aumenta à custa da diminuição de h . Portanto, tem-se que

$$dh = -ds \cos \chi \implies ds = -dh \sec \chi. \quad (4.3)$$

Substituindo equação (4.3) na equação (4.2) chega-se em

$$-\frac{dI}{I} = -\sigma n dh \sec \chi = d\tau \implies -\frac{d(\ln I)}{dh} = -\sigma n \sec \chi = \frac{d\tau}{dh}. \quad (4.4)$$

Integrando a equação (4.4) com respeito a altura e considerando que o intervalo de integração é dado pelo intervalo entre uma altura arbitrária na atmosfera até o topo (no

infinito), chega-se na seguinte expressão para a intensidade da radiação

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} = \sigma n dh' \sec \chi &\implies \int_h^\infty \frac{dI}{I} = \sigma \int_h^\infty n dh' \sec \chi \\ &\implies \ln \left[\frac{I(h, \chi)}{I(\infty)} \right] = -\tau(h, \chi) \\ &\implies I(h, \chi) = I(\infty) \exp[-\tau(h, \chi)], \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que $I(\infty)$ é a intensidade da radiação no topo da atmosfera e

$$\tau(h, \chi) = \sigma \int_h^\infty n dh' \sec \chi \quad (4.6)$$

é a definição matemática da profundidade óptica. Ela é o produto entre a seção transversal de absorção da espécie neutra e o número de partículas desta última em uma coluna de seção transversal unitária acima da altura h (HARGREAVES, 1992). Como é possível observar na equação (4.5), a profundidade óptica é uma grandeza que descreve o quanto a radiação incidente é absorvida pela atmosfera. Um valor elevado indica que a radiação é prontamente absorvida, enquanto um valor baixo indica que a radiação atravessa a atmosfera com pouca dificuldade. O fator $\sec \chi$ pôde ser colocado para fora da integral porque para uma Terra plana (hipótese 2) seu valor não varia ao longo do caminho percorrido pela radiação (RISHBETH; GARRIOTT, 1969).

Para avaliar a integral na equação (4.6) é conveniente introduzir a altura reduzida $z = \int_{h_0}^h dh'/H$, em que h_0 é uma altura arbitrária tal que $z = 0$. A princípio, suponha que a única grandeza física dependente da altura na expressão $H = kT/mg$ seja a temperatura T , ou seja, desconsidere a dependência da massa molecular m e da gravidade g com a altura. Assim, $H \propto T$. A hipótese de que H é constante (hipótese 1) será utilizada posteriormente. Além disso, considere a lei dos gases ideais $p = nkT$. Então, fazendo $h = h_0$ na equação (4.6) chega-se em

$$\begin{aligned} \tau(h_0, \chi) &= \sigma \int_{h_0}^\infty n dh' \sec \chi \\ &= \sigma \int_0^\infty n H dz \sec \chi && dz = dh'/H \text{ e } z = 0 \text{ para } h = h_0 \\ &= \sigma \frac{n(h_0)kT(h_0)}{mg} \int_0^\infty \frac{nT}{n(h_0)T(h_0)} dz \sec \chi && H = kT/(mg) \\ &= \sigma \frac{n(h_0)kT(h_0)}{mg} \int_0^\infty \exp(-z) dz \sec \chi && p/p(h_0) = \frac{nT}{n(h_0)T(h_0)} = \exp(-z) \\ &= \sigma n(h_0) \frac{kT(h_0)}{mg} \sec \chi \\ &= \sigma n(h_0) H(h_0) \sec \chi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como a altura h_0 é arbitrária, a equação (4.7) pode ser reescrita como

$$\tau(h, \chi) = \sigma n(h)H(h) \sec \chi. \quad (4.8)$$

Substituindo a equação (4.8) na equação (4.5) obtém-se

$$I(h, \chi) = I(\infty) \exp[-\sigma n(h)H(h) \sec \chi]. \quad (4.9)$$

Assim, a equação (4.1) se torna

$$\begin{aligned} q(h, \chi) &= I(\infty)\eta\sigma n(h) \exp[-\tau(h, \chi)] \\ &= I(\infty)\eta\sigma n(h) \exp[-\sigma n(h)H(h) \sec \chi]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Intuitivamente, sabe-se que a equação (4.10) deve apresentar um único valor máximo para algum h , pois depende da concentração da espécie neutra, que decresce com a altura, e da intensidade da radiação incidente, que cresce com a altura (KIVELSON; RUSSELL, 1995). A fim de determinar o valor máximo de q , é conveniente aplicar o logaritmo natural em ambos os lados da equação (4.10), diferenciar o resultado em relação a h e igualar tudo a zero. Dessa forma, tem-se que

$$\ln q = \ln [I(\infty)\eta\sigma n] - \tau \implies \frac{d(\ln q)}{dh} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} - \frac{d\tau}{dh},$$

donde

$$0 = \frac{d(\ln q)}{dh} \implies \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} = \frac{d\tau}{dh} \stackrel{(4.4)}{=} -\sigma n \sec \chi. \quad (4.11)$$

É possível simplificar a equação (4.11) utilizando a equação hidrostática, a lei dos gases ideais e o fato que $H \propto T$. Com efeito, note que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{H} &= \frac{1}{p} \frac{dp}{dh} && \text{equação hidrostática} \\ &= \frac{k}{p} \left(T \frac{dn}{dh} + n \frac{dT}{dh} \right) && p = nkT \\ &= \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dh} \\ &= \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} + \frac{1}{H} \frac{dH}{dh}. && dH/H = dT/T, \text{ pois } H \propto T \end{aligned} \quad (4.12)$$

Substituindo a equação (4.11) na equação (4.12) e multiplicando o resultado por H ,

verifica-se que o valor máximo de q ocorre na altura em que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{dH}{dh} &= -H(h) \frac{d\tau}{dh} \\ &= \sigma n(h) H(h) \sec \chi \\ &\stackrel{(4.8)}{=} \tau(h, \chi). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Defina $h_m(\chi)$ como a altura que satisfaz a equação (4.13) para o ângulo zenital solar χ . Então, tem-se que

$$1 + \Gamma(h_m(\chi)) = \sigma n(h_m(\chi)) H(h_m(\chi)) \sec \chi, \quad (4.14)$$

em que $\Gamma(h_m(\chi))$ denota dH/dh avaliada em $h = h_m(\chi)$. Da hipótese 1, sabe-se que a altura de escala é constante, de modo que $H(h) = H \forall h$ e $dH/dh = 0$. Isso significa que a atmosfera em questão é isotérmica e tem composição uniforme. Nesse caso, a concentração da espécie neutra é dada por

$$n(h) = n(h_m(0)) \exp \left[-\frac{(h - h_m(0))}{H} \right], \quad (4.15)$$

em que $h_m(0)$ é a altura da maior taxa de produção para $\chi = 0^\circ$. Então, substituindo a equação (4.15) na equação (4.14) obtém-se

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{h_m(\chi) - h_m(0)}{H} \right] &= \underbrace{\sigma n(h_m(0)) H \sec \chi}_1 \\ &= \sec \chi, \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{h_m(\chi) - h_m(0)}{H} = \ln(\sec \chi) \iff h_m(\chi) = h_m(0) + H \ln(\sec \chi) \quad (4.16)$$

é a altura onde ocorre a máxima taxa de produção para o ângulo zenital solar χ . Defina $q_m(\chi) = q(h_m(\chi), \chi)$ como a taxa de produção máxima para o ângulo χ . Então, da equação

(4.10) tem-se que

$$\begin{aligned}
 q_m(\chi) &= q(h_m(\chi), \chi) \\
 &= \eta I(\infty) \sigma n(h_m(\chi)) \exp \left[- \underbrace{\sigma n(h_m(\chi)) H \sec \chi}_1 \right] \\
 &= \frac{\eta I(\infty) \cos \chi}{H \exp(1)} \qquad \sigma n(h_m(\chi)) = (H \sec \chi)^{-1} \\
 &= q_m(0) \cos \chi, \qquad \qquad \qquad (4.17)
 \end{aligned}$$

com

$$q_m(0) = \frac{\eta I(\infty)}{H \exp(1)}.$$

A ênfase dada nas equações de $q_m(\chi)$ e $h_m(\chi)$ não é por acaso, pois a região de máxima taxa de produção é a mais observada em uma ionosfera (HARGREAVES, 1992). Substituindo a equação (4.15) na equação (4.10) chega-se em

$$\begin{aligned}
 q(h, \chi) &= I(\infty) \eta \sigma n(h_m(0)) \exp \left[- \frac{(h - h_m(0))}{H} \right] \exp \left[- \underbrace{\sigma n(h_m(0)) H}_1 \right] \\
 &\quad \cdot \exp \left[- \frac{(h - h_m(0))}{H} \right] \sec \chi \\
 &= \underbrace{I(\infty) \eta}_{q_m(0) H \exp(1)} \sigma n(h_m(0)) \exp \left[- \frac{(h - h_m(0))}{H} - \exp \left[- \frac{(h - h_m(0))}{H} \right] \sec \chi \right] \\
 &= q_m(0) \underbrace{\sigma n(h_m(0)) H}_1 \exp \left[1 - \frac{(h - h_m(0))}{H} - \exp \left[- \frac{(h - h_m(0))}{H} \right] \sec \chi \right] \\
 &= q_m(0) \exp \left[1 - \frac{(h - h_m(0))}{H} - \exp \left[- \frac{(h - h_m(0))}{H} \right] \sec \chi \right]. \qquad (4.18)
 \end{aligned}$$

A quantidade $(h - h_m(0))/H$ na equação (4.18) é a altura reduzida z para uma atmosfera com altura de escala constante. Dessa forma, tem-se que

$$q(z, \chi) = q_m(0) \exp [1 - z - \exp(-z) \sec \chi]. \qquad (4.19)$$

A equação (4.19) é chamada de função de produção de Chapman (KIVELSON; RUSSELL, 1995). Seja $z_1(\chi)$ a altura reduzida avaliada em $h = h_m(\chi)$. Então,

$$z_1(\chi) = (h_m(\chi) - h_m(0))/H \stackrel{(4.16)}{\implies} z_1(\chi) = \ln \sec \chi. \qquad (4.20)$$

Com a equação (4.20) pode-se reescrever a equação (4.19) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 q(z, \chi) &= q_m(0) \exp [1 - z - \exp(-z) \sec \chi] \\
 &= \underbrace{q_m(0) \cos \chi}_{q_m(\chi)} \exp [1 - (z - z_1(\chi)) - \exp[-(z - z_1(\chi))]] \quad \exp(z_1(\chi)) = \sec \chi \\
 &= q_m(\chi) \exp [1 - (z - z_1(\chi)) - \exp[-(z - z_1(\chi))]].
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

A equação (4.21) resalta o efeito do ângulo zenital solar χ na altura reduzida em que o valor máximo da taxa de produção ocorre. Para um dado valor de χ , ela é deslocada para $z = z_1(\chi)$. Esse comportamento pode ser observado na Figura 40, que ilustra o gráfico da equação (4.21) para valores discretos e crescentes de χ . Em contrapartida, a Figura 41 ilustra o gráfico tridimensional da equação (4.21) para valores contínuos e crescentes de χ no intervalo $[0, 90^\circ)$. Apesar da equação (4.21) ter sido obtida por meio de um número significativo de simplificações, ela expressa os fundamentos da formação de uma ionosfera e da absorção da radiação em qualquer atmosfera exponencial (HARGREAVES, 1992). Na realidade, a teoria de Chapman é o ponto de partida para qualquer estudo ionosférico. Ela tem sido utilizada, por exemplo, na interpretação de observações experimentais da ionosfera terrestre (CRAIG, 1965).

A equação (4.21) é obtida considerando que a Terra é plana, de modo que χ é constante ao longo de todo o caminho percorrido pelo feixe de radiação. Isso simplifica consideravelmente a obtenção da função de produção de Chapman. Infelizmente, para toda simplificação há um preço a ser pago. A equação obtida tem uma precisão suficientemente adequada para valores de χ até 85° , mas para ângulos superiores o erro se torna apreciável

Figura 40 – Gráfico da função de produção de Chapman para diferentes valores do ângulo zenital solar χ . À medida que χ aumenta, o valor máximo da taxa de produção decresce e a altura na qual ele ocorre é deslocada.

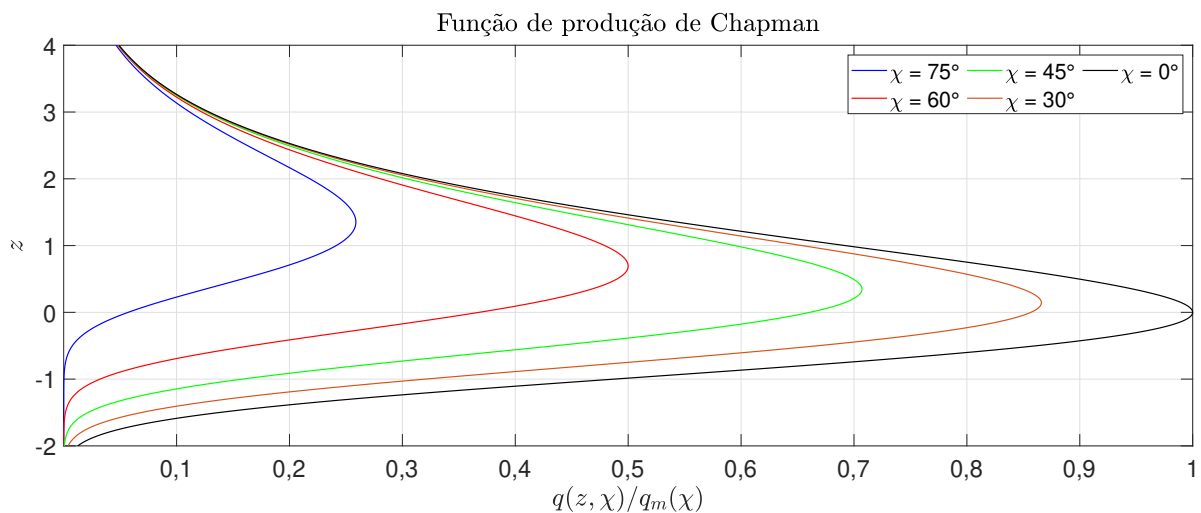
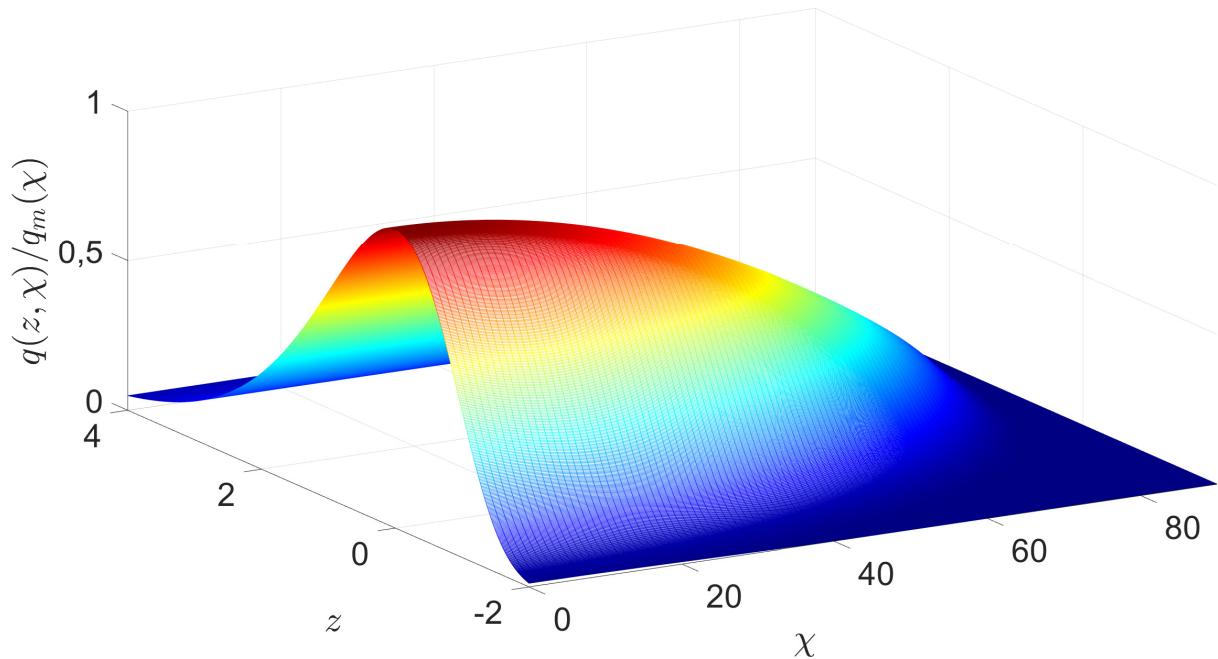


Figura 41 – Gráfico tridimensional da função de produção de Chapman. Conforme χ aumenta, o valor máximo da taxa de produção decresce, enquanto a altura onde ele ocorre é deslocada.



Fonte: O autor.

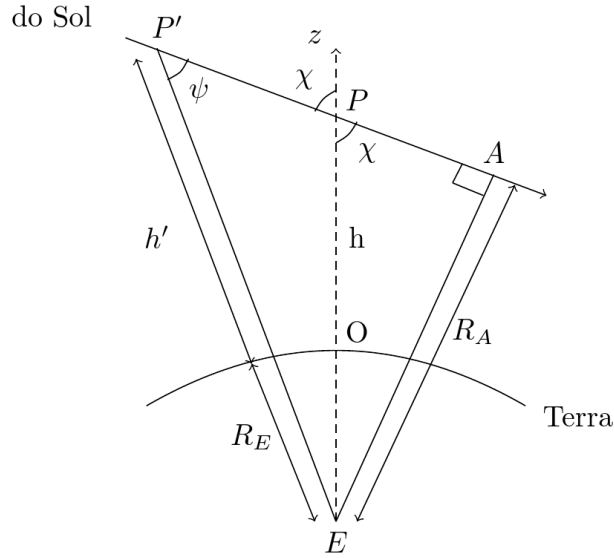
(CHAPMAN, 1931b). Nesse sentido, Chapman (1931b) teve que aprimorar o seu modelo tratar da absorção da radiação em um ângulo de incidência rasante. A Figura 42 ilustra a geometria do problema. O objetivo é calcular a intensidade da radiação I no ponto P a uma altura h acima do ponto O na superfície terrestre. Em P , o ângulo zenital solar é χ . Devido a esfericidade da Terra, o ângulo que o feixe de radiação faz com a vertical local varia conforme ele atravessa a atmosfera. Seja $\overrightarrow{P'P\hat{A}}$ a semirreta que representa o feixe de radiação oriundo do Sol, e seja P' um ponto arbitrário na semirreta à esquerda de P . O ponto P' está em uma altura h' acima da superfície terrestre e a uma distância $h' + R_E$ do centro da Terra, em que R_E é o raio da Terra. Em P' , o feixe faz um ângulo ψ com a vertical local. À medida que $P' \rightarrow P$ a partir do infinito, verifica-se que ψ varia continuamente de 0 até χ .

Seja s a distância ao longo do feixe de radiação mensurada em relação ao ponto A (origem), que é o ponto no feixe para o qual a linha advinda do centro da Terra é perpendicular ao feixe (ver Figura 42). Suponha que o ponto A esteja a uma distância R_A do centro da Terra. Com essa origem, s é negativo à esquerda de A e positivo à direita dele. Então, do triângulo retângulo $\triangle AEP'$ tem-se as seguintes relações

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{R_A}{R_E + h'} \implies R_A = (R_E + h') \operatorname{sen} \psi, \quad (4.22)$$

$$\cos \psi = \frac{-s(P')}{R_E + h'} \xrightarrow{(4.22)} s(P') = -R_A \cotg \psi, \quad (4.23)$$

Figura 42 – Geometria para o cômputo da função de incidência rasante de Chapman. O ponto P acima da superfície terrestre está exagerado em relação ao raio da Terra para propósitos ilustrativos.



Fonte: O autor.

em que $s(P')$ é o valor de s em P' . Analogamente, do triângulo retângulo $\triangle AEP$ tem-se que

$$\text{sen } \chi = \frac{R_A}{R_E + h} \implies R_A = (R_E + h) \text{sen } \chi. \quad (4.24)$$

A variação na intensidade da radiação causada pela absorção em uma distância ds é

$$dI = -(\sigma n I) ds.$$

Utilizando a equação (4.23) essa variação pode ser reescrita como

$$\frac{dI}{I} = -\sigma n R_A \text{cosec}^2 \psi d\psi. \quad (4.25)$$

Integrando a equação (4.25) de fora da atmosfera, onde a intensidade é $I(\infty)$ e $\psi = 0$, até o ponto P , onde a intensidade é $I(h, \chi)$ e $\psi = \chi$, chega-se em

$$\ln \left[\frac{I(h, \chi)}{I(\infty)} \right] = -\sigma R_A \int_0^\chi n \text{cosec}^2 \psi d\psi. \quad (4.26)$$

Assuma que a concentração da espécie neutra varia exponencialmente com a altura na vizinhança de P . Então,

$$\begin{aligned} n &= n(h) \exp[-(h' - h)/H] \\ &\stackrel{(4.22)}{=} n(h) \exp[(R_E - R_A \text{cosec } \psi + h)/H], \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que $n(h)$ é a concentração da espécie neutra na altura h . Substituindo a equação (4.27) na equação (4.26) obtém-se

$$I(h, \chi) = I(\infty) \exp \left[-\sigma R_A n(h) \int_0^\chi \operatorname{cosec}^2 \psi \exp[(R_E - R_A \operatorname{cosec} \psi + h)/H] d\psi \right]. \quad (4.28)$$

Defina $x = (h + R_E)/H$ e substitua R_A por $xH \operatorname{sen} \chi$ conforme equação (4.24). Assim,

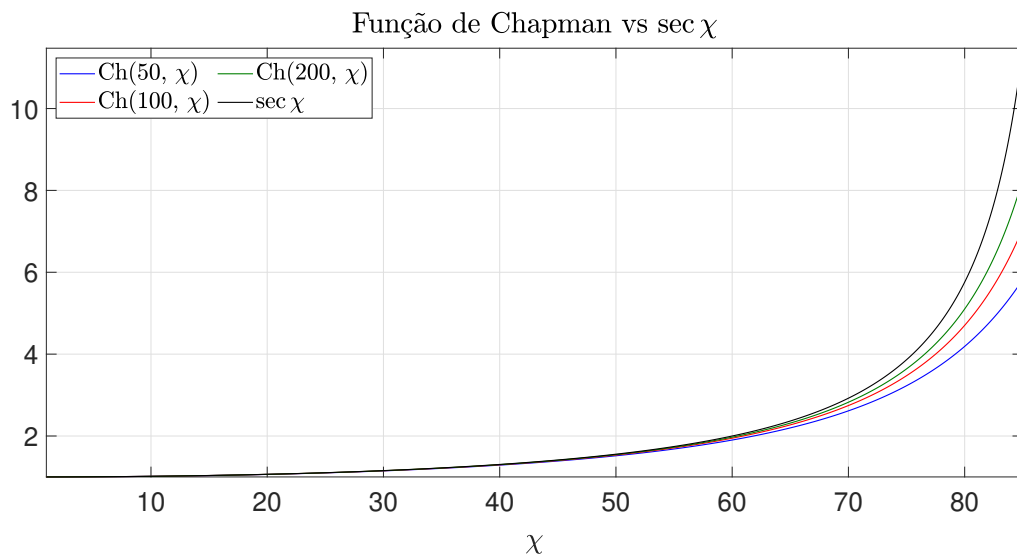
$$\begin{aligned} I(h, \chi) &= I(\infty) \exp \left[-\sigma n(h) H x \operatorname{sen} \chi \int_0^\chi \operatorname{cosec}^2 \psi \exp(x - x \operatorname{sen} \chi \operatorname{cosec} \psi) d\psi \right] \\ &= I(\infty) \exp[-\sigma n(h) H \operatorname{Ch}(x, \chi)], \end{aligned} \quad (4.29)$$

em que

$$\operatorname{Ch}(x, \chi) = x \operatorname{sen} \chi \int_0^\chi \operatorname{cosec}^2 \psi \exp(x - x \operatorname{sen} \chi \operatorname{cosec} \psi) d\psi \quad (4.30)$$

é conhecida como função de incidência rasante de Chapman. As equações (4.9) e (4.29) possuem a mesma estrutura, de modo que a esfericidade da Terra pode ser levada em consideração simplesmente substituindo o fator $\sec \chi$ por $\operatorname{Ch}(x, \chi)$. Essa é a abordagem adequada em cálculos que envolvem taxas de produção para ângulos zenitais solares elevados (CRAIG, 1965). A Figura 43 ilustra o gráfico da função $\operatorname{Ch}(x, \chi)$ para diferentes valores de x .

Figura 43 – Gráfico da função de incidência rasante de Chapman para valores diferentes de x . À medida que x aumenta, verifica-se que $\operatorname{Ch}(x, \chi)$ se aproxima de $\sec \chi$.

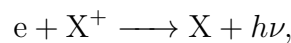


Fonte: O autor.

4.2.2 Perda de Íons: Recombinação

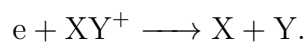
Determinar a taxa de produção de elétrons q é apenas o primeiro passo para obter uma expressão analítica para a densidade eletrônica em uma ionosfera. O próximo passo consiste em calcular a taxa em que os elétrons são removidos do volume em consideração, ou seja, a taxa de perda de elétrons L . Uma parcela dos elétrons é perdida por reações químicas envolvendo recombinações entre elétrons e íons que resultam em partículas neutras (HUNSUCKER; HARGREAVES, 2003). A outra parte é perdida por meio de mecanismos de transporte, pois em uma ionosfera realista íons e elétrons podem percorrer uma grande distância a partir da região em que foram gerados antes de se recombinarem (RUSSELL; LUHMANN; STRANGWAY, 2016). Os elétrons ionosféricos desaparecem em virtude de dois tipos de recombinação, a saber:

1. **Recombinação radiativa:** É o processo de recombinação no qual um íon atômico positivo se recombina com um elétron liberando energia na forma de fótons. Esse processo é representado pela seguinte equação



em que $h\nu$ denota a energia de um fóton que deve ser emitido para garantir a conservação de energia e momento (KELLEY, 2009).

2. **Recombinação dissociativa:** É o processo de recombinação no qual um íon molecular positivo se recombina com um elétron causando a sua dissociação. Esse processo é representado pela seguinte equação



As recombinações radiativa e dissociativa são as mais importantes em toda a ionosfera. Em particular, a recombinação radiativa é responsável por muitos tipos de luminescências atmosféricas observadas (KIVELSON; RUSSELL, 1995). Os elétrons ionosféricos também podem desaparecer em virtude da formação de íons negativos por meio do processo de junção eletrônica com as espécies neutras. Esse é um processo de perda que ocorre na baixa ionosfera (parte mais densa), visto que ele depende das colisões entre elétrons e átomos ou moléculas neutras. As recombinações ocorrem em taxas que dependem das densidades locais de íons e elétrons, isto é,

$$L = \alpha N_e N_i,$$

em que α é o coeficiente de recombinação, N_e a densidade de elétrons e N_i a densidade de íons.

É usual construir uma equação de continuidade cujos termos representam os efeitos dos vários processos (produção, perda e transporte) que alteram a densidade eletrônica N da ionosfera. Especificamente, essa equação é dada por

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q - L - \nabla \cdot (N\mathbf{v}),$$

em que q é a taxa de produção de elétrons, L é a taxa de perda de elétrons e $\nabla \cdot (N\mathbf{v})$ é o termo de transporte que representa a perda ou ganho de elétrons devido ao movimento destes com velocidade de deriva média \mathbf{v} (HUNSUCKER; HARGREAVES, 2003). O caso mais simples da equação de continuidade ocorre quando o termo de transporte e a variação temporal de N podem ser negligenciados (CRAIG, 1965). Isso resulta em um equilíbrio entre produção e perda de elétrons ($q = L$). Nesse contexto, caso o processo de perda seja recombinação dissociativa, tem-se $L = \alpha N^2$, de modo que

$$q = \alpha N^2 \implies N = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^{1/2}. \quad (4.31)$$

Assim, para obter a variação da densidade eletrônica com a altura e com o ângulo zenital solar, basta substituir a equação (4.19) na equação (4.31). Com efeito,

$$\begin{aligned} N(z, \chi) &= \underbrace{\left(\frac{q_m(0)}{\alpha}\right)^{1/2}}_{N_m(0)} \exp\left[\frac{1}{2}(1 - z - \exp(-z) \sec \chi)\right] \\ &= N_m(0) \exp\left[\frac{1}{2}(1 - z - \exp(-z) \sec \chi)\right], \end{aligned}$$

em que $N_m(0)$ é o valor máximo da densidade eletrônica para $\chi = 0^\circ$. A expressão deste valor para um ângulo χ não nulo é obtida substituindo a equação (4.21) na equação (4.31). Isso resulta em

$$N_m(\chi) = \left(\frac{q_m(\chi)}{\alpha}\right)^{1/2} = \left(\frac{q_m(0)}{\alpha}\right)^{1/2} \cos^{1/2} \chi = N_m(0) \cos^{1/2} \chi.$$

Uma camada ionosférica com as características supracitadas é chamada de camada α -Chapman.

4.3 Estrutura da Ionosfera

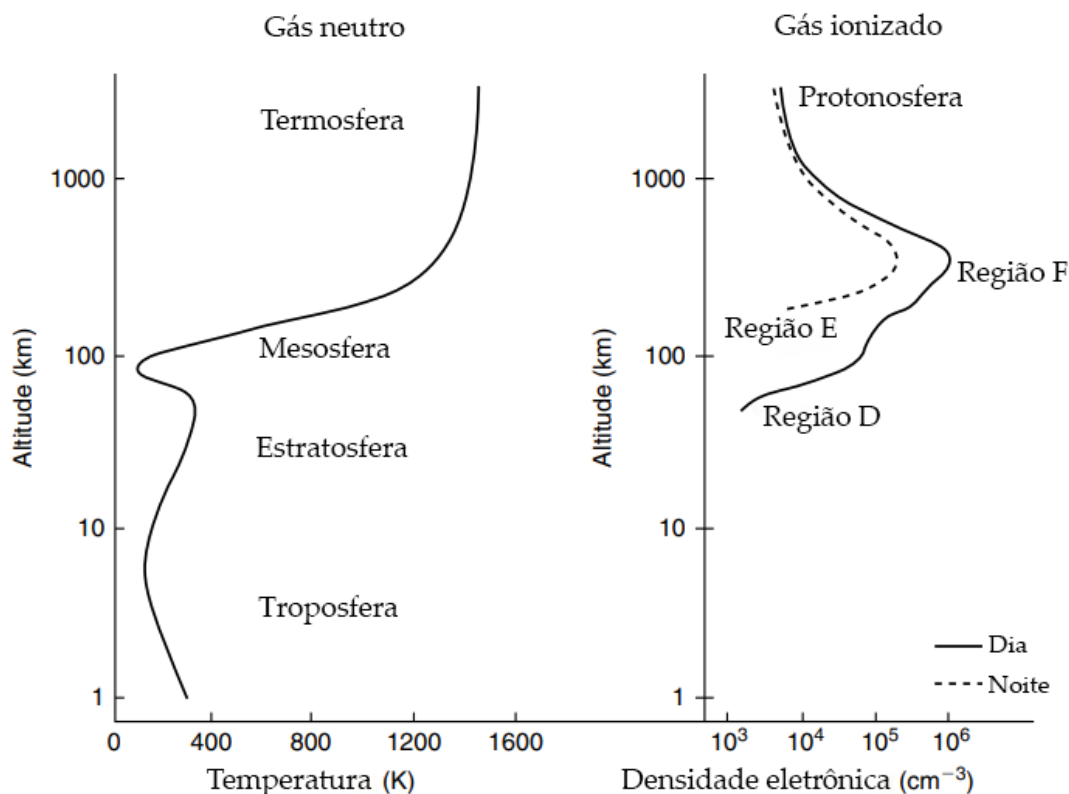
Os primeiros estudos envolvendo a ionosfera (ver seção 4.1) indicaram a presença de camadas específicas em seu interior. Elas foram nomeadas em ordem crescente de altitude pelas letras D, E e F, sendo esta última subdivida em F_1 e F_2 , de acordo com a nomenclatura introduzida por Appleton (SILBERSTEIN, 1959). Nesse sentido, costumava-se pensar que a ionosfera tinha uma estrutura em camadas, com máximos distintos de densidade eletrônica

ocorrendo em cada uma delas. Na verdade, observações realizadas com foguetes revelaram que não é bem assim, pois a densidade eletrônica aumenta monotonicamente desde os níveis mais baixos até o pico da camada F_2 a uma altura próxima de 300 km (CRAIG, 1965). Dessa forma, a comunidade científica prefere o uso do termo “região” em vez de “camada”, pois ele não transmite a impressão incorreta de que existem descontinuidades nítidas na densidade eletrônica em limites inferiores e superiores bem definidos (CAMPBELL, 2003; GOODMAN, 2005). A Figura 44 ilustra o perfis verticais típicos de média latitude da temperatura da atmosfera neutra e da densidade eletrônica da ionosfera, onde é possível discernir suas diferentes regiões.

Em termos qualitativos, a existência de diferentes regiões ionosféricas pode ser explicada da seguinte forma. Em grandes altitudes, a radiação solar que causa a ionização da atmosfera neutra é bastante intensa. Apesar disso, a densidade atmosférica nesse intervalo de altitudes não é suficiente para desenvolver níveis significativos de ionização. Isso resulta em uma baixa densidade eletrônica (COLLIN, 1985). Em altitudes intermediárias, a densidade atmosférica é muito maior a ponto de um máximo de densidade eletrônica ocorrer. Por fim, em baixas altitudes a maior parte da radiação já foi absorvida, de modo que a densidade eletrônica se torna novamente baixa. Além disso, nessas altitudes a densidade atmosférica é tão alta que as reações de recombinação predominam sobre as de dissociação, garantindo que os níveis de ionização permaneçam baixos (RICHARDS, 2008). Portanto, é de se esperar que a ionosfera compreenda um intervalo intermediário de altitudes no interior da atmosfera neutra. Uma vez que a atmosfera é composta por diferentes espécies neutras com características de ionização e recombinação diferentes, várias regiões com características próprias de densidade eletrônica se desenvolvem ao longo da ionosfera.

A região mais baixa da ionosfera, a região D, se estende de 60 até cerca de 90 km. Ela é a parte mais complexa da ionosfera do ponto de vista químico. Em primeiro lugar, a relativa alta pressão nessa região faz com que tanto os constituintes minoritários quanto os majoritários sejam importantes nas reações fotoquímicas. Em segundo lugar, diferentes fontes de ionização contribuem significativamente para a produção de íons (HARGREAVES, 1992). Entre 80 e 90 km, os raios X solares com comprimentos de onda no intervalo 0,1-1 nm constituem a principal fonte de ionização, ionizando todos os constituintes, sobretudo o oxigênio e o nitrogênio moleculares (O_2 e N_2). A radiação solar Lyman- α (121,6 nm) adquire o seu máximo de produção de íons entre 70 e 80 km, ionizando o óxido nítrico (NO). Abaixo de 70 km, na porção mais baixa da região D, os raios cósmicos galáticos constituem a principal fonte de ionização por meio da ionização corpuscular (BANKS; KOCKARTS, 2013). Os íons predominantes, NO^+ e O_2^+ , podem se recombinar com os elétrons, mas nessas altitudes os elétrons também podem interagir com os constituintes neutros por meio do processo de junção eletrônica para formar íons negativos (KIVELSON; RUSSELL,

Figura 44 – Perfis verticais típicos em média latitude da temperatura da atmosfera neutra e da densidade eletrônica do plasma ionosférico (diurno e noturno).



Fonte: Adaptado de Kelley (2009).

1995). A região D desaparece¹ durante a noite à medida que os processos de produção de íons são mitigados e os de perda, na forma de recombinação e junção eletrônica, começam a predominar em virtude da alta densidade atmosférica (PETROPOULOS; SRIVASTAVA, 2021). Embora a ionização da região D seja baixa em comparação com as regiões E e F, ela tem um enorme efeito sobre as ondas de rádio.

A energia eletromagnética das ondas de rádio que se propagam na ionosfera é transmitida aos elétrons livres, os quais começam a vibrar em consequência disso. Esses elétrons vibrantes ocasionalmente colidem com os constituintes neutros, transferindo energia no processo. A energia extraída por esses elétrons e perdida nas colisões subsequentes depende da probabilidade de colisão, da quantidade de energia perdida por colisão e do número de elétrons (YADAVA, 2011). Em particular, a probabilidade de colisão entre um elétron e um constituinte neutro depende da pressão atmosférica. Quanto maior for a pressão em uma região atmosférica, maior será a absorção de energia sofrida por uma onda de rádio se propagando nela. Essa é a razão pela qual a maior parte da energia perdida pelas ondas de rádio se propagando na ionosfera ocorre na região D e na porção mais baixa da região E. Nas outras regiões, a pressão atmosférica não é suficiente para causar

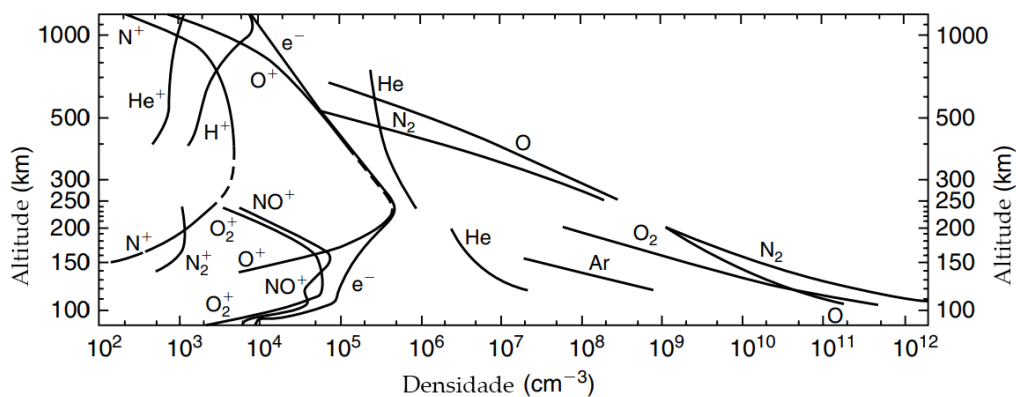
¹ Na verdade, há ainda alguma ionização remanescente. As taxas de recombinação não são suficientemente rápidas para esgotar completamente a ionização.

perdas significativas de energia.

A quantidade de energia perdida por colisão depende da velocidade que os elétrons adquirem quando começam a vibrar. Essa velocidade é proporcional a intensidade do campo elétrico e inversamente proporcional a frequência das ondas de rádio. Assim, a absorção aumenta à medida que a frequência decresce. É por esse motivo que as ondas de rádio de alta frequência não desempenham um papel tão importante nas colisões quanto as de baixa frequência. Em suma, a elevada pressão atmosférica na região D resulta em uma alta frequência de colisões entre elétrons e constituintes neutros. Assim, essa região atua como um absorvedor de ondas de rádio e, do ponto de vista da telecomunicação, uma das regiões mais importantes da ionosfera (BOURDEAU, 1965). Na verdade, há muitos fenômenos que enriquecem a abundância de elétrons na região D, os quais atenuam fortemente as ondas eletromagnéticas a ponto de produzir blecautes em ondas de rádio. Os raios X solares associados a explosões solares desempenham um papel importante nesses distúrbios ionosféricos súbitos.

A região E compreende o intervalo de altitudes entre 90 e 150 km. Ela é usualmente identificada como uma mudança na inclinação do perfil vertical diurno da densidade eletrônica, que ocorre próximo a 110 km (KIVELSON; RUSSELL, 1995). Nessa região, os íons O_2^+ e NO^+ são os íons majoritários (ver Figura 45), os quais são produzidos pela radiação UV no intervalo 100 – 150 nm e por raios X solares no intervalo 1 – 10 nm. A região E não desaparece durante a noite, tendo em vista a baixa taxa de recombinação em comparação com a região D, mas permanece fracamente ionizada (RICHARDS, 2008). Além disso, na região E verifica-se a ocorrência de uma camada esporádica de natureza irregular, a camada E_s . Tal camada está usualmente situada entre 90 e 120 km de altitude, pode durar de minutos até várias horas e apresenta densidades eletrônicas e iônicas bem

Figura 45 – Composição da ionosfera diurna e da atmosfera neutra com base em medições obtidas com espectrômetros de massa durante os Anos Internacionais de Sol Calmo (IQSY, do inglês *International Quiet Solar Years*).

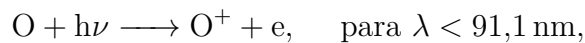


Fonte: Adaptado de Kelley (2009).

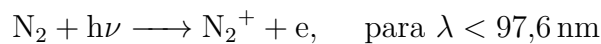
acima dos valores usuais (BOURDEAU, 1965; PETROPOULOS; SRIVASTAVA, 2021). Um dos efeitos de sua presença é a reflexão das ondas de rádio com frequências anormalmente altas. Os mecanismos de formação da camada E_s têm sido estudados desde meados do século XX (SHINAGAWA et al., 2017). Eles sugerem que a camada E_s é formada quando os íons metálicos de origem meteórica são reunidos em uma camada estreita devido ao cisalhamento vertical dos ventos neutros na baixa termosfera.

A região E é frequentemente chamada de região do dínamo ionosférico, visto que campos elétricos e correntes elétricas são gerados nessa região por conta do movimento da atmosfera neutra através do campo geomagnético. Especificamente, nessa região a frequência de colisão entre íons e neutros é da ordem ou superior a girofrequência dos íons, enquanto a frequência de colisão entre elétrons e neutros é muito menor que a girofrequência dos elétrons (YAMAZAKI; MAUTE, 2017). Isso significa que os íons estão acoplados aos ventos neutros, ao passo que os elétrons estão congelados nas linhas de campo magnético. Dessa forma, o movimento em massa do plasma é impulsionado pelas colisões entre íons e neutros. O fluxo de plasma gera um campo elétrico $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$, em que \mathbf{V} é a velocidade do fluxo de plasma e \mathbf{B} é o campo geomagnético. Então, um campo magnético \mathbf{b} é gerado de acordo com a lei de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$. Por conseguinte, esse campo magnético é relacionado a uma densidade de corrente \mathbf{J} por meio da lei de Ampère $\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{J}$, em que μ_0 é a permeabilidade do vácuo. As correntes elétricas que fluem na região E constituem a principal fonte das variações geomagnéticas diurnas.

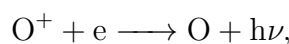
A região F é a maior parte da ionosfera e se estende de 140 até 500 km, sendo usualmente subdividida nas regiões F₁ e F₂. Além dos processos de ionização e recombinação, essa região está sob o efeito do transporte de partículas e do campo geomagnético. A região F₁ abrange o intervalo de altitudes entre 140 e 200 km. A radiação ionizante nessa região está na porção EUV do espectro eletromagnético, em comprimentos de onda inferiores a 91 nm (GOMBOSI, 1998). Ela é basicamente absorvida nessa região e não consegue penetrar na região E. O principal íon formado na região F₁ é o O⁺, por meio do seguinte processo



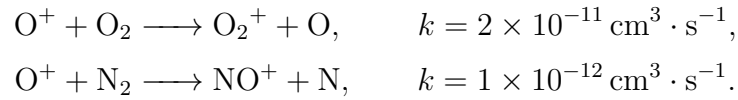
com alguma contribuição de N₂⁺ produzido de forma análoga



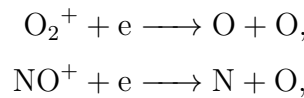
(TASCIONE, 2010). A densidade eletrônica máxima da região F₁ ocorre por volta de 170 km, que é o nível de máxima produção de íons por fótons no intervalo espectral de 17 a 91 nm (KIVELSON; RUSSELL, 1995). Na região F₁, os íons de oxigênio devem transferir suas cargas para certas moléculas antes de se recombinarem, pois a recombinação radiativa



a uma taxa $k = 3 \times 10^{-12} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, é extremamente lenta. Em contrapartida, a recombinação dissociativa molecular tem taxas relativamente rápidas nessas altitudes. Assim sendo, na região F_1 acredita-se que as recombinações ocorrem por meio de um mecanismo composto por duas etapas. A primeira etapa corresponde a uma troca de carga entre íons e átomos,



Por conseguinte, a segunda etapa corresponde ao processo de recombinação dissociativa dos íons moleculares resultantes,



a uma taxa $k = 3 \times 10^{-7} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Na porção mais baixa da região F_1 , em torno de 140 km, o tempo de vida do íon O^+ é bastante curto, na ordem de poucos segundos, de modo que o íon molecular NO^+ se torna dominante (ver Figura 45). Acima de 180 km, o íon O^+ rapidamente assume o controle e se torna o íon majoritário. Durante o período noturno, a ionização remanescente da região F_1 se funde com a região F_2 (PETROPOULOS; SRIVASTAVA, 2021).

Na região F_2 , que se estende de 200 até 500 km, o íon majoritário também é o O^+ . O valor máximo da densidade eletrônica nessa região ocorre em uma altitude variável entre 200 e 400 km, podendo assumir valores tão elevados quanto $1 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$ próximo ao meio dia (KELLEY, 2009). Tanto a altitude quanto a intensidade da densidade eletrônica máxima são dependentes do tempo, da latitude geomagnética e das condições do clima espacial. A perda de elétrons na região F_2 é controlada pela reação dos íons O^+ com o nitrogênio molecular (N_2), bem como pela subsequente recombinação rápida dos íons NO^+ resultantes com os elétrons. A morosidade desse mecanismo de duas etapas explica parcialmente a persistência da região F durante o período noturno (BOURDEAU, 1965). À medida que a densidade dos constituintes neutros decresce acima do valor máximo de densidade eletrônica da região F_2 , a importância dos processos fotoquímicos é reduzida, dando espaço para os processos de transporte de carga. Eles se tornam dominantes e provocam a observada diminuição da densidade eletrônica com a altitude. O topo da ionosfera é geralmente definido como sendo a região acima do máximo de densidade eletrônica da região F, enquanto a protonosfera é a região onde os íons atômicos leves H^+ e He^+ dominam (SCHUNK; NAGY, 2009). Vale destacar que alguns estudos indicam a existência de uma região F_3 (BALAN; BAILEY, 1995; ZAIN et al., 2006; BALAN et al., 2008).

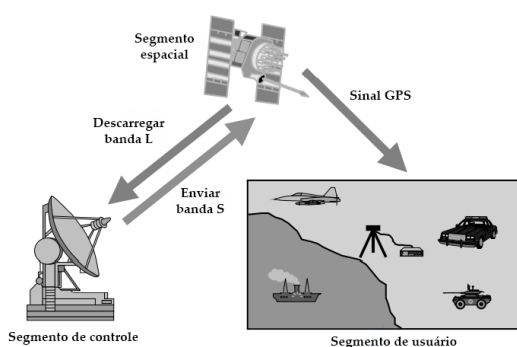
4.4 Sistema de Posicionamento Global

O termo genérico GNSS (do inglês *Global Navigation Satellite System*) é utilizado para descrever os sistemas de navegação por satélite que fornecem posição, velocidade e tempo de forma contínua e precisa, em qualquer lugar do mundo e sob quaisquer condições meteorológicas (KAPLAN; HEGARTY, 2017; ELMUNIM; ABDULLAH, 2021). O sistema de posicionamento global (GPS) era o GNSS original e ainda é o mais utilizado ao redor do mundo, tendo em vista a existência de outros GNSSs desenvolvidos posteriormente. Nomeadamente, tem-se o GLONASS (Rússia), o GALILEO (União Europeia) e o BeiDou (China). O GPS foi desenvolvido em 1973 pelo departamento de defesa dos Estados Unidos para fins militares, atingindo sua capacidade operacional completa somente em julho de 1995 (EL-RABBANY, 2002). O propósito era determinar de forma precisa a localização de soldados, veículos militares, navios e aeronaves ao redor do mundo. Mais tarde, o congresso americano, sob orientação do presidente, orientou o departamento de defesa a promover o uso civil do GPS (HOFMANN-WELLENHOF; LICHTENEGGER; COLLINS, 2001). Desde então, ele tem sido aplicado em diversos contextos. Por exemplo, no meio científico o GPS desempenha um papel importante em ciências atmosféricas e terrestres, assim como em sensoriamento remoto. No meio comercial, o GPS é utilizado para o posicionamento e navegação de barcos, aviões e carros.

O GPS é composto por três segmentos, a saber: segmento espacial, segmento de controle e segmento de usuário, os quais estão ilustrados na Figura 46a. O segmento espacial é constituído por uma constelação de 24 satélites posicionados em 6 planos

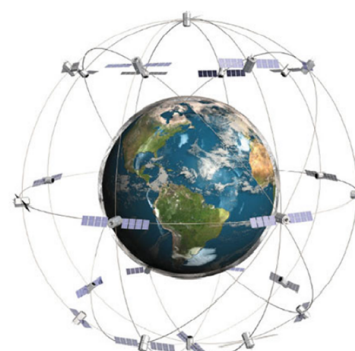
Figura 46 – O GPS consiste de três segmentos, a saber: segmento espacial, segmento de controle e segmento de usuário. O segmento espacial é formado por uma constelação de 24 satélites distribuídos em 6 planos orbitais (4 satélites em cada plano), enquanto o segmento de controle é constituído por várias estações em terra que monitoram e controlam a constelação de satélites. Por fim, o segmento de usuário é composto por receptores GPS que processam os sinais GPS a fim de determinar suas respectivas localizações.

(a) Representação esquemática dos segmentos que constituem o GPS.



Fonte: Adaptado de El-Rabbany (2002).

(b) Ilustração da constelação de satélites do segmento espacial.



Fonte: Elmunim e Abdullah (2021).

orbitais centrados na Terra, com 4 satélites em cada plano. As órbitas dos satélites são aproximadamente circulares e apresentam um ângulo de inclinação próximo de 55° em relação ao equador (ELMUNIM; ABDULLAH, 2021). Os satélites orbitam a Terra em uma altitude por volta de 20 200 km e possuem um período orbital de aproximadamente 12 horas siderais (KAPLAN; HEGARTY, 2017). Com a constelação completa, o segmento espacial oferece no mínimo quatro satélites posicionados de forma adequada durante as 24 h do dia em qualquer lugar da Terra (HOFMANN-WELLENHOF; LICHTENEGGER; COLLINS, 2001). A principal tarefa do segmento espacial é transmitir sinais e informações aos usuários em frequências da banda L, que é a designação dada pela IEEE (do inglês *Institute of Electrical and Electronics Engineers*) para o intervalo de frequências entre 1 e 2 GHz. Esse segmento fornece uma plataforma estável e uma órbita para transmissores banda L. Vale destacar que o GPS é um sistema passivo, ou seja, os usuários apenas recebem os sinais.

Cada satélite GPS transmite um sinal constituído por um certo número de componentes, entre elas: duas ondas portadoras, dois códigos digitais e uma mensagem de navegação. As ondas portadoras são chamadas de L1 e L2 (do inglês *Link1* e *Link2*, nesta ordem) e possuem frequências de 1575,42 MHz e 1227,6 MHz, respectivamente. Elas são geradas a partir de relógios atômicos de rubídio ou césio oscilando na frequência fundamental $f_0 = 10,23$ MHz, os quais se encontram a bordo dos satélites GPS. A frequência das ondas portadoras L1 e L2 é obtida multiplicando f_0 pelos inteiros 154 e 120, respectivamente (HOFMANN-WELLENHOF; LICHTENEGGER; COLLINS, 2001). Todos os satélites transmitem as mesmas ondas portadoras L1 e L2, as quais permitem eliminar o atraso ionosférico, que é uma das maiores fontes de erro em sinais GPS (EL-RABBANY, 2002). Recentemente, uma nova portadora com frequência de 1176,45 MHz foi adicionada, a L5. Ela é utilizada principalmente em aviação para atender a requisitos exigentes de segurança da vida humana. As ondas portadoras sozinhas não transmitem nenhuma informação e, portanto, devem ser moduladas para transportar informação sob a forma de um código digital. No caso do GPS, essa modulação é chamada de modulação bifase, visto que a fase da portadora é deslocada por 180° quando o valor do código muda de 0 para 1 e vice-versa.

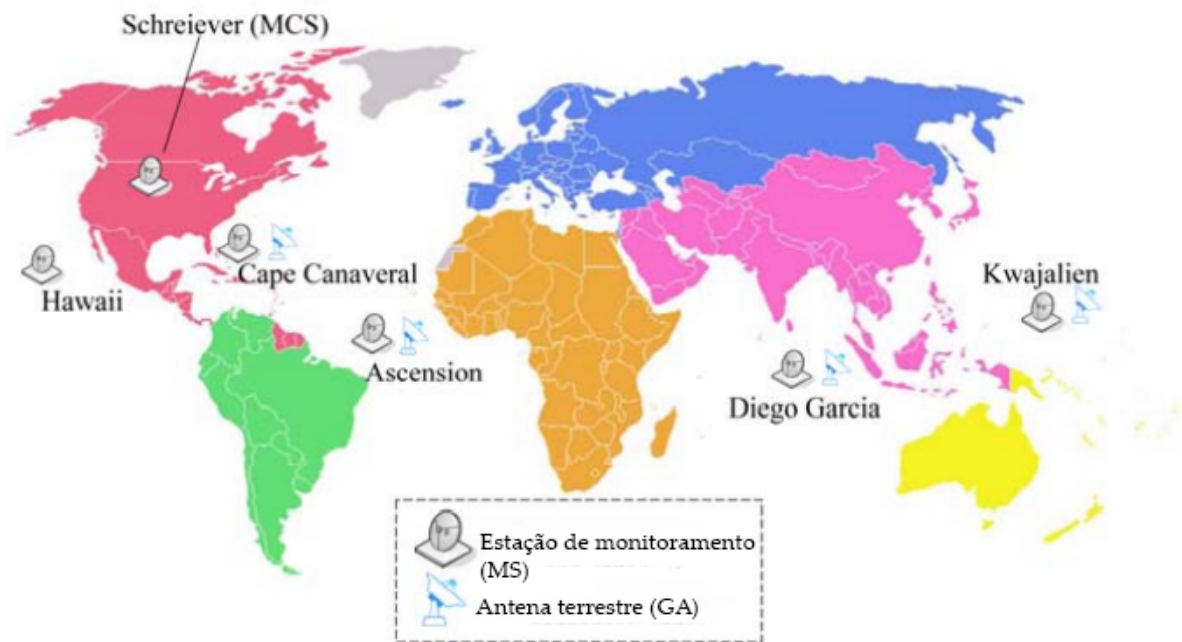
Um código digital é uma sequência periódica e pseudoaleatória de dígitos binários que são transmitidos a uma taxa definida. Para o caso do GPS, os códigos digitais são: código de aquisição grosseira C/A (do inglês *Coarse Acquisition*) e código de precisão P. Eles são comumente conhecidos como códigos PRN (do inglês *PseudoRandom Noise*) por conta da semelhança com sinais aleatórios, apesar de serem gerados por um algoritmo matemático (EL-RABBANY, 2002). O código C/A é uma sequência de 1024 dígitos binários que se repete a cada 1 ms. Ele é modulado apenas sobre a onda portadora L1 e transmitido a uma taxa de 1,023 Mbps. O código P é uma sequência de dígitos binários muito longa que se repete depois de 266 dias. Ele é modulado sobre ambas as portadoras (L1 e L2) e transmitido a uma taxa de 10,23 Mbps (FRENZEL, 2016). A razão do período

ser tão prolongado é que ele permite dividir o código P em diferentes segmentos (38 segmentos de 1 semana), dos quais 32 são atribuídos aos diferentes satélites GPS. Assim, os satélites são usualmente identificados pelo segmento de 1 semana do código P que eles estão transmitindo (TRANSPORTATION; GUARD; TRANSPORTATION, 1995). Por exemplo, um satélite com a identificação PRN 20 indica que ele está associado ao vigésimo segmento de 1 semana do código P. Além dos códigos C/A e P, cada satélite também transmite uma mensagem de navegação a uma taxa de 50 Hz. A mensagem de navegação é modulada sobre ambas as portadoras (L1 e L2) e consiste de 25 quadros com 1500 dígitos binários em cada um. Os dígitos binários descrevem efemérides (parâmetros orbitais dos satélites), o estado de saúde dos satélites, correções de relógio, dados de almanaque (efemérides de todos os satélites) e dados atmosféricos (ELMUNIM; ABDULLAH, 2021).

O segmento de controle é responsável por monitorar, comandar e controlar a constelação de satélites GPS. O objetivo é determinar e prever a localização dos satélites, mantê-los em suas órbitas apropriadas e monitorar o estado de saúde de cada um deles por meio da supervisão da integridade dos sinais, do comportamento dos relógios atômicos, dos painéis solares, dos níveis de energia das baterias e dos níveis dos propelentes utilizados nas correções de trajetória e orientação (KAPLAN; HEGARTY, 2017). Além disso, o segmento de controle atualiza o relógio, efemérides e almanaques de cada satélite, assim como outros indicadores, na mensagem de navegação pelo menos uma vez por dia. Essas informações são agrupadas e enviadas aos satélites GPS por meio da banda S. Os satélites GPS dispõem de uma antena operando na banda S que permite a comunicação com o segmento de controle (HUANG; CHEN, 2010). Em suma, ele é o segmento responsável por manter o GPS operando de forma adequada.

Para realizar as tarefas supracitadas, o segmento de controle é composto por uma estação de controle mestre (MCS, do inglês *Master Control Station*), por antenas terrestres (GAs, *Ground Antennas*) e por estações de monitoramento (MSs, do inglês *Monitor Stations*). A MCS é operada pela força aérea americana em Colorado Springs no estado do Colorado. Quanto as MSs, há 5 espalhadas ao redor do globo em termos de longitude, a saber: Hawaii, Kwajalein, Colorado Springs, Ascension Island (Oceano Atlântico) e Diego Garcia (Oceano Índico). Cada uma delas está equipada com um receptor GPS de alta qualidade e um relógio atômico de césio para rastrear continuamente todos os satélites GPS visíveis e coletar dados de cada um deles (EL-RABBANY, 2002; KAPLAN; HEGARTY, 2017). Três das MSs (Kwajalein, Diego Garcia e Ascension Island) atuam também como estações de controle e são equipadas com GAs para enviar dados aos satélites GPS. Os dados coletados pelas MSs são transmitidos para a MCS para serem processados. Os dados processados descrevem a posição dos satélites em função do tempo, parâmetros de relógio, dados atmosféricos e dados de almanaque. Eles são enviados para uma das estações de controle para serem transmitidos aos satélites por meio da banda S. Veja a Figura 47.

Figura 47 – Distribuição geográfica das instalações que compõem o segmento de controle.

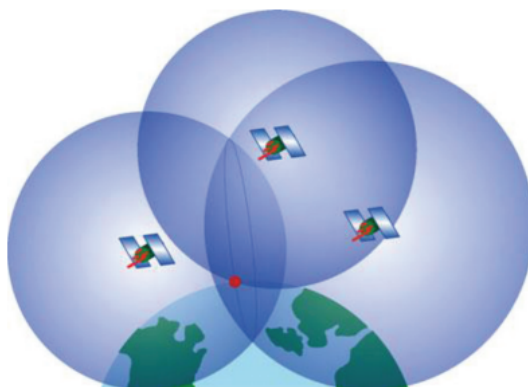


Fonte: Adaptado de Huang e Chen (2010).

O segmento de usuário consiste de receptores GPS, os quais são projetados para detectar, decodificar e processar sinais GPS a fim de determinar suas respectivas localizações. Usualmente, a saída é exibida em um painel de cristal líquido fornecendo a latitude, longitude e altitude; em alguns receptores, um mapa é exibido (FRENZEL, 2016). A determinação da localização de um receptor GPS é baseada na distância entre o receptor e três satélites, um processo conhecido como trilateração (uso de três distâncias). Cada satélite envia um sinal GPS que contém sua localização e o instante de transmissão. Quando o sinal GPS é recebido pelo receptor, ele determina o intervalo de tempo entre os instantes de emissão e recepção. Então, o intervalo é multiplicado pela velocidade de propagação das ondas de rádio fornecendo a distância entre o receptor e o satélite (pseudodistância). Realizando esse procedimento para 3 satélites, é possível construir 3 esferas centradas em cada um desses satélites (PERUZZO, 2017). O receptor se encontra no único ponto de interseção das esferas (ver Figura 48). Um quarto satélite pode ser utilizado para determinar a altitude e obter uma medida mais precisa. Essa é a trilateração baseada em pseudodistância, que é uma das observáveis GPS.

As observáveis GPS são as distâncias deduzidas a partir de diferenças de fase ou de tempo mensuradas comparando os sinais recebidos dos satélites com os sinais gerados internamente pelos receptores (HOFMANN-WELLENHOF; LICHTENEGGER; COLLINS, 2001). Há dois tipos de observáveis GPS: pseudodistância e fase da portadora. A pseudodistância é a distância entre um satélite em específico e a antena do receptor GPS. Ela pode ser derivada a partir dos códigos PRN (C/A e P). Suponha um sincronismo

Figura 48 – A trilateração permite determinar a localização de um receptor GPS.



Fonte: [Tamazin, Karaim e Noureldin \(2018\)](#).

perfeito entre os relógios do satélite e do receptor. O procedimento para o cálculo da pseudodistância funciona da seguinte forma: quando um código PRN é transmitido pelo satélite, o receptor gera uma réplica exata desse código. Após um certo intervalo de tempo, equivalente ao tempo de percurso do sinal, o código transmitido chega ao receptor. Então, ele é comparado com sua réplica gerada localmente pelo receptor por meio de uma correlação. Assim, o receptor é capaz de calcular o tempo de percurso. Multiplicando-o pela velocidade da luz, chega-se na pseudodistância ([EL-RABBANY, 2002](#)). O nome pseudodistância é devido ao fato de que não há sincronismo perfeito entre os relógios, de modo que ela não representa a distância real. A distância entre o satélite e o receptor GPS também pode ser obtida por meio da fase da portadora. Nesse caso, a distância é dada simplesmente pela soma do número total de ciclos completos da portadora mais os ciclos fracionários no receptor e no satélite, multiplicada pelo comprimento de onda da portadora ([EL-RABBANY, 2002](#)). Como o que está sendo medido é a diferença entre a fase da portadora gerada no receptor no momento da recepção e a fase da portadora gerada no satélite no momento da transmissão, a observação inicial contém apenas a parte fracionária dos ciclos. Assim, há uma ambiguidade, que corresponde ao número inteiro de ciclos completos, que deve ser solucionada. As medidas obtidas com a fase da portadora são muito mais precisas do que as obtidas com os códigos.

Tanto a pseudodistância quanto a fase da portadora são afetadas por vários tipos de erros aleatórios e sistemáticos provenientes de várias fontes. Eles podem ser originados nos satélites, nos receptores e durante a propagação dos sinais GPS na atmosfera ([PETROPOULOS; SRIVASTAVA, 2021](#)). Os erros provenientes dos satélites incluem erros de efemérides, de relógio e disponibilidade seletiva². Os erros advindos dos receptores incluem erros de relógio, ruído no receptor, variação do centro de fase da antena do receptor e o efeito de multicaminho. Por fim, os erros oriundos da propagação do sinal se referem

² É a degradação intencional dos sinais GPS públicos implementada por razões de segurança.

ao atrasos que os sinais GPS estão sujeitos ao atravessar a ionosfera e a troposfera. A ionosfera é um meio dispersivo, de modo que ela altera a direção e a velocidade dos sinais GPS à medida que eles se propagam. Sua natureza dispersiva faz com que os códigos (C/A, P e mensagem de navegação) sejam afetados de forma diferente quando comparados com a própria onda portadora. Especificamente, a ionosfera aumenta a velocidade da fase da onda portadora para além da velocidade da luz, enquanto a velocidade dos códigos diminuem na mesma quantidade (SICKLE, 2001). Dessa forma, em comparação com a distância real a distância entre o receptor e o satélite será muito curta se medida pela fase da portadora e muito longa se medida pelos códigos (EL-RABBANY, 2002).

O atraso ionosférico é proporcional ao número de elétrons livres no caminho percorrido pelo sinal GPS, ou seja, ao conteúdo eletrônico total (TEC). Ele é definido como a integral da densidade eletrônica ao longo da linha de visada entre o satélite e o receptor

$$\text{TEC} = \int N_e(s) ds,$$

em que N_e é a densidade eletrônica em elétrons/m³. O TEC é expresso em unidades de TEC (TECU), em que 1 TECU = 1×10^{16} elétrons/m². Ele varia com a hora do dia, estações do ano, ciclo solar e localização geográfica. O TEC calculado ao longo da linha de visada entre um satélite e um receptor é também conhecido como TEC inclinado (STEC, do inglês *Slant Total Electron Content*) (AKYILMAZ; ARSLAN, 2008). Ele é uma função da posição da antena do satélite e do receptor e, portanto, é exclusivo para cada usuário e não pode ser utilizado para mapear a ionosfera (PETROVSKI, 2014). Portanto é necessário introduzir o TEC vertical (VTEC, do inglês *Vertical Total Electron Content*), que é o TEC ao longo da vertical local. Na prática, o TEC pode ser obtido utilizando dados de um receptor de dupla frequência a partir da combinação linear entre as observáveis de pseudodistância em L1 e L2 ou a partir das observáveis de fase da portadora em ambas as frequências (MATSUOKA; CAMARGO; BATISTA, 2009).

4.5 Distúrbios Ionosféricos Propagantes

Os distúrbios ionosféricos propagantes (TIDs) são flutuações de natureza ondulatória na densidade eletrônica do plasma ionosférico que se propagam pela ionosfera em uma ampla gama de velocidades e frequências. Os TIDs desempenham um papel importante na troca de momento e energia entre as várias regiões da atmosfera superior (FISER; CHUM; LIU, 2017; BELEHAKI et al., 2020). O entendimento teórico dos TIDs remonta ao trabalho inicial de Hines (1960), que identificou similaridades entre certas características dos TIDs e propriedades correspondentes das GWs na atmosfera neutra (FRANCIS, 1975). Hines (1960) propôs que os TIDs são manifestações ionosféricas das GWs, onde a ionosfera atua majoritariamente como um traçador passivo que expõe o movimento da atmosfera neutra. Essa interpretação relacionando TIDs e GWs recebeu ampla aceitação da comunidade

científica. [Wickersham \(1965\)](#) verificou que os dados ionosféricos são consistentes com essa interpretação ([RISHBETH; GARRIOTT, 1969](#)).

De acordo com [Georges \(1968\)](#) e [Hunsucker \(1982\)](#), há duas classes de TIDs determinadas de acordo com a velocidade, período e comprimento de onda, a saber: distúrbios ionosféricos propagantes de larga escala (LSTIDs, do inglês *Large Scale Travelling Ionospheric Disturbances*) e distúrbios ionosféricos propagantes de média escala (MSTIDs, do inglês *Medium Scale Travelling Ionospheric Disturbances*). A principal diferença entre esses distúrbios é que as velocidades horizontais dos LSTIDs são substancialmente maiores que a velocidade do som, enquanto as velocidades horizontais dos MSTIDs são substancialmente menores ([FRANCIS, 1975](#)). Os LSTIDs possuem velocidades horizontais entre 400 e 1000 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, períodos entre 30 min e 3 h, e comprimentos de onda horizontais que excedem 1000 km. Além disso, os LSTIDs tendem a se propagar em direção ao equador a partir das regiões polares e estão relacionados com a atividade geomagnética auroral. Durante períodos geomagneticamente perturbados, a termosfera de alta latitude é aquecida via efeito Joule e, conseqüentemente, energia é transferida para as baixas latitudes na forma de ondas termosféricas que interagem com os íons no plasma ionosférico ([ALTADILL et al., 2020](#)). Vale destacar que os LSTIDs são relativamente infreqüentes, ocorrendo apenas depois de tempestades geomagnéticas significativas ([FRANCIS, 1973](#)). [Davis \(1971\)](#) mostrou que é possível relacionar a ocorrência de LSTIDs observadas em médias latitudes com subtempestades polares.

Os MSTIDs têm velocidades horizontais entre 100 e 250 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, períodos entre 15 min e 1 h, e comprimentos de onda horizontais na ordem de centenas de quilômetros ([FRANCIS, 1975](#)). Os MSTIDs são mais localizados, não apresentam correlação com a atividade geomagnética e usualmente consistem de poucas oscilações quase senoidais com períodos entre 15 e 30 min ([DAVIS; ROSA, 1969](#)). A ocorrência de MSTIDs é bastante comum, aparecendo cotidianamente entre 30 e 50% do tempo na ionosfera ([FRANCIS, 1973](#)). A direção de propagação dos MSTIDs depende do período do dia, da estação do ano e do hemisfério sendo considerado. De fato, os MSTIDs são observados tanto no período diurno, nos meses de inverno, quanto no período noturno, nos meses de verão. No hemisfério norte, durante o período diurno eles se propagam para a direção sul ou sudeste, enquanto no período noturno a direção de propagação preferencial é sudoeste, onde a frente de onda está alinhada com a direção noroeste-sudeste ([SIVAKANDAN et al., 2021](#)). No hemisfério sul, durante o período noturno eles se propagam na direção noroeste, onde as frentes de onda estão alinhadas com a direção nordeste-sudoeste, enquanto no período diurno eles se propagam na direção nordeste ([OTSUKA et al., 2013](#); [OTSUKA et al., 2021](#)).

A diferença na direção de propagação dos MSTIDs sugerem que os mecanismos que causam os MSTIDs diurnos e noturnos são diferentes. Especificamente, os MSTIDs

noturnos são causados por processos eletrodinâmicos, ao passo que os MSTIDs diurnos são causados por GWs. Resultados observacionais sugerem que os MSTIDs são causados por GWs que se propagam para cima a partir da baixa atmosfera ou que são concebidos em conjunção com a atividade auroral (OTSUKA et al., 2011). Em particular, as fontes de GWs na baixa atmosfera incluem ondas oceânicas, tsunamis, explosões, frentes meteorológicas e tempestades (BUZULUKOVA, 2018). Uma vez que a geração de MSTIDs está intimamente relacionada com as GWs, as quais podem ser produzidas por diversas fontes desconhecidas, a previsão da ocorrência de MSTIDs em conexão com suas fontes é um desafio (NISHIMURA et al., 2022).

Embora várias técnicas tenham sido utilizadas para observar os MSTIDs, a maior parte das observações até o final da década de 1990 foram realizadas abrangendo um único ou alguns pontos na superfície terrestre por meio de ionossondas, radares de alta frequência e radares de dispersão incoerente, para citar apenas alguns (OTSUKA et al., 2021). A introdução de redes de receptores GPS, bem como de imageadores *all-sky*, tornaram possível observar os MSTIDs em duas dimensões. Dados de TEC obtidos a partir de sinais GPS têm mostrado que MSTIDs podem introduzir flutuações no TEC (CANDIDO et al., 2008). Assim sendo, por meio de uma rede densa e ampla de receptores GPS é possível construir mapas de TEC para a identificação e caracterização tanto de MSTIDs quanto de LSTIDs (TSUGAWA et al., 2007; FIGUEIREDO et al., 2017).

Parte II

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

5 TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA

A história da transformada *wavelet* remonta a mais de cem anos, iniciando com o trabalho do matemático húngaro Alfréd Haar (1885-1933) no início do século XX. Em 1909, ele introduziu a *wavelet* de Haar no apêndice de sua tese de doutorado para fornecer um exemplo de uma base ortonormal para o espaço das funções quadraticamente integráveis (HOLDEN; PIENE, 2019; AKUJUOBI, 2022). Historicamente, a *wavelet* de Haar foi a primeira *wavelet* ortogonal de suporte compacto a ser descoberta, sendo a mais simples das *wavelets*. Sua desvantagem técnica é que ela não é contínua e, portanto, não é diferenciável. Na prática, a transformada *wavelet* começou a aparecer de forma sistemática na literatura somente a partir da década de 80 (CHANDRASEKHAR; DIMRI; GADRE, 2014). Em 1982, o geofísico francês Jean Morlet (1931-2007) foi o primeiro a introduzir na prática a ideia da transformada *wavelet* como uma alternativa para a transformada de Fourier janelada (STFT, do inglês *Short-Time Fourier Transform*).

Morlet estava trabalhando como engenheiro para uma empresa petrolífera e tinha interesse em analisar sinais sísmicos obtidos para a prospecção de petróleo, os quais contêm muita informação tanto em tempo quanto em frequência (DEBNATH; MIKUSÍSKI, 2005; CHATTERJEE, 2017). Ele desejava ganhar resolução temporal para as componentes de alta frequência, o que sugeria o uso da STFT de banda larga. Em contrapartida, ele também desejava ganhar resolução em frequência para as componentes de baixa frequência, o que sugeria o uso da STFT de banda estreita. A fim de atingir ambos os objetivos em uma única transformada, Morlet teve a ideia de introduzir uma nova classe de funções por meio da dilatação/compressão e translação de uma função fixa (DAUBECHIES, 1996). Sua função era uma combinação de uma janela gaussiana com uma função cosseno (AKUJUOBI, 2022). A fim de capturar as componentes de alta frequência, Morlet comprimiu sua função em tempo. Analogamente, ele dilatou sua função em tempo para capturar as componentes de baixa frequência. Além disso, para investigar o que ocorria no intervalo de tempo de interesse, ele também transladou sua função. Por fim, ele calculou o produto interno entre o sinal de interesse e todas as versões dilatadas/comprimidas e transladadas da função inicial.

Morlet teve dificuldade em convencer os seus colegas geofísicos de que sua nova ferramenta matemática para análise de sinais sísmicos era válida. Para fundamentar matematicamente a sua ferramenta, Morlet recorreu ao físico teórico francês Alex Grossmann (1930-2019), o qual já vinha trabalhando extensivamente com mecânica quântica, onde problemas semelhantes ocorrem ao se tentar definir características locais em uma função, bem como em sua transformada de Fourier (DAUBECHIES, 1996). Grossmann reconheceu rapidamente a importância da CWT de Morlet, que é similar ao formalismo de estados

coerentes em mecânica quântica, e desenvolveu um fórmula de reconstrução exata para a transformada integral de Morlet (DEBNATH; MIKUSIŃSKI, 2005). Dessa forma, Morlet e Grossmann formularam a transformada *wavelet* contínua (CWT).

Este capítulo descreve brevemente a CWT. Ela é uma ferramenta que permite determinar a localização temporal das componentes de frequência de uma série temporal. Neste trabalho, ela é aplicada em séries temporais do campo geomagnético para detectar as periodicidades características das variações geomagnéticas causadas por terremotos tsunamigênicos. A redação deste capítulo está estruturada da seguinte forma. A seção 5.1 discute sobre as *wavelets* mais utilizadas na literatura (Morlet e Marr). A seção 5.2 introduz a definição formal da CWT e apresenta algumas de suas propriedades.

5.1 O que é uma *wavelet* ?

Como o próprio nome sugere, uma *wavelet* é uma pequena onda. Uma pequena onda cresce e decresce em um período de tempo limitado, em contraste com as funções seno e cosseno, as quais oscilam indefinidamente em \mathbb{R} (PERCIVAL; WALDEN, 2007). Para tornar precisa a noção de *wavelet*, considere a seguinte definição.

Definição 5.1.1. Uma *wavelet* é uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que satisfaz a condição de admissibilidade, isto é,

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty, \quad (5.1)$$

em que C_ψ é a constante de admissibilidade, cujo valor depende de ψ , e $\hat{\psi}$ é a transformada de Fourier de ψ dada por

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

A condição de admissibilidade implica que a *wavelet* deve ter média zero, isto é,

$$\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0. \quad (5.2)$$

Caso contrário, a integral na equação (5.1) seria infinita em $\omega = 0$ e a condição de admissibilidade não seria satisfeita. Dessa forma, $\hat{\psi}(0) = 0$ é uma condição necessária para a admissibilidade. Porém, ela não é suficiente, pois existem funções com média zero que não satisfazem a condição de admissibilidade (PETERS; WILLIAMS; BATES, 1998). Na realidade, ela é uma condição aproximadamente suficiente, uma vez que se ψ tiver média zero e decair suficientemente com o tempo, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|^\alpha) |\psi(t)| dt < +\infty, \quad \text{para algum } \alpha > 0,$$

então a condição de admissibilidade é satisfeita (MALLAT, 2009). O fato de ψ ter energia

finita, pois pertence ao espaço $L^2(\mathbb{R})$, implica que ψ só pode desviar do zero em intervalos finitos de tempo. Por outro lado, a equação (5.2) implica que qualquer desvio acima do zero deve ser cancelado por um desvio abaixo do zero. Portanto, ψ deve oscilar como uma pequena onda. É por este motivo que ela é chamada de *wavelet* (SUTER, 1998). Os Exemplos 5.1.1 e 5.1.2 mostram as *wavelets* de Marr e Morlet, respectivamente.

Exemplo 5.1.1 (Wavelet de Marr). Para obter a *wavelet* de Marr ψ com energia unitária, considere uma função proporcional à função densidade de probabilidade gaussiana de uma variável aleatória com média zero e variância σ^2 , isto é,

$$g(t) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.3)$$

em que C é uma constante a ser determinada. Diferenciando a equação (5.3) com respeito ao tempo t chega-se em

$$g'(t) = -\frac{C}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5.4)$$

Novamente, diferenciando a equação (5.4) com respeito ao tempo t obtém-se

$$-g''(t) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5.5)$$

Impondo que a energia da função definida pela equação (5.5) seja unitária resulta no seguinte valor de C :

$$C = \frac{2\sqrt{2}\pi^{1/4}\sigma^{5/2}}{\sqrt{3}}. \quad (5.6)$$

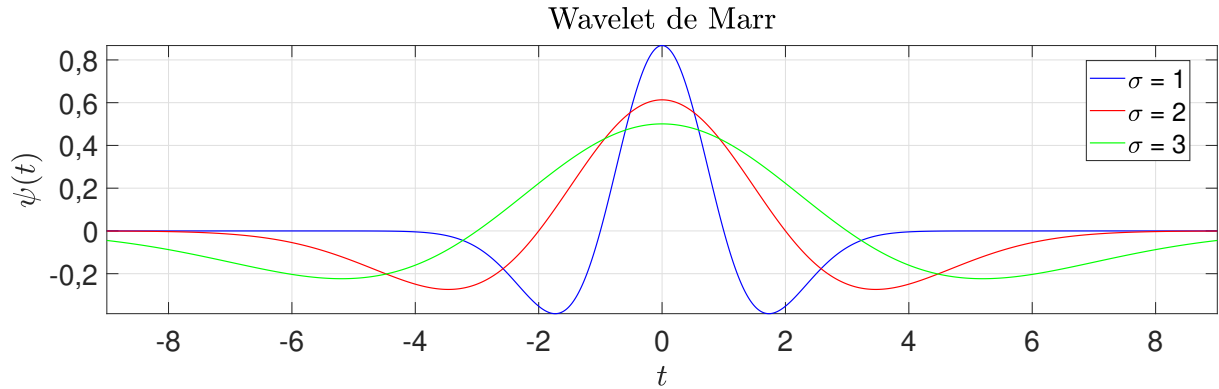
Substituindo a equação (5.6) na equação (5.5) obtém-se a expressão da *wavelet* de Marr normalizada para ter energia unitária, isto é,

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5.7)$$

A Figura 49 ilustra o gráfico da equação (5.7) para diferentes valores de σ . Em contraste com a *wavelet* de Haar, a *wavelet* de Marr é uma função C^∞ com dois momentos nulos. Devido a semelhança de seu gráfico com a seção transversal de um chapéu mexicano, ψ também é chamada por este nome.

O cômputo de C_ψ para a *wavelet* de Marr requer a sua transformada de Fourier,

Figura 49 – Ilustração do gráfico da *wavelet* de Marr para diferentes valores de σ . Ela é real, par e apresenta uma boa localização temporal.



Fonte: O autor.

que é dada por

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega) &= \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3\sigma}} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3\sigma}} \left[\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-j\omega t) dt + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} -t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-j\omega t) dt \right].\end{aligned}\quad (5.8)$$

Defina

$$f(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5.9)$$

Então, utilizando a propriedade de diferenciação em frequência da transformada de Fourier é possível reescrever a equação (5.8) como segue

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3\sigma}} \left[\hat{f}(\omega) + \frac{1}{\sigma^2} \hat{f}^{(2)}(\omega) \right], \quad (5.10)$$

em que \hat{f} denota a transformada de Fourier de f , e $\hat{f}^{(2)}$ é a derivada de segunda ordem de \hat{f} . Um modo conveniente de obter a expressão de \hat{f} consiste em diferenciar a equação (5.9) com respeito ao tempo t e aplicar a transformada de Fourier no resultado obtido. Com efeito,

$$-\sigma^2 f'(t) = t f(t) \implies \hat{f}^{(1)}(\omega) = -\sigma^2 \omega \hat{f}(\omega) \implies \frac{\hat{f}^{(1)}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = -\sigma^2 \omega, \quad (5.11)$$

em que $\hat{f}^{(1)}$ é a derivada de primeira ordem de \hat{f} . Assim, integrando ambos os lados da

equação (5.11) chega-se em

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \frac{\hat{f}^{(1)}(\omega')}{\hat{f}(\omega')} d\omega' = -\sigma^2 \int_0^\omega \omega' d\omega' &\implies \ln \left(\frac{\hat{f}(\omega)}{\hat{f}(0)} \right) = -\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \\ &\implies \hat{f}(\omega) = \hat{f}(0) \exp \left(-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Agora, resta determinar o valor de $\hat{f}(0)$. Note que

$$\hat{f}(0)^2 = \left[\int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx \right]^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) dxdy. \quad (5.13)$$

A integral dupla na equação (5.13) pode ser avaliada por meio do uso de coordenadas polares, em que $r^2 = x^2 + y^2$ e $dxdy = r dr d\theta$. Uma vez que a integração compreende todo o \mathbb{R}^2 , tem-se

$$\hat{f}(0)^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r \exp \left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} r \exp \left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) dr = 2\pi\sigma^2.$$

Assim,

$$\hat{f}(0) = \sigma\sqrt{2\pi}. \quad (5.14)$$

Substituindo a equação (5.14) na equação (5.12) resulta em

$$\hat{f}(\omega) = \sigma\sqrt{2\pi} \exp \left(-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \right), \quad (5.15a)$$

de modo que

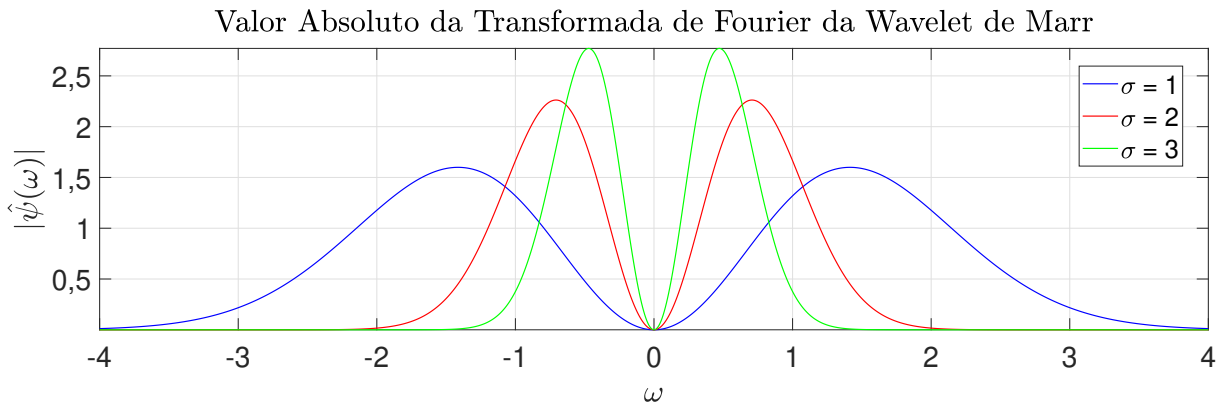
$$\hat{f}^{(2)}(\omega) = \sigma^2(\omega^2\sigma^2 - 1)\hat{f}(\omega). \quad (5.15b)$$

Portanto, a expressão de $\hat{\psi}$ é obtida substituindo as equações (5.15a) e (5.15b) na equação (5.10). De fato,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma} \left[\hat{f}(\omega) + \frac{1}{\sigma^2} \hat{f}^{(2)}(\omega) \right] \\ &= \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma} \left[\hat{f}(\omega) + (\omega^2\sigma^2 - 1)\hat{f}(\omega) \right] \\ &= \frac{2\sigma^2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma} \omega^2 \hat{f}(\omega) \\ &= \frac{\sqrt{8}\sigma^{5/2}\pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \omega^2 \exp \left(-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

A Figura 50 ilustra o gráfico da equação (5.16) para diferentes valores de σ . Note que $\hat{\psi}$ é uma função real e par com uma boa localização em frequência. Substituindo a equação

Figura 50 – Ilustração do gráfico da transformada de Fourier (valor absoluto) da *wavelet* de Marr para diferentes valores de σ . Ela é real, par e apresenta uma boa localização em frequência.



Fonte: O autor.

(5.16) na equação (5.1) vem finalmente que

$$\begin{aligned}
 C_\psi &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \\
 &= \frac{16}{3} \sigma^5 \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \omega^3 \exp(-\sigma^2 \omega^2) d\omega \\
 &= \frac{8}{3} \sigma \sqrt{\pi} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{2-1} e^{-u} du}_{\Gamma(2)=1} && u = \sigma^2 \omega^2, du = 2\sigma^2 \omega d\omega \\
 &= \frac{8}{3} \sqrt{\pi} \sigma,
 \end{aligned}$$

em que Γ denota a função gama dada por

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Por fim, o cômputo da energia E pode ser convenientemente realizado utilizando o seguinte resultado, o qual será utilizado de forma recorrente neste e no próximo capítulo. Sua demonstração pode ser encontrada em [Mallat \(2009\)](#).

Teorema 5.1 (Teorema de Parseval-Plancherel). *Se f e h estão em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) h^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{h}^*(\omega) d\omega,$$

em que $*$ denota o complexo conjugado. Para $f = h$, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Assim, utilizando o Teorema 5.1 e a equação (5.16) tem-se

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sigma^5 \int_0^{+\infty} \omega^4 \exp(-\sigma^2 \omega^2) d\omega \\
&= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u^{5/2-1} \exp(-u) du && u = \sigma^2 \omega^2, du = 2\sigma^2 \omega d\omega \\
&= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 5.1.2 (Wavelet de Morlet). A *wavelet* de Morlet ψ é essencialmente uma exponencial complexa de frequência ω_0 cuja amplitude é modulada por uma função proporcional a função densidade de probabilidade gaussiana padrão. O uso de uma *wavelet* complexa permite separar as componentes de amplitude e fase de uma função, o que pode ser útil dependendo da aplicação. Por exemplo, o uso da fase é muito conveniente na detecção de singularidades (ADDISON, 2017). A *wavelet* de Morlet é definida da seguinte forma

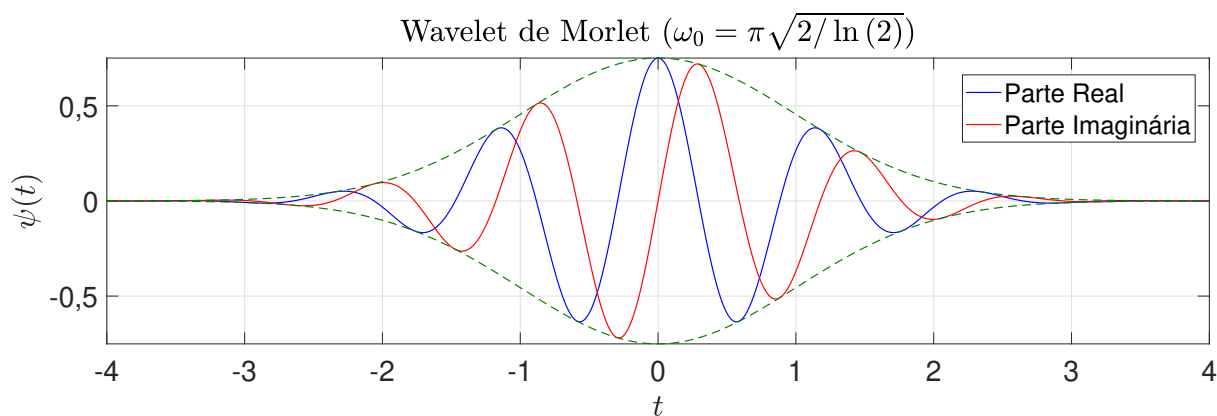
$$\psi(t) = \pi^{-1/4} \left[\exp(j\omega_0 t) - \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right) \right] \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (5.17)$$

O segundo termo nos colchetes da equação (5.17) é um termo de correção introduzido para garantir que a condição de admissibilidade seja satisfeita. Para valores típicos de ω_0 , que usualmente são escolhidos de tal forma que $\omega_0 > 5$, o termo de correção é insignificante, pois ele é da ordem de 10^{-7} ou menor. Assim sendo, em aplicações práticas ele é frequentemente desconsiderado (DAUBECHIES, 1992a; LIU, 2000). A *wavelet* de Morlet sem o termo de correção ainda pode ser utilizada numericamente como se fosse uma *wavelet* (CARMONA; HWANG; TORRESANI, 1998). Frequentemente, o valor de ω_0 é escolhido de modo que a razão entre o primeiro e o segundo máximo de ψ seja aproximadamente 1/2, ou seja, $\omega_0 = \pi(2/\ln(2))^{1/2} \approx 5,3364$. A Figura 51 ilustra as partes real e imaginária da *wavelet* de Morlet para esse valor de ω_0 .

Substituindo a equação (5.9) com $\sigma = 1$ na equação (5.17) chega-se em

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \pi^{-1/4} \left[\exp(j\omega_0 t) - \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right) \right] \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \\
&= \pi^{-1/4} \exp(j\omega_0 t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) - \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \\
&= \pi^{-1/4} \exp(j\omega_0 t) f(t) - \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right) f(t).
\end{aligned} \quad (5.18)$$

Figura 51 – A *wavelet* de Morlet é uma onda complexa no interior de um envelope gaussiano. A frequência ω_0 controla as oscilações dentro do envelope e, em geral, o seu valor é $\omega_0 = \pi(2/\ln(2))^{1/2}$.



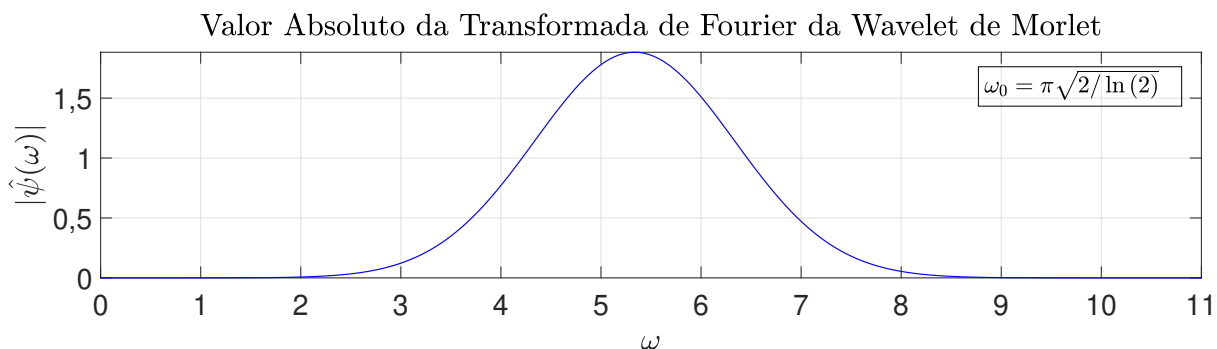
Fonte: O autor.

Aplicando a transformada de Fourier na equação (5.18) e utilizando a equação (5.15a) com $\sigma = 1$ resulta em

$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}(\omega) &= \pi^{-1/4} \hat{f}(\omega - \omega_0) - \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right) \hat{f}(\omega) \\
 &= \sqrt{2}\pi^{1/4} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2}\right) - \sqrt{2}\pi^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \\
 &= \sqrt{2}\pi^{1/4} \left[\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2}\right) \right] \\
 &= \sqrt{2}\pi^{1/4} [\exp(\omega\omega_0) - 1] \exp\left(-\frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2}\right). \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

Note que $\hat{\psi}(0) = 0$, tendo em vista o termo de correção. A Figura 52 ilustra o gráfico do valor absoluto da equação (5.19) para o valor de ω_0 usualmente utilizado na literatura.

Figura 52 – Ilustração do gráfico da transformada de Fourier (valor absoluto) da *wavelet* de Morlet.



Fonte: O autor.

O cômputo de C_ψ para a *wavelet* de Morlet é bastante trabalhoso e requer o uso de funções não elementares. Os passos descritos nesta discussão são baseados no trabalho de [Ashmead \(2012\)](#). Em primeiro lugar, substitua a equação (5.19) na equação (5.1). Assim,

$$\begin{aligned} C_\psi(\omega_0) &= 2\sqrt{\pi} \exp(-\omega_0^2) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{[\exp(\omega\omega_0) - 1]^2 \exp(-\omega^2)}{|\omega|} d\omega}_{I(\omega_0)} \\ &= 2\sqrt{\pi} \exp(-\omega_0^2) I(\omega_0). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Devido ao módulo no denominador da função integrando em $I(\omega_0)$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} I(\omega_0) &= \int_{-\infty}^0 \frac{[\exp(\omega\omega_0) - 1]^2 \exp(-\omega^2)}{-\omega} d\omega + \int_0^{+\infty} \frac{[\exp(\omega\omega_0) - 1]^2 \exp(-\omega^2)}{\omega} d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{[(\exp(-\omega\omega_0) - 1)^2 + (\exp(\omega\omega_0) - 1)^2] \exp(-\omega^2)}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Diferenciando a equação (5.21) com respeito a ω_0 obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega_0} &= 2 \int_0^{+\infty} [(\exp(2\omega\omega_0) - \exp(-2\omega\omega_0)) - (\exp(\omega\omega_0) - \exp(-\omega\omega_0))] \exp(-\omega^2) d\omega \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \exp(-\omega^2) \sinh(2\omega\omega_0) d\omega - 4 \int_0^{+\infty} \exp(-\omega^2) \sinh(\omega\omega_0) d\omega \\ &= 2\sqrt{\pi} \exp(\omega_0^2) \operatorname{erf}(\omega_0) - 2\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{\omega_0^2}{4}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{\pi} \left[\exp(\omega_0^2) \operatorname{erf}(\omega_0) - \exp\left(\frac{\omega_0^2}{4}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.22)$$

em que erf denota a função erro dada por

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-x^2) dx.$$

Integrando a equação (5.22) com respeito a ω_0 resulta em

$$\begin{aligned} I(\omega_0) &= 2\sqrt{\pi} \int \exp(\omega_0^2) \operatorname{erf}(\omega_0) d\omega_0 - 2\sqrt{\pi} \int \exp\left(\frac{\omega_0^2}{4}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\omega_0}{2}\right) d\omega_0 \\ &= \omega_0^2 \left[{}_2F_2\left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; \omega_0^2\right) - {}_2F_2\left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; \frac{\omega_0^2}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.23)$$

em que ${}_2F_2$ denota a função hipergeométrica generalizada dada por

$${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n t^n}{(b_1)_n (b_2)_n n!},$$

onde

$$(q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ q(q+1) \cdots (q+n-1), & n \geq 1, \end{cases}$$

é o símbolo de Pochhammer. Finalmente, substituindo a equação (5.23) na equação (5.20) resulta em

$$C_\psi(\omega_0) = 2\sqrt{\pi}\omega_0^2 \exp(-\omega_0^2) \left[{}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; \omega_0^2 \right) - {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; \frac{\omega_0^2}{4} \right) \right]. \quad (5.24)$$

A Figura 53 ilustra o gráfico da equação (5.24). Para o valor usual de ω_0 , a equação (5.24) fornece $C_\psi \approx 1,19928$.

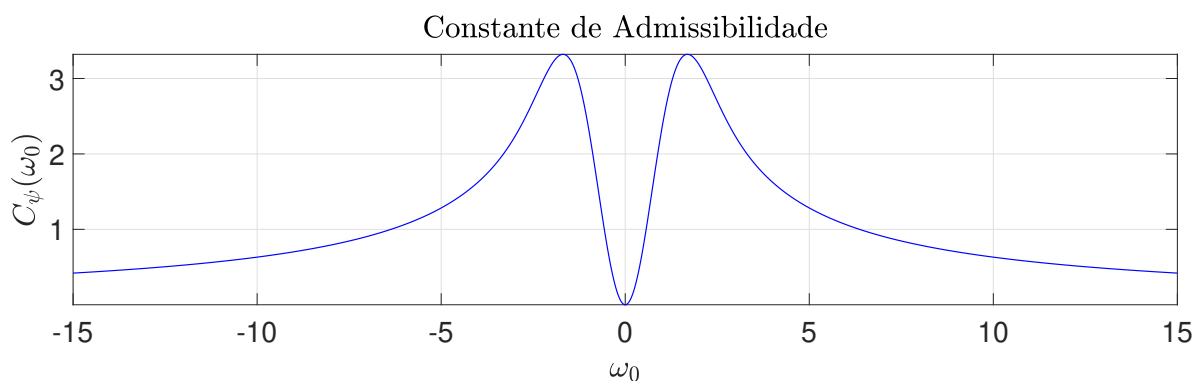
Por fim, o cômputo da energia $E(\omega_0)$ pode ser feito utilizando o Teorema 5.1 e a equação (5.19). Com efeito,

$$\begin{aligned} E(\omega_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\omega_0^2) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} [\exp(\omega\omega_0) - 1]^2 \exp(-\omega^2) d\omega}_I \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\omega_0^2) I. \end{aligned} \quad (5.25)$$

A integral I pode ser determinada como segue

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} \left(\exp[-(\omega^2 - 2\omega_0\omega)] - 2 \exp[-(\omega^2 - \omega_0\omega)] + \exp(-\omega^2) \right) d\omega \\ &= \sqrt{\pi} \left[\exp(\omega_0^2) - 2 \exp\left(\frac{\omega_0^2}{4}\right) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Figura 53 – Ilustração do gráfico da constante de admissibilidade da *wavelet* de Morlet em função de ω_0 .



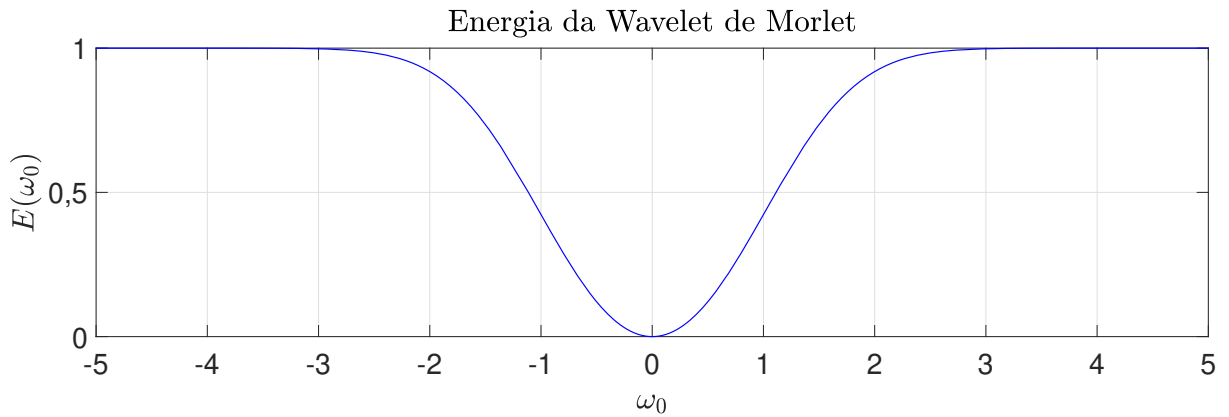
Fonte: O autor.

Substituindo a equação (5.26) na equação (5.25) produz

$$E(\omega_0) = 1 - 2 \exp\left(-\frac{3}{4}\omega_0^2\right) + \exp(-\omega_0^2). \quad (5.27)$$

A Figura 54 ilustra o gráfico da equação (5.27). ■

Figura 54 – Ilustração do gráfico da energia da *wavelet* de Morlet em função de ω_0 .



Fonte: O autor.

A partir de uma *wavelet* ψ , é possível construir uma família de funções alterando sua escala e localização temporal. Elas são definidas como

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad (5.28)$$

em que a é o parâmetro de escala, o qual mensura o grau de compressão ou dilatação, e b é o parâmetro de translação, o qual determina a posição temporal da *wavelet* (DEBNATH; SHAH, 2015). Se $|a| < 1$, então $\psi_{a,b}$ é uma versão comprimida de ψ e corresponde principalmente as altas frequências. Em contrapartida, se $|a| > 1$, então $\psi_{a,b}$ é uma versão dilatada de ψ e corresponde as baixas frequências. A resolução das *wavelets* no domínio do tempo e da frequência varia de acordo com a escala segundo o princípio da incerteza de Heisenberg. Para grandes escalas, tem-se uma resolução grosseira no domínio do tempo e uma resolução fina no domínio da frequência. Por outro lado, à medida que a escala decresce, a resolução no domínio do tempo se torna cada vez mais fina enquanto a resolução no domínio da frequência fica cada vez mais grosseira. O fator $|a|^{-1/2}$ é incluído na equação (5.28) por razões de conservação de energia, isto é, para garantir que as *wavelets* em todas as escalas tenham a mesma energia (ADDISON, 2017). De fato, da equação (5.28) vem que

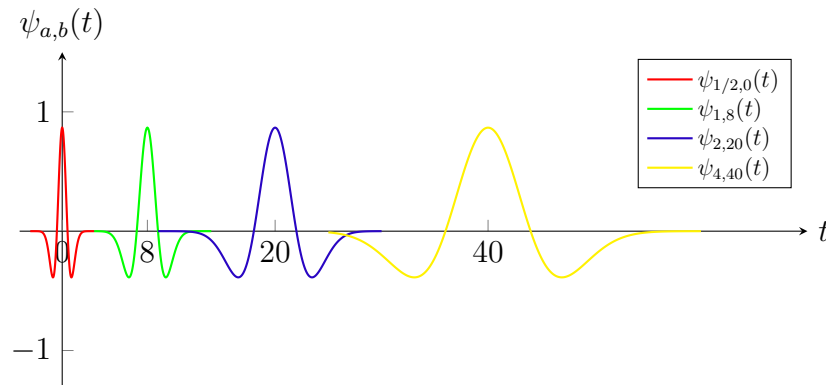
$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|^2 du, \quad \text{com } u = \frac{t-b}{a}.$$

A transformada de Fourier de $\psi_{a,b}$ é dada por

$$\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{|a|} \exp(-j\omega b) \hat{\psi}(a\omega). \quad (5.29)$$

A Figura 55 ilustra o gráfico da equação (5.28) para a *wavelet* de Marr considerando diferentes valores de a e b .

Figura 55 – Ilustração do gráfico da *wavelet* de Marr para diferentes valores dos parâmetros de escala e translação.



Fonte: O autor.

5.2 Definição e Propriedades

Dada uma *wavelet* ψ , a CWT correspondente é definida da seguinte forma.

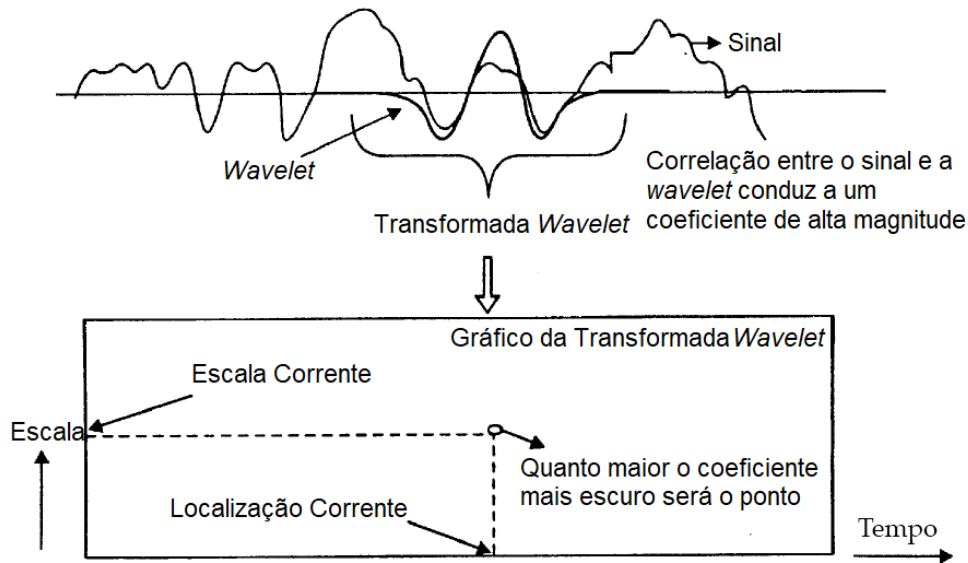
Definição 5.2.1 (Transformada *Wavelet* Contínua). Seja ψ uma *wavelet*. Então, a CWT de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ com respeito a ψ em um dado instante de tempo b e escala a é definida por

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(a, b) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \\ &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

em que $*$ denota o complexo conjugado.

A equação (5.30) indica que a CWT é semelhante a transformada de Fourier, mas agora uma família de *wavelets* é utilizada no lugar das funções seno e cosseno. Ela é denominada de equação de análise, pois representa a projeção da função f sobre as *wavelets* $\psi_{a,b}$. Isso significa que a CWT mensura a correlação local entre f e $\psi_{a,b}$ para todos os valores possíveis de a e b (SHIMA, 2016). Noutros termos, os coeficientes *wavelet* $(W_\psi f)(a, b)$ indicam o quanto a função f se “parece” com as *wavelets* $\psi_{a,b}$. O resultado da CWT é um plano tempo-escala contendo todos os valores de $(W_\psi f)(a, b)$, como descreve a Figura 56. A partir dos coeficientes *wavelet* $(W_\psi f)(a, b)$ é possível definir uma função

Figura 56 – A CWT mensura o grau de semelhança entre um sinal e as versões dilata-
das/comprimidas e transladadas de uma *wavelet*. Isso produz um plano tempo-escala.



Fonte: Adaptado de [Soman, Ramachandran e Resmi \(2010\)](#).

densidade de energia *wavelet* $E(a, b)$ da seguinte forma

$$E(a, b) = |(W_\psi f)(a, b)|^2,$$

a qual fornece a contribuição relativa da energia de f contida em uma escala específica a e localização b . O gráfico de $E(a, b)$ é chamado de escalograma ([ADDISON, 2017](#)). Além disso, a equação (5.30) pode ser reescrita em termos de um produto convolução, como segue

$$(W_\psi f)(a, b) = (f * \overline{\psi_a})(b), \quad (5.31)$$

em que

$$\overline{\psi_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^* \left(\frac{-t}{a} \right).$$

O cômputo da CWT no domínio do tempo não é eficiente, pois requer o cálculo de um produto convolução conforme equação (5.31). Felizmente, a CWT pode ser implementada no domínio da frequência. Com efeito, utilizando o Teorema 5.1 e a equação (5.29) chega-se em

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}^*(a\omega) \exp(j\omega b) d\omega. \end{aligned}$$

Essa abordagem tem a vantagem de substituir uma onerosa convolução no domínio do

tempo por um produto no domínio da frequência seguido do cálculo da transformada de Fourier inversa, que pode ser implementada com algoritmos eficientes (BRONZINO, 2006).

O próximo teorema apresenta alguma das propriedades básicas da CWT. Sua demonstração é uma aplicação direta da Definição 5.2.1 e, portanto, fica como exercício para o leitor.

Teorema 5.2 (Propriedades da CWT). *Se ψ é uma wavelet e $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então*

1) **Linearidade**

$$(W_\psi(\alpha f + \beta g))(a, b) = \alpha(W_\psi f)(a, b) + \beta(W_\psi g)(a, b),$$

em que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) **Propriedade de deslocamento**

$$(W_\psi(T_c f))(a, b) = (W_\psi f)(a, b - c),$$

em que T_c é o operador de translação definido por $(T_c f)(t) = f(t - c)$, com $c \in \mathbb{R}$.

3) **Propriedade de escalonamento**

$$(W_\psi(D_c f))(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c}}(W_\psi f)\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right),$$

em que D_c é o operador de dilatação definido por $(D_c f)(t) = \frac{1}{c}f\left(\frac{t}{c}\right)$, com $c > 0$.

4) **Simetria**

$$(W_\psi f)(a, b) = (W_f \psi)^*\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right),$$

com $a \neq 0$.

5) **Paridade**

$$(W_{P\psi}(Pf))(a, b) = (W_\psi f)(a, -b),$$

em que P é o operador de paridade definido por $(Pf)(t) = f(-t)$.

Na prática, uma transformada só é significativa quando sua transformada inversa correspondente existe. Para o caso da CWT, é possível mostrar que sua inversa existe. De fato, considere o próximo resultado.

Teorema 5.3 (Inversa). *Seja ψ uma wavelet. Então, qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaz*

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(W_\psi f)(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2}.$$

Demonstração. O leitor pode consultar [Mallat \(2009\)](#) e [Kaiser \(2011\)](#). □

Isso significa que f pode ser perfeitamente reconstruída a partir de seus coeficientes *wavelet* $(W_\psi f)(a, b)$ correspondentes.

6 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

A CWT descrita no Capítulo 5 é uma transformada redundante e infactível em termos computacionais. A redundância decorre da não ortogonalidade da família de *wavelets* $\{\psi_{a,b} \in L^2(\mathbb{R}) \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, enquanto a impraticabilidade advém do fato de que ambos os parâmetros, escala e translação, variam continuamente em \mathbb{R} (AKANSU; HADDAD, 2001). Dessa forma, a CWT está longe de ser uma transformada “econômica”, pois ela requer o armazenamento e processamento de uma quantidade de coeficientes *wavelet* muito superior à necessária para que uma reconstrução apropriada da função original seja possível (ALESSIO, 2016). Entretanto, a redundância tem suas vantagens, pois ela aprimora a qualidade da reconstrução e a estabilidade, isto é, o quanto os coeficientes são robustos diante de perturbações (ANTOINE et al., 2004). A ideia da transformada *wavelet* discreta (DWT) é fornecer uma representação mais econômica da função original em termos de seus coeficientes *wavelet* junto com a possibilidade de reconstrução perfeita.

O primeiro passo nesse sentido consiste em discretizar os parâmetros de escala e translação. Em particular, o parâmetro a é discretizado na forma de potências de um certo $a_0 > 1$, de modo que $a = a_0^{-j}$ para $j \in \mathbb{Z}^1$. Em contrapartida, a discretização do parâmetro b deve depender da discretização de a , pois as *wavelets* mais estreitas (alta frequência) devem ser deslocadas a passos pequenos para cobrir todo o intervalo de definição da função, enquanto as *wavelets* mais alongadas (baixa frequência) devem ser deslocadas a passos largos (DAUBECHIES, 1992b). Assim sendo, uma vez que a largura de $\psi(a_0^j t)$ é proporcional a a_0^{-j} , a discretização de b assume a forma $b = kb_0 a_0^{-j}$ para um certo $b_0 > 0$, em que $k \in \mathbb{Z}$. Essa discretização faz alusão à transição de um microscópio, no qual pequenos passos são realizados para observar detalhes de um objeto pequeno, para uma luneta, onde passos largos são feitos para observar características gerais de um objeto maior (ALESSIO, 2016). Portanto, a família de *wavelets* na equação (5.28) é reescrita como

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= \frac{1}{a_0^{-j/2}} \psi\left(\frac{t - kb_0 a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\right) \\ &= a_0^{j/2} \psi(a_0^j t - kb_0). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Substituindo a equação (6.1) na equação (5.30), obtém-se a DWT de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$,

¹ Essa discretização é de tal forma que as maiores escalas são obtidas primeiro e as menores por último à medida que j vai de $-\infty$ à ∞ . A discretização $a = a_0^j$ também é possível, mas a ordem será invertida (ALESSIO, 2016).

isto é,

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(j, k) &= \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt, \end{aligned} \quad (6.2)$$

em que $\{\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ são os coeficientes *wavelet* discretos de f .

Ao efetuar a discretização dos parâmetros de escala e translação, não há nenhuma garantia de que f possa ser reconstruída a partir de seus coeficientes *wavelet* discretos, ao contrário do que acontece com sua contraparte contínua (DEBNATH; SHAH, 2015). Nesse contexto, as seguintes indagações são pertinentes:

1. Os coeficientes $\{\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ caracterizam completamente a função f ? Noutros termos, dada duas funções $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ a equivalência

$$\langle f_1, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f_2, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \forall j, k \in \mathbb{Z} \iff f_1 \equiv f_2$$

se verifica ?

2. É possível reconstruir f de forma numericamente estável a partir de seus coeficientes $\{\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$? Por numericamente estável, entenda-se: um pequeno erro nos coeficientes implica um pequeno erro na função reconstruída.
3. Qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser escrita como uma superposição das funções do conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$?

Para o caso da CWT, a resposta para essas perguntas é prontamente obtida utilizando sua fórmula de reconstrução. Por outro lado, para a DWT Daubechies (1992b) demonstrou que a resposta para as perguntas supracitadas é afirmativa desde que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ seja uma moldura (do inglês *frame*) em $L^2(\mathbb{R})$, isto é, desde que existam duas constantes positivas A e B , com $0 < A \leq B < \infty$, tais que

$$A \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 \leq B \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (6.3)$$

As desigualdades na equação (6.3) garantem a estabilidade e a caracterizabilidade da representação de f em termos das funções do conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Especificamente, o limite superior mostra que se a distância $\|f_1 - f_2\|_{L^2(\mathbb{R})}$ entre duas funções $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ for pequena, então a distância entre as respectivas sequências de coeficientes, dada por $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f_1, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle f_2, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2$, também será (ALESSIO, 2016). Analogamente, o limite inferior mostra que se as sequências de coeficientes $\{\langle f_1, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ e $\{\langle f_2, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ estiverem suficientemente próximas, então necessariamente f_1 e f_2

também estarão (DAUBECHIES, 1992b). As constantes A e B são os limites da moldura, pois elas definem os limites dentro dos quais a energia normalizada dos coeficientes, dada por

$$\frac{1}{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2,$$

deve estar. Isso explica o uso do termo moldura, pois A e B “emolduram” a energia normalizada dos coeficientes *wavelet* discretos. Para o caso $A = B$, tem-se uma moldura justa (do inglês *tight frame*), de modo que a desigualdade em (6.3) torna-se uma igualdade,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 = A \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad (6.4)$$

que expressa uma forma generalizada da identidade de Parseval válida para molduras justas (ALESSIO, 2016). A partir da equação (6.4) é possível obter uma fórmula para a reconstrução de f em termos de seus coeficientes $\{\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, onde $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ é uma moldura justa. Para obtê-la, suponha uma função $g \in L^2(\mathbb{R})$ e considere a identidade de polarização

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4} \left[\|f + g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + i \left(\|f + ig\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|f - ig\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \right]. \quad (6.5)$$

A equação (6.5) tem uma parte real e uma parte imaginária. Então, começando com a parte real e considerando a equação (6.4), obtém-se

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Re}(\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}) &= \|f + g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \frac{1}{A} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f + g, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 - |\langle f - g, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 \right] \\ &= \frac{1}{A} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle g, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 \right. \\ &\quad \left. - |\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle g, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 \right] \\ &= \frac{1}{A} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 4 \operatorname{Re}(\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle \psi_{j,k}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}) \right] \\ &= 4 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle \psi_{j,k}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\operatorname{Re}(\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle \psi_{j,k}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right). \quad (6.6)$$

Realizando um procedimento semelhante para a parte imaginária chega-se em

$$\operatorname{Im}(\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle \psi_{j,k}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right). \quad (6.7)$$

Assim sendo, das equações (6.6) e (6.7) vem que

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle \psi_{j,k}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\langle \frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{j,k}, g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f = \frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{j,k}. \quad (6.8)$$

A equação (6.8) é muito semelhante à obtida para uma base ortonormal, porém nesse contexto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ pode não ser linearmente independente, isto é, há um grau de redundância na representação de f (ABBATE; DECUSATIS; DAS, 2002). Para uma moldura justa na qual $A = B > 1$, o fator $1/A$ na equação (6.8) mensura a redundância na representação de f . Quanto maior o valor de A , maior será a redundância. Nesse caso, o valor de $1/A$ é pequeno a fim de reduzir o valor do somatório duplo para que ele seja igual ao valor da função (ALESSIO, 2016). Contudo, é possível obter uma base ortonormal como um caso especial de uma moldura justa. Com efeito, para uma moldura justa com $A(=B) = 1$ e $\|\psi_{j,k}\| = 1$ para todo $j, k \in \mathbb{Z}$, pode-se mostrar que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal (DAUBECHIES, 1992b). Assim sendo, uma base ortonormal pode ser vista como uma moldura justa sem redundância.

Para o caso geral em que A não é necessariamente igual a B , apenas a ideia da demonstração para a obtenção da fórmula de reconstrução será exposta nesta discussão, pois os detalhes estão além do escopo deste texto. O leitor interessado pode consultar Daubechies (1992b) e Mallat (2009) para uma discussão mais formal e detalhada. Em primeiro lugar, defina o seguinte operador linear

$$\begin{aligned} F: L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^2) \\ f &\mapsto \{\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

que mapeia funções em $L^2(\mathbb{R})$ em seus respectivos coeficientes *wavelet* discretos no espaço das sequências quadraticamente somáveis $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$. O limite superior na equação (6.3) garante que F é contínuo e limitado, enquanto o limite inferior garante que F é inversível e que sua inversa é contínua (ABBATE; DECUSATIS; DAS, 2002; ANTOINE et al., 2004). A partir desse operador, é possível determinar uma moldura dual (do inglês *dual frame*) dada

por $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, cujos elementos são computados diretamente dos elementos da moldura original como segue

$$\widetilde{\psi}_{j,k} = (F^*F)^{-1}\psi_{j,k}, \quad (6.9)$$

em que F^* é o operador adjunto de F . A demonstração da invertibilidade de F^*F e de que $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ é realmente uma moldura com limites B^{-1} e A^{-1} pode ser encontrada em [Daubechies \(1992b\)](#). O operador linear associado à moldura dual é definido por

$$\begin{aligned} \tilde{F}: L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^2) \\ f &\mapsto \{\langle f, \widetilde{\psi}_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

e satisfaz $\tilde{F}^*F = F^*\tilde{F} = I$, em que I é o operador identidade. Esse resultado permite escrever a seguinte fórmula de reconstrução

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \widetilde{\psi}_{j,k}. \quad (6.10)$$

Para utilizar a equação (6.10), basta encontrar a moldura dual por meio da equação (6.9). Isso requer o cômputo do operador $(F^*F)^{-1}$. [Daubechies \(1992b\)](#) determinou uma fórmula explícita para esse operador que converge exponencialmente, a saber:

$$\begin{aligned} (F^*F)^{-1} &= \frac{2}{A+B} \sum_{\ell=0}^{\infty} R^\ell \\ &= \frac{2}{A+B} (I + R + R^2 + \dots), \end{aligned} \quad (6.11)$$

em que

$$R = I - \frac{2}{A+B} F^*F$$

é o operador residual que satisfaz a condição

$$\|R\| \leq \frac{B-A}{B+A} = \frac{B/A-1}{B/A+1} < 1.$$

Dessa forma, substituindo a equação (6.11) na equação (6.9) resulta em

$$\widetilde{\psi}_{j,k} = \frac{2}{A+B} \sum_{\ell=0}^{\infty} R^\ell \psi_{j,k}. \quad (6.12)$$

Portanto, a equação (6.10) converge essencialmente como uma série de potências em $\epsilon = B/A - 1$, de modo que a convergência torna-se mais rápida à medida que a razão B/A , chamada de razão de redundância, torna-se mais próxima da unidade ([YOUNG, 1993](#); [ANTOINE et al., 2004](#)). Nesse sentido, uma boa moldura é aquela na qual $\epsilon \ll 1$, sendo que uma moldura justa é o melhor dos casos. Entretanto, na prática é muito difícil obter A exatamente igual a B , mas é factível obter $A \approx B$ ([FOUFOULA-GEORGIU;](#)

KUMAR, 1994). Nessa situação, pode-se considerar apenas o primeiro termo ($\ell = 0$) da série na equação (6.12) e ainda obter da equação (6.10) uma reconstrução aproximada de alta qualidade, como segue

$$f \approx \frac{2}{A+B} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{j,k}.$$

A pergunta que cabe nesse momento é sobre como obter uma *wavelet* ψ e valores apropriados de a_0 e b_0 de forma que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ seja uma boa moldura. As condições para que isso ocorra foram determinadas por Daubechies (1992b) e são pouco restritivas, pois basta que ψ apresente um decaimento razoável tanto em tempo quanto em frequência e que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ para que existam valores de a_0 e b_0 tais que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ constitua uma boa moldura. Em particular, as *wavelets* de Marr e Morlet produzem boas molduras tomando $a_0 = 2$ (oitavas!) e $b_0 = 1$, para os quais a razão de redundância fica próxima da unidade. A fim de tornar essa razão ainda melhor, Grossmann, Kronland-Martinet e Morlet (1990) sugeriram decompor cada oitava em várias vezes ao escolher $a_0 = 2^{1/M}$, em que $M \geq 1$ é um inteiro que indica o número de vezes por oitava (FOUFOULA-GEORGIU; KUMAR, 1994). Daubechies (1992b) fez uma análise dos limites A e B de uma moldura “multivoz” considerando diversos valores de b_0 e M para as *wavelets* de Marr e Morlet. Essa abordagem tem o efeito de aumentar a resolução da discretização de forma a aprimorar a razão de redundância, acelerar a convergência e fornecer mais liberdade para a escolha de ψ (ABBATE; DECUSATIS; DAS, 2002; ANTOINE et al., 2004).

A mera discretização da CWT conduz a uma DWT redundante, pois a reconstrução da função original é feita por meio de uma moldura, como discutido até o momento. Entretanto, o grau de redundância é certamente menor que o da própria CWT. Para a DWT redundante, a *wavelet* ψ é conhecida de antemão e o problema consiste em determinar uma discretização adequada para que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ seja uma moldura com limites A e B decentes (AKANSU; SMITH, 1995). Por outro lado, a DWT ortonormal (não redundante) impõe que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ seja uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$, de modo que ψ é construída com esta finalidade. Felizmente, para escolhas especiais de ψ , a_0 e b_0 , o conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ forma uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Em particular, para $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$ existe ψ , bem localizada em tempo e frequência, tal que

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (6.13)$$

é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Considerando a decomposição de uma função em termos da base ortonormal em (6.13), a reconstrução é dada por

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (6.14)$$

onde os coeficientes

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad (6.15)$$

são chamados de coeficientes de detalhe. A base ortonormal de *wavelets* para $L^2(\mathbb{R})$ garante a representação mais econômica de f ao eliminar toda a redundância. Além disso, ela permite a reconstrução exata conforme equação (6.14). Esses coeficientes recebem tal denominação porque são determinados a partir de uma análise multirresolução, onde representam a informação necessária (os detalhes) para ir de uma resolução mais grosseira para uma resolução mais fina.

Neste trabalho, os coeficientes de detalhe foram utilizados para o cômputo de um índice diário denominado coeficiente *wavelet* de eficácia (EWC, do inglês *Effectiveness Wavelet Coefficient*). Introduzido por Klausner et al. (2014b), este índice é determinado a cada hora do dia por meio da ponderação do quadrado dos coeficientes de detalhe em três níveis de decomposição ($j = 1, 2$ e 3) da seguinte forma

$$\text{EWC}(i) = \frac{1}{7} \left[\sum_{k \in I_{1,i}} |d_{1,k}|^2 + 2 \sum_{k \in I_{2,i}} |d_{2,k}|^2 + 4 \sum_{k \in I_{3,i}} |d_{3,k}|^2 \right], \quad (6.16)$$

em que i é um inteiro tal que $1 \leq i \leq 24$. Os pesos na equação (6.16) foram escolhidos empiricamente para salientar variações geomagnéticas irregulares de pequena escala. O conjunto $I_{j,i}$ contém os inteiros k que indexam a i -ésima hora do coeficiente de detalhe no j -ésimo nível de decomposição. Essa distinção entre cada nível é necessária, pois os coeficientes de detalhe em um dado nível são obtidos por meio de uma convolução discreta seguida por uma subamostragem por 2 (ver seção 6.3). Dessa forma, o número de pontos da versão amostrada da função original é reduzido pela metade à medida que a decomposição progride, de modo que os índices equivalentes a 1 hora mudam em cada nível. A ideia do índice EWC é facilitar a visualização e análise dos coeficientes de detalhe, visto que os níveis de decomposição de interesse são unificados. Em períodos calmos, o índice EWC apresenta baixas amplitudes. Assim sendo, onde as amplitudes são consideráveis, pode-se associá-las a perturbações (KLAUSNER et al., 2014b). A definição do índice EWC pode ser alterada para compreender uma resolução maior, na ordem de minutos em vez de horas.

Historicamente, a primeira base ortonormal de *wavelets* para $L^2(\mathbb{R})$, em conformidade com a equação (6.13), foi construída por Alfréd Haar em 1910, antes mesmo do termo *wavelet* ter sido concebido (DAUBECHIES, 1992b). A *wavelet* de Haar ψ é definida

por

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.17)$$

de modo que sua transformada de Fourier é dada por

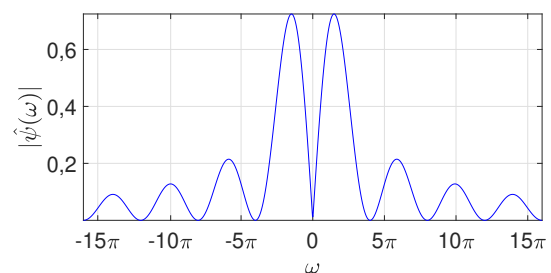
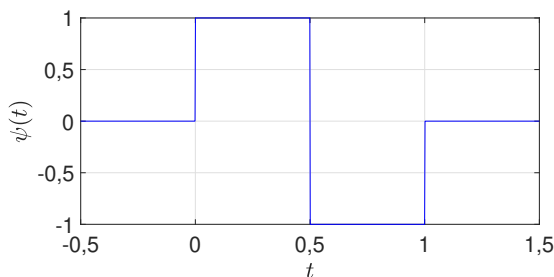
$$\hat{\psi}(\omega) = i \exp\left(-\frac{i\omega}{2}\right) \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\left(\frac{\omega}{4}\right)}. \quad (6.18)$$

As Figuras 57a e 57b ilustram, respectivamente, os gráficos das equações (6.17) e (6.18), sendo que para esta última o gráfico é do valor absoluto porque ela é uma função a valores complexos. Como é possível observar na Figura 57a, a *wavelet* de Haar tem uma boa localização temporal, mas é descontínua no domínio do tempo. Portanto, para funções suaves a base ortonormal gerada pela *wavelet* de Haar não é adequada. Ademais, sua natureza descontínua faz com que sua transformada de Fourier decaia lentamente, segundo $|\omega|^{-1}$, à medida que $\omega \rightarrow \infty$. Assim sendo, ela não apresenta suporte compacto no domínio da frequência (DEBNATH; SHAH, 2015).

A demonstração de que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ é bastante técnica e não será desenvolvida nesta discussão introdutória. Apesar disso, a ortonormalidade

Figura 57 – Gráficos da *wavelet* de Haar ψ e de sua transformada de Fourier $\hat{\psi}$ em valor absoluto. Ela é a mais simples de todas as *wavelets*, sendo a primeira *wavelet* conhecida a gerar uma base ortonormal de *wavelets* para $L^2(\mathbb{R})$ considerando uma discretização diádica.

- (a) Gráfico da *wavelet* de Haar. Observe a descontinuidade em $t = 1/2$. (b) Gráfico da sua transformada de Fourier em valor absoluto.



Fonte: O autor.

desse sistema é fácil de estabelecer. Em primeiro lugar, note que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} \psi(2^j t - k) 2^{j'/2} \psi(2^{j'} t - k') dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} 2^{(j-j')/2} \psi[2^{j-j'}(u + k') - k] \psi(u) du && u = 2^{j'} t - k', du = 2^{j'} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} 2^{(j-j')/2} \psi[2^{j-j'} u - (k - 2^{j-j'} k')] \psi(u) du.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Para duas *wavelets* de Haar na mesma escala ($j = j'$), a equação (6.19) assume a forma

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \psi[u - (k - k')] \psi(u) du \\
&= \delta_{k,k'},
\end{aligned}$$

pois os suportes de ψ e $\psi_{0,k-k'}$ são, respectivamente, os intervalos $[0, 1]$ e $[k - k', 1 + k - k']$, os quais são disjuntos a não ser que $k = k'$. Por outro lado, suponha escalas diferentes ($j \neq j'$) e considere que $j' > j$. Tomando $s = k - 2^{j-j'} k' \in \mathbb{Z}$, pode-se reescrever a equação (6.19) como segue

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \psi_{j-j',s}, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{6.20}$$

O suporte de $\psi_{j-j',s}$ é dado por $I = [2^{j-j'} s, 2^{j-j'}(s + 1)]$, cujo comprimento é $2^{j-j'}$. Assim, ele pode assumir os valores 2, 4, 8, ..., tendo em vista que j' e j são inteiros tais que $j' > j$. Dessa forma, o suporte de ψ , $[0, 1]$, sempre estará contido em um intervalo no qual $\psi_{j-j',s}$ é constante, como ilustra a Figura 58 para o caso das *wavelets* $\psi_{-1,s}$ e $\psi_{-2,s}$, com $s = -1, 0, 1$. Portanto, o produto interno na equação (6.20) será proporcional a própria ψ , de modo que ele deve ser nulo.

Em termos de localização tempo-frequência, a contraparte da *wavelet* de Haar é a *wavelet* de Shannon, que também é conhecida por *wavelet* de Littlewood-Paley (VIDAKOVIC, 2009). Ela é definida por

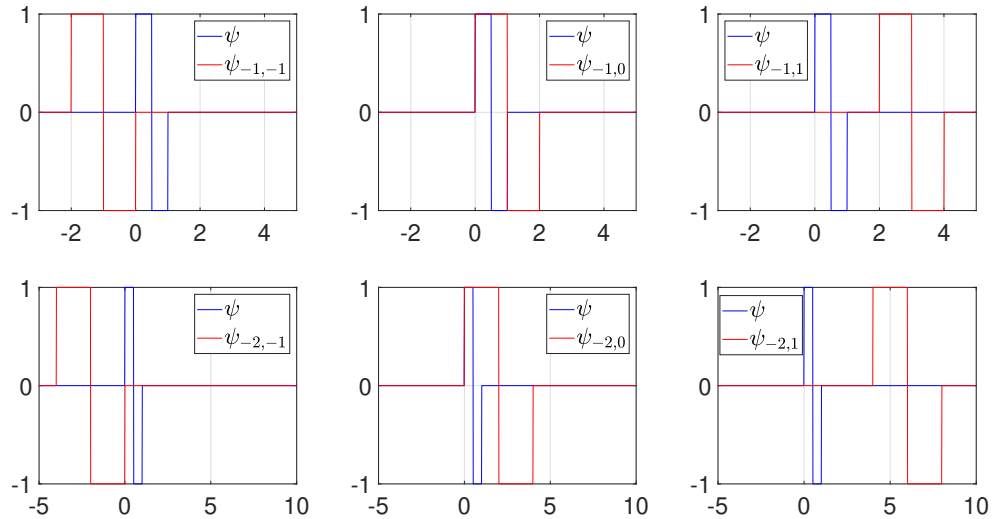
$$\psi(t) = \frac{\text{sen}(2\pi t) - \text{sen}(\pi t)}{\pi t}, \tag{6.21}$$

de maneira que sua transformada de Fourier é da forma

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{para } \omega \in I, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{6.22}$$

em que $I = [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$. As Figuras 59a e 59b ilustram os gráficos das equações (6.21) e (6.22), respectivamente. Observando a Figura 59b, nota-se que $\hat{\psi}$ tem suporte compacto, de modo que ψ é de classe C^∞ . Além disso, verifica-se que $\hat{\psi}$ é descontínua em $\omega = \pm\pi$ e $\omega = \pm 2\pi$. Consequentemente, $|\psi(t)|$ apresenta um decaimento lento no domínio

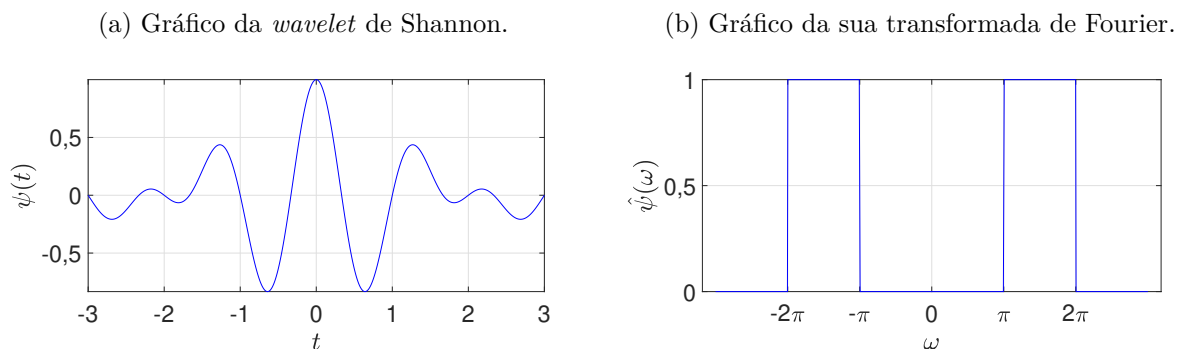
Figura 58 – Para o caso $j' > j$, o suporte de ψ , que tem comprimento 1, sempre estará contido em um intervalo no qual $\psi_{j-j',s}$ é constante. A presente figura ilustra este fato para o caso das *wavelets* $\psi_{-1,s}$ (parte superior) e $\psi_{-2,s}$ (parte inferior), com $s = -1, 0, 1$.



Fonte: O autor.

do tempo, segundo $|t|^{-1}$ no infinito (MALLAT, 2009). Assim como ocorre com a *wavelet* de Haar, para a *wavelet* de Shannon o conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ também é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ considerando a discretização diádica. A demonstração deste fato é baseada no suporte I de $\hat{\psi}$. Definindo $I_j = [-2^{j+1}\pi, -2^j\pi] \cup [2^j\pi, 2^{j+1}\pi]$, com $I_0 = I$, nota-se de imediato que $I_j \cap I_\ell = \emptyset$ para $j \neq \ell$, em que $j, \ell \in \mathbb{Z}$. Além disso, tem-se $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \overline{I_j} = \mathbb{R}$. Noutros termos, os conjuntos I_j cobrem toda a reta real sem sobreposições e sem deixar lacunas. Em primeiro lugar, é preciso verificar que $\|\psi_{j,k}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ para todo $j, k \in \mathbb{Z}$, o que pode ser facilmente demonstrado utilizando o Teorema 5.1 e uma simples substituição.

Figura 59 – A *wavelet* de Shannon pode ser vista como a contraparte da *wavelet* de Haar em termos de localização tempo-frequência. Isso significa que a *wavelet* de Shannon apresenta uma boa localização em frequência (tem suporte compacto), mas uma má localização em tempo.



Fonte: O autor.

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\psi_{j,k}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\psi_{j,k}(t)|^2 dt \\
&= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(u)|^2 du && u = 2^{-j}\omega, du = 2^{-j}d\omega \\
&\stackrel{(6.22)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_I du \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donde $\|\psi_{j,k}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \forall j, k \in \mathbb{Z}$. Por conseguinte, é preciso verificar que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal. Começando com as *wavelets* em escalas diferentes, $j \neq \ell$, nota-se que os suportes das funções $\hat{\psi}_{j,k}$ e $\hat{\psi}_{\ell,m}$ não se sobrepõem, isto é, $I_j \cap I_\ell = \emptyset$. Dessa forma, pelo Teorema 5.1 segue que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\psi}_{j,k}, \hat{\psi}_{\ell,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora, suponha que as escalas sejam iguais de modo que $j = \ell$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\psi}_{j,k}, \hat{\psi}_{j,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \exp[-i(k-m)2^{-j}\omega] 2^{-j} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(u)|^2 \exp[-i(k-m)u] du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_I \exp[-i(k-m)u] du \\
&= \delta_{k,m}.
\end{aligned}$$

Isso demonstra que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal. Por fim, resta verificar que a identidade de Parseval se verifica para confirmar que este sistema ortonormal é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^{-j}}{4\pi^2} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp(ik2^{-j}\omega) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)} d\omega \right|^2 \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^{-j}}{4\pi^2} \left| \int_{I_j} \hat{f}(\omega) \exp(ik2^{-j}\omega) d\omega \right|^2 \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^j}{4\pi^2} \left| \int_{I_0} \hat{f}(2^j u) \exp(iku) du \right|^2,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\hat{f}(2^j(u - 2\pi))\chi_{[0,\pi]}(u) \right. \\
&\quad \left. + \hat{f}(2^j u)\chi_{[\pi,2\pi]}(u)] \exp(iku) du \right|^2 \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2^j}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{f}(2^j(u - 2\pi))\chi_{[0,\pi]}(u) + \hat{f}(2^j u)\chi_{[\pi,2\pi]}(u)|^2 du \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2^j}{2\pi} \int_{I_0} |\hat{f}(2^j u)|^2 du \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{I_j} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,
\end{aligned}$$

como se queria demonstrar.

Como o leitor já deve ter percebido, as *wavelets* de Haar e de Shannon estão em extremidades opostas no que tange à localização tempo-frequência. A primeira fornece uma boa localização no domínio do tempo, enquanto a última fornece uma boa localização no domínio da frequência. Apesar disso, elas não são bem localizadas em seus respectivos domínios opostos (frequência para a Haar e tempo para a Shannon) por conta de descontinuidades nos domínios onde apresentam uma boa localização (KAISER, 2011). Nesse sentido, outras *wavelets* que também geram bases ortonormais para $L^2(\mathbb{R})$ foram construídas ao longo do tempo. Elas compartilham das melhores propriedades das *wavelets* de Haar e de Shannon, isto é, elas apresentam excelentes propriedades de localização em ambos os domínios (DAUBECHIES, 1992b). Por exemplo, Strömberg (1982) construiu uma série de *wavelets* com decaimento exponencial e de classe C^k (k arbitrário, mas finito). As *wavelets* de Strömberg foram as primeiras *wavelets* ortonormais suaves a serem descobertas. Naquela altura, a motivação de Strömberg era encontrar uma base ortonormal para os espaços de Hardy (MCLEAN, 2018). Pouco tempo depois, no verão de 1985, Meyer (1985) introduziu as *wavelets* de Meyer, as quais são suaves e decaem rapidamente (DAUBECHIES, 1988; BATTLE, 1999). Elas são descritas no domínio da frequência por meio da seguinte equação

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} \exp(i\omega/2) \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1 \right) \right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ \exp(i\omega/2) \operatorname{cos} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} |\omega| - 1 \right) \right], & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.23)$$

em que ν é uma função de classe C^k ou C^∞ que vai de 0 até 1 no intervalo $[0, 1]$ e satisfaz

$$\forall t \in [0, 1], \quad \nu(t) + \nu(1 - t) = 1.$$

Um exemplo típico de tal função devido a Daubechies (1992b) é

$$\nu(t) = t^4(35 - 84t + 70t^2 - 20t^3), \quad (6.24)$$

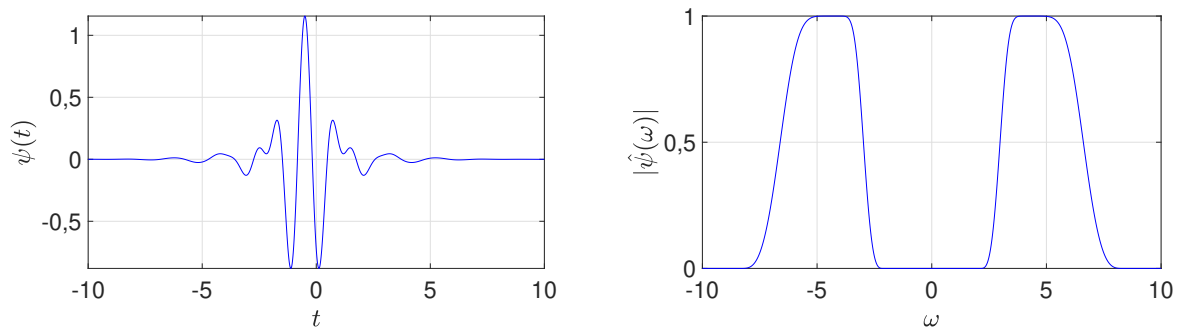
porém mais funções são possíveis² (VIDAKOVIC, 2009; MALLAT, 2009). A Figura 60b ilustra o gráfico da equação (6.23) em valor absoluto, considerando o polinômio da equação (6.24). Como é possível perceber, as *wavelets* de Meyer são obtidas pela suavização da *wavelet* de Shannon no domínio da frequência (FRAZIER, 2006). Consequentemente, no domínio do tempo elas apresentam um decaimento mais rápido que o recíproco de qualquer polinômio no infinito, ao contrário do que acontece com a *wavelet* de Shannon, cujo decaimento é segundo $|t|^{-1}$ no infinito. Além disso, as *wavelets* de Meyer também são de classe C^∞ , tendo em vista que suas transformadas de Fourier têm suporte compacto (DAUBECHIES, 1992b). A Figura 60a ilustra a *wavelet* de Meyer no domínio do tempo associada à Figura 60b. Subsequente a construção das *wavelets* de Meyer, Battle (1987) e Lemarié (1988) construíram, de forma independente e por meio de diferentes métodos, *wavelets* de classe C^k (k arbitrário, mas finito) que decaem exponencialmente (DAUBECHIES, 1988). Apesar das semelhanças com as *wavelets* de Strömberg em termos de propriedades, as *wavelets* de Battle-Lemarié são diferentes. Naquela altura, Battle e Lemarié não estavam cientes do trabalho de Strömberg (WOJTASZCZYK, 1997).

No outono de 1986, Stéphane Mallat trouxe o seu conhecimento de algoritmos

² A função ν definida por $\nu(t) = t$ é uma delas.

Figura 60 – As *wavelets* de Meyer são obtidas aprimorando a *wavelet* de Shannon no domínio da frequência, onde as descontinuidades são substituídas por curvas suaves. A presente figura ilustra a *wavelet* de Meyer para a transformada de Fourier definida em termos da função ν da equação (6.24).

- (a) Gráfico da *wavelet* de Meyer, onde é possível observar o seu rápido decaimento. (b) Gráfico da transformada de Fourier em valor absoluto da *wavelet* de Meyer.



Fonte: O autor.

piramidais da área de processamento de imagens para uma colaboração com Yves Meyer, que por sua vez trouxe conhecimentos de análise harmônica que remontam dos trabalhos de Littlewood-Paley e Calderón (MERRILL, 2018). Eles perceberam que essas diferentes construções de bases ortonormais de *wavelets* para $L^2(\mathbb{R})$ podem ser realizadas de forma sistemática por meio de uma ferramenta matemática formal chamada de análise multirresolução (MEYER, 1986; DAUBECHIES, 1988; MALLAT, 1989b). Além de fornecer uma explicação satisfatória para a construção de todas as bases ortonormais de *wavelets* citadas anteriormente, a análise multirresolução ainda permite a construção de novas bases (DAUBECHIES, 1992b). Os detalhes são discutidos nas seções 6.1 e 6.2. A partir de uma análise multirresolução, Mallat desenvolveu um algoritmo eficiente que permite o cômputo da DWT ortonormal de uma função (análise) e de sua inversa (síntese) utilizando banco de filtros (OUAHABI, 2012). Os detalhes são discutidos na seção 6.3.

Os seguintes operadores em $L^2(\mathbb{R})$ serão utilizados ao longo da discussão a ser desenvolvida neste capítulo:

1. **(Translação)** Para $k \in \mathbb{Z}$, o operador $T_k : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ é definido por

$$(T_k f)(t) := f(t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. **(Dilatação)** Para $c > 0$, o operador $D_c : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ é definido por

$$(D_c f)(t) := \frac{1}{\sqrt{c}} f\left(\frac{t}{c}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, quando $c = 1/2$ o operador $D_{1/2}$ será denotado por D , de modo que para $j \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$(D^j f)(t) = 2^{j/2} f(2^j t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

6.1 Análise Multirresolução

A ideia da análise multirresolução é representar uma função em $L^2(\mathbb{R})$ como um limite de aproximações sucessivas, em que cada uma é uma versão suavizada da função original. As aproximações sucessivas correspondem à diferentes resoluções, conduzindo ao termo análise multirresolução (DAUBECHIES, 1988). Essas aproximações são fornecidas por uma função escala, que é especificada por um filtro discreto chamado filtro escala. Eles são utilizados para a construção de uma função *wavelet* que gera uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ e de um filtro *wavelet* associado (ver seção 6.2). Por meio destes filtros, algoritmos rápidos para análise e síntese de funções utilizando *wavelets* são implementados com banco de filtros (ver seção 6.3). O incremento de informação necessário para ir de uma aproximação em uma resolução mais grosseira para uma aproximação em uma resolução

mais fina é fornecido pela função *wavelet*. Precisamente, uma análise multiresolução é definida da seguinte forma.

Definição 6.1.1 (Análise Multirresolução). Uma análise multirresolução (MRA, do inglês *Multiresolution Analysis*) consiste de uma sequência de subespaços fechados $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ e de uma função $\varphi \in V_0$ que satisfazem as seguintes condições:

(a) (**Aninhamento**) Os subespaços V_j são aninhados, isto é,

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots . \quad (6.25)$$

(b) (**Separação**) A interseção dos subespaços é trivial, isto é,

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}. \quad (6.26)$$

(c) (**Densidade**) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, isto é,

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}). \quad (6.27)$$

(d) (**Escala**) Os subespaços V_j e V_{j+1} são relacionados por escala, isto é,

$$f \in V_j \iff Df \in V_{j+1} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}. \quad (6.28)$$

(e) (**Invariância à translação**) O espaço V_0 é invariante a translações por um inteiro, isto é,

$$f \in V_0 \implies T_k f \in V_0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \quad (6.29)$$

(f) (**Base ortonormal**)

$$\text{O conjunto } \{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ é uma base ortonormal para } V_0. \quad (6.30)$$

A função φ na Definição 6.1.1 é chamada de função escala da MRA ou de *wavelet-pai*³. Ela determina completamente todos os subespaços V_j , a começar por V_0 como assegura a condição (6.30). Com isso, os outros subespaços também ficam determinados, pois eles estão relacionados por escala de acordo com a condição (6.28). Em outras palavras, dada uma função escala φ , as condições (6.30) e (6.28) implicam que é possível construir uma base ortonormal para cada V_j ao dilatar e transladar a função escala φ . Com efeito, considere o seguinte lema.

³ Nesta discussão, assumamos que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \neq 0$.

Lema 6.1. *Suponha que $(V_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ é uma MRA para $L^2(\mathbb{R})$ com função escala φ . Suponha que $j \in \mathbb{Z}$ e considere o conjunto de funções $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, em que $\varphi_{j,k}$ é definida por*

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}(t) &= 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \\ &= (D^j T_k \varphi)(t).\end{aligned}\tag{6.31}$$

Então, $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_j .

Demonstração. Fixe $j \in \mathbb{Z}$. Para mostrar que $\{D^j T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_j , basta verificar que $\{D^j T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é tanto um sistema ortonormal em V_j quanto um conjunto gerador para V_j . Em primeiro lugar, observe que a propriedade (e) da Definição 6.1.1 mostra que cada $T_k \varphi$ pertence a V_0 , de modo que $D^j T_k \varphi \in V_j$ pela propriedade (d). Para ver que $\{D^j T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal em V_j , suponha $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Então, note que

$$\begin{aligned}\langle D^j T_k \varphi, D^j T_\ell \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j t - k) \overline{\varphi(2^j t - \ell)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(u - k) \overline{\varphi(u - \ell)} du && u = 2^j t, du = 2^j dt \\ &= \langle T_k \varphi, T_\ell \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \delta_{k,\ell},\end{aligned}\tag{6.32}$$

pois $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal em V_0 de acordo com a propriedade (e) da Definição 6.1.1.

Para ver que $\{D^j T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um conjunto gerador para V_j , suponha que $f \in V_j$. Então, vem da propriedade (d) da Definição 6.1.1 que $\exists g \in V_0$ tal que $f = D^j g$. Como $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_0 , sabe-se que g é definida como

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g, T_k \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} (T_k \varphi)(t).\tag{6.33}$$

Dessa forma, por meio da equação (6.33) verifica-se que f é dada por

$$\begin{aligned}f(t) &= (D^j g)(t) \\ &= 2^{j/2} g(2^j t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{j/2} \langle g, T_k \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} (T_k \varphi)(2^j t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} g(\tau) \overline{\varphi(\tau - k)} d\tau \varphi(2^j t - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j} \tau) \overline{\varphi(\tau - k)} d\tau \varphi(2^j t - k),\end{aligned}\tag{6.34}$$

em que a última igualdade é obtida utilizando $2^{j/2} g(2^j t) = f(2^{-j} t)$. Fazendo as substituições

$u = 2^{-j}\tau$ e $du = 2^{-j}d\tau$ na equação (6.34) obtém-se

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{2^{j/2} \varphi(2^j u - k)} du 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} (D^j T_k \varphi)(t), \end{aligned}$$

donde

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} D^j T_k \varphi. \quad (6.35)$$

Portanto, as equações (6.32) e (6.35) mostram que $\{D^j T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_j . \square

Cada subespaço V_j é frequentemente interpretado como um espaço de aproximação na resolução 2^j . A aproximação de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ nessa resolução é definida pela projeção ortogonal de f em V_j (MALLAT, 1989b). Nesse sentido, defina $P_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$ como sendo o operador de projeção ortogonal de f em V_j . Então, como o Lema 6.1 assegura que o conjunto $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_j para todo $j \in \mathbb{Z}$, pode-se escrever

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad (6.36)$$

em que

$$a_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad (6.37)$$

são chamados de coeficientes de aproximação. A condição (6.25) retrata a melhora (piora) da aproximação dada pela equação (6.36) à medida que a resolução aumenta (decrece). Ela também indica que a aproximação na resolução 2^{j+1} contém toda a informação necessária para construir a aproximação da mesma função na resolução mais grosseira 2^j . Além disso, a condição (6.27) garante que quando a resolução aumenta ($j \rightarrow \infty$), a função aproximada converge para a função original. Em contrapartida, a condição (6.26) assegura que conforme a resolução decresce para zero ($j \rightarrow -\infty$), a aproximação contém cada vez menos informação e eventualmente converge para zero. Em suma, tem-se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$$

e

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0.$$

O próximo lema fornece as condições necessárias e suficientes para que as versões deslocadas por um inteiro de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ forme um sistema ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$. Este resultado será útil na discussão a ser desenvolvida a seguir.

Lema 6.2. *Seja \hat{f} a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$ de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$. Então, o conjunto de funções $\{T_k f\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$ se, e somente se,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1$$

para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que $\{T_k f\}_{k \in \mathbb{Z}}$ seja um sistema ortonormal. Então, segue por definição que $\delta_{k,\ell} = \langle T_k f, T_\ell f \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ para $k, \ell \in \mathbb{Z}$, em que $\delta_{k,\ell}$ é a função delta de Kronecker. Dessa forma, note que

$$\begin{aligned} \delta_{k,\ell} &= \langle T_k f, T_\ell f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t-k) \overline{f(t-\ell)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u - (k-\ell)) \overline{f(u)} du && u = t - \ell, du = dt \\ &= \langle T_{k-\ell} f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\langle T_k f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{k,0} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \quad (6.38)$$

Então, utilizando o Teorema 5.1 na equação (6.38) chega-se em

$$\begin{aligned} \delta_{k,0} &= \langle T_k f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{T_k f}, \hat{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega k) \hat{f}(\omega) \overline{\hat{f}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 \exp(-ik\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |\hat{f}(\omega)|^2 \exp(-ik\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Para colocar a equação (6.39) em uma forma conveniente para o propósito desta demonstração, utilize a substituição $\mu = \omega - 2\pi n$ para mapear o intervalo de integração de $[2\pi k, 2\pi(k+1))$ para $[0, 2\pi)$. Assim sendo, a equação (6.39) assume a forma

$$\begin{aligned} \delta_{k,0} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \exp[-ik(\mu + 2\pi n)] |\hat{f}(\mu + 2\pi n)|^2 d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\mu + 2\pi n)|^2 \right) \exp(-ik\mu) d\mu. \end{aligned} \quad (6.40)$$

A equação (6.40) corresponde aos coeficientes c_k da série de Fourier de uma função F

periódica de período 2π definida por

$$F(\mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\mu + 2\pi n)|^2. \quad (6.41)$$

Consequentemente, a expansão em série de Fourier da equação (6.41) é dada por

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k,0} \exp(ik\mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\mu + 2\pi n)|^2.$$

Logo,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\mu + 2\pi n)|^2 = 1 \quad \text{para quase todo } \mu \in \mathbb{R}.$$

Invertendo os passos no argumento acima prova a recíproca. \square

O próximo resultado mostra que a função escala φ de uma MRA satisfaz uma equação de dilatação. Essa equação é fundamental na construção de *wavelets* e no desenvolvimento de um algoritmo rápido para a DWT ortonormal.

Teorema 6.1 (Equação de dilatação). *Suponha que $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma MRA para $L^2(\mathbb{R})$ com função escala φ . Então, φ satisfaz a equação de dilatação*

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k), \quad (6.42)$$

em que

$$\begin{aligned} h_k &= \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(2t - k)} dt. \end{aligned} \quad (6.43)$$

A sequência $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, cujos termos são dados pela equação (6.43), é chamada de filtro escala⁴. No domínio da frequência, a equação de dilatação em (6.42) é expressa como

$$\hat{\varphi}(2\omega) = \hat{m}_\varphi(\omega) \hat{\varphi}(\omega), \quad (6.44)$$

em que $\hat{m}_\varphi \in L^2([0, 2\pi])$ é uma função periódica de período 2π chamada de função de transferência. A função de transferência expressa o comportamento do filtro escala no domínio da frequência e satisfaz a seguinte condição de ortogonalidade

$$|\hat{m}_\varphi(\omega)|^2 + |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (6.45)$$

⁴ Ao longo deste capítulo, considera-se que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| < \infty$ para fazer jus ao uso do termo *filtro*.

para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$. Ademais, para $\varphi_{j,k}$ definido na equação (6.31), tem-se

$$\varphi_{j,\ell}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2\ell} \varphi_{j+1,k}(t). \quad (6.46)$$

Demonstração. Uma vez que φ é a função escala de uma MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, segue das propriedades (a) e (e) da Definição 6.1.1 que $\varphi \in V_0 \subset V_1$, de modo que $\varphi \in V_1$. Então, pelo Lema 6.1 sabe-se que φ pode ser expresso como uma combinação linear dos elementos da base ortonormal $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_1 . Assim sendo, existem números complexos h_k , com $k \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}. \quad (6.47)$$

Posto que a base é ortonormal, o ℓ -ésimo coeficiente da equação (6.47) é obtido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi_{1,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}, \varphi_{1,\ell} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \langle \varphi_{1,k}, \varphi_{1,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= h_\ell. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Portanto, das equações (6.47) e (6.48) tem-se

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k),$$

com $h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Isso mostra as equações (6.42) e (6.43).

Por conseguinte, a equação (6.44) é obtida pela aplicação direta da transformada de Fourier na equação (6.42). Procedendo dessa forma, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(2t - k) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \exp \left[-i\omega \left(\frac{u+k}{2} \right) \right] du && u = 2t - k, du = 2dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp \left(-i\frac{\omega}{2} k \right) \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \exp \left(-i\frac{\omega}{2} u \right) du \right\}}_{\hat{\varphi}(\omega/2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp \left(-i\frac{\omega}{2} k \right) \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2} \right) \\ &= \hat{m}_\varphi \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2} \right), \end{aligned}$$

em que

$$\hat{m}_\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-i\omega k). \quad (6.49)$$

Isso demonstra a equação (6.44). A função \hat{m}_φ na equação (6.49) é periódica de período 2π , pois

$$\begin{aligned} \hat{m}_\varphi(\omega + 2\pi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp[-i(\omega + 2\pi)k] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-i\omega k) \underbrace{\exp(-i2\pi k)}_{=1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-i\omega k) \\ &= \hat{m}_\varphi(\omega). \end{aligned}$$

Para verificar que \hat{m}_φ pertence ao espaço $L^2([0, 2\pi])$, basta mostrar que $\|\hat{m}_\varphi\|_{L^2([0, 2\pi])}$ é finito. Utilizando a equação (6.49) e algumas propriedades de produto interno, obtém-se

$$\begin{aligned} \|\hat{m}_\varphi\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-i\omega k), \hat{m}_\varphi \right\rangle_{L^2([0, 2\pi])} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \langle \exp(-i\omega k), \hat{m}_\varphi \rangle_{L^2([0, 2\pi])} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{\langle \hat{m}_\varphi, \exp(-i\omega k) \rangle_{L^2([0, 2\pi])}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \left\langle \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell \exp(-i\omega \ell), \exp(-i\omega k) \right\rangle_{L^2([0, 2\pi])} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell \overline{\langle \exp(-i\omega \ell), \exp(-i\omega k) \rangle_{L^2([0, 2\pi])}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_\ell} \langle \exp(-i\omega k), \exp(-i\omega \ell) \rangle_{L^2([0, 2\pi])}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

O conjunto de exponenciais complexas $\{\exp(-i\omega k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma um sistema ortogonal em $L^2([0, 2\pi])$, visto que $\langle \exp(-i\omega k), \exp(-i\omega \ell) \rangle = 2\pi \delta_{k, \ell}$. Assim sendo, a equação (6.50) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \|\hat{m}_\varphi\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 &= \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_\ell} \delta_{k, \ell} \\ &= \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 \\ &= \pi \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty. \end{aligned}$$

A equação (6.45) é obtida utilizando Lema 6.2, tendo em vista que $\{\varphi_{0, k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um

sistema ortonormal em V_0 , junto com a equação (6.44). De fato,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 \\ &\stackrel{(6.44)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \pi k\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi k\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (6.51)$$

para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$. Em particular, substituindo ω por 2ω na equação (6.51) resulta em

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi k)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + \pi k)|^2. \quad (6.52)$$

Utilizando a periodicidade de \hat{m}_φ e dividindo o somatório na equação (6.52) em duas partes, uma contendo apenas os índices pares e a outra contendo apenas os índices ímpares, obtém-se

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_\varphi(\omega + 2\pi k)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_\varphi(\omega + (2k+1)\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + (2k+1)\pi)|^2 \\ &= |\hat{m}_\varphi(\omega)|^2 \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2}_{=1} + |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)|^2 \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + \pi + 2\pi k)|^2}_{=1} \\ &= |\hat{m}_\varphi(\omega)|^2 + |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)|^2 \end{aligned}$$

para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$. Isso mostra a equação (6.45).

Por fim, para obter a equação (6.46) basta utilizar a equação (6.42) na equação (6.31). Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi_{j,\ell}(t) &= 2^{j/2} \varphi(2^j t - \ell) \\ &= 2^{j/2} 2^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2(2^j t - \ell) - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - (k + 2\ell)). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Fazendo a substituição $m = k + 2\ell$ na equação (6.53) e observando que $k = m - 2\ell$, obtém-se

$$\begin{aligned} \varphi_{j,\ell}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2\ell} 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2\ell} \varphi_{j+1,m}(t). \end{aligned}$$

Isso mostra a equação (6.46) e completa a demonstração. \square

Proposição 6.1.1 (Propriedades do filtro escala). *Suponha que $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma MRA para $L^2(\mathbb{R})$ com função escala φ . Se $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é o filtro escala, então*

- (i) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$,
- (ii) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k-2\ell}} = \delta_{0,\ell}$ para todo $\ell \in \mathbb{Z}$,
- (iii) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1$.

Demonstração. Para obter (i), basta integrar ambos os lados da equação de dilatação em (6.42) e efetuar uma simples substituição. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(2t - k) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) du. \end{aligned} \quad (6.54)$$

em que $u = 2t - k$ e $du = 2dt$. Visto que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \neq 0$, decorre da equação (6.54) que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = 1 \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}.$$

Agora, suponha que $\ell \in \mathbb{Z}$. Então, considere o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi_{0,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}, \varphi_{0,\ell} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \langle \varphi_{1,k}, \varphi_{0,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Tome $j \in \mathbb{Z}$ fixo, mas arbitrário, e note que

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\langle \varphi_{j+1,k}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2\ell} \varphi_{j+1,m} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} && \text{use (6.46)} \\ &= \overline{\left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2\ell} \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j+1,k} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_{m-2\ell}} \langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j+1,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \overline{h_{k-2\ell}}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

pois $\varphi_{j+1,k}$ e $\varphi_{j+1,m}$ fazem parte da base ortonormal $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_{j+1} , conforme Lema 6.1. Em particular, fazendo $j = 0$ na equação (6.56) e utilizando esse resultado na equação (6.55), obtém-se

$$\langle \varphi, \varphi_{0,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k-2\ell}}, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}. \quad (6.57)$$

Como $\varphi \equiv \varphi_{0,0}$ e $\varphi_{0,\ell}$ fazem parte da base ortonormal $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_0 , a equação (6.57) pode ser reescrita como

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k-2\ell}} = \delta_{0,\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}.$$

Isso mostra (ii). A obtenção de (iii) é trivial, pois basta fazer $\ell = 0$ em (ii). \square

Como mencionado anteriormente, a aproximação de uma função na resolução 2^j é dada por sua projeção ortogonal sobre V_j . Analogamente, o incremento de informação necessário para aprimorar a resolução de 2^j para 2^{j+1} é dado pela projeção ortogonal sobre o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , denotado por W_j . Isso motiva a seguinte definição.

Definição 6.1.2. Dada uma MRA com espaços de aproximação $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, denote por W_j o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , o qual consiste das funções em V_{j+1} que são ortogonais as funções em V_j , isto é,

$$W_j = \{f \in V_{j+1} \mid \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0, \text{ para todo } g \in V_j\}.$$

Assim sendo, tem-se que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (6.58)$$

em que \oplus denota soma direta. Os subespaços W_j são chamados de espaços de detalhe. O operador de diferença $Q_j f := P_{j+1} f - P_j f$ é a projeção ortogonal de $f \in L^2(\mathbb{R})$ em W_j . A demonstração dessa asserção pode ser encontrada em [Pereyra e Ward \(2012\)](#).

A seguir, alguns resultados importantes envolvendo os espaços de detalhe W_j são enunciados ([CHRISTENSEN, 2010](#)). O primeiro deles afirma que os espaços W_j são mutuamente ortogonais, isto é, para $j, \ell \in \mathbb{Z}$ tais que $j \neq \ell$, tem-se $W_j \perp W_\ell$. Com efeito, suponha que $j > \ell$. Então, $W_\ell \subset V_{\ell+1} \subset V_j$ por conta da condição (6.25). Por construção, sabe-se que $W_j \perp V_j$. Logo, $W_j \perp W_\ell$ como se queria demonstrar. O segundo resultado afirma que os espaços W_j herdam a condição (6.28) dos espaços de aproximação V_j , como mostra o próximo lema cuja demonstração é devida a [Christensen \(2010\)](#).

Lema 6.3. Para cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$W_j = D^j(W_0).$$

Demonstração. Suponha que $f \in W_0 \subset V_1$. Então, decorre do aninhamento dos espaços de aproximação que $D^j f \in D^j(W_0) \subset V_{j+1}$. Seja $g \in V_j$. Então, $\exists v \in V_0$ tal que $g = D^j v$.

Assim sendo, tem-se que

$$\begin{aligned}\langle D^j f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle D^j f, D^j v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \langle f, v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois $f \in W_0$ e $v \in V_0$. Dessa forma, tem-se $D^j f \in W_j$, de modo que $D^j(W_0) \subset W_j$.

Por outro lado, suponha que $f \in W_j \subset V_{j+1}$. Então, $\exists g \in V_1$ tal que $f = D^j g$. Fazendo $g = v + w$, com $v \in V_0$ e $w \in W_0$, obtém-se

$$f = D^j v + D^j w. \quad (6.59)$$

Utilizando a equação (6.59) e sabendo que $f \in W_j$ e $D^j v \in V_j$, chega-se em

$$\begin{aligned}0 &= \langle f, D^j v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \langle D^j v, D^j v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle D^j w, D^j v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\| D^j v \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \underbrace{\langle w, v \rangle_{L^2(\mathbb{R})}}_{\rightarrow 0} \\ &= \left\| D^j v \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,\end{aligned}$$

de modo que $D^j v = 0$. Substituindo este resultado na equação (6.59), obtém-se $f = D^j w \in D^j(W_0)$. Logo, $W_j \subset D^j(W_0)$. Isso completa a demonstração. \square

O último resultado decorre de uma aplicação iterada da equação (6.58). Suponha dois inteiros L e J tais que $L > J$. Então,

$$\begin{aligned}V_L &= V_{L-1} \oplus W_{L-1} \\ &= V_{L-2} \oplus W_{L-2} \oplus W_{L-1} \\ &= V_{L-3} \oplus W_{L-3} \oplus W_{L-2} \oplus W_{L-1} \\ &\vdots \\ &= V_J \oplus W_J \oplus W_{J+1} \oplus \cdots \oplus W_{L-1},\end{aligned}$$

donde

$$V_L = V_J \oplus \left(\bigoplus_{j=J}^{L-1} W_j \right). \quad (6.60)$$

Uma vez que $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma MRA, V_L e V_J tendem, respectivamente, para $L^2(\mathbb{R})$ e $\{0\}$ à medida que L e J vão, respectivamente, para $+\infty$ e $-\infty$ (MALLAT, 2009). Portanto, a

equação (6.60) pode ser reescrita como

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j, \quad (6.61)$$

que corresponde a uma decomposição do espaço $L^2(\mathbb{R})$ em subespaços que são mutuamente ortogonais.

Esses resultados permitem chegar a conclusões importantes partindo do espaço W_0 . Com efeito, a seção 6.2 mostra que a função escala φ de uma MRA determina uma função $\psi \in W_0$ tal que o conjunto $\{T_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para W_0 . Essa função é chamada de *wavelet*-mãe. O Lema 6.3 mostra que os espaços de detalhe W_j são uma dilatação de W_0 . Portanto, as funções $\psi_{j,k}$ definidas por

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \\ &= (D^j T_k \psi)(t) \end{aligned} \quad (6.62)$$

estão em W_j e o conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para W_j ⁵. Dessa forma, o operador de projeção ortogonal sobre W_j é dado por

$$Q_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (6.63)$$

em que $d_{j,k}$ são os coeficientes de detalhe dados pela equação (6.15). Assim sendo, utilizando a equação (6.63) pode-se escrever

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}. \quad (6.64)$$

A equação (6.64) evidencia justamente que a diferença entre as projeções, $P_{j+1} f - P_j f$, pode ser escrita como uma combinação linear de *wavelets*, as quais caracterizam a perda de detalhes ao passar de uma resolução mais fina para uma resolução mais grosseira (NASON, 2008). Por fim, uma vez que os espaços de detalhe são mutuamente ortogonais, segue que a coleção de funções $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ forma um sistema ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$. Consequentemente, a partir da equação (6.61) verifica-se que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para todo o espaço $L^2(\mathbb{R})$. Noutros termos, ψ é uma *wavelet*. Em suma, para encontrar uma *wavelet* ψ é preciso determinar uma *wavelet*-mãe, sendo este o objetivo da próxima seção.

⁵ A demonstração desse fato é muito semelhante a demonstração do Lema 6.1 e fica como exercício para o leitor.

6.2 Construindo uma Wavelet-Mãe

A discussão na seção 6.1 mostra que uma *wavelet*-mãe ψ produz uma base ortonormal $\{D^j T_k \psi\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ para $L^2(\mathbb{R})$, ou seja, que ψ é uma *wavelet*. O propósito dessa seção é mostrar como construir uma *wavelet*-mãe a partir de uma MRA com espaços de aproximação $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ e função escala φ . Para tanto, é preciso caracterizar o espaço W_0 , isto é, mostrar como são as funções desse espaço, visto que toda *wavelet*-mãe reside nele. Nesse sentido, o ponto de partida consiste na caracterização dos espaços V_{-1} e V_0 para que seja possível caracterizar o espaço W_{-1} e, por consequência, o espaço W_0 . Por conseguinte, a condição para que uma função em W_0 seja uma *wavelet*-mãe é determinada e uma expressão explícita para a mesma, em termos de φ , é obtida. A seção se encerra com dois exemplos mostrando a construção de duas *wavelets*-mães: Haar e Shannon.

Lema 6.4 (Caracterização de V_{-1} e V_0). *Seja φ a função de escala de uma MRA com espaços de aproximação $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, e seja $\hat{m}_\varphi \in L^2([0, 2\pi])$ a função de transferência do filtro passa-baixa h . Então,*

(i) *O espaço V_{-1} pode ser caracterizado como*

$$V_{-1} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = \hat{l}(2\omega) \hat{m}_\varphi(\omega) \hat{\varphi}(\omega) \right. \\ \left. \text{para alguma função } 2\pi\text{-periódica } \hat{l} \in L^2([0, 2\pi]) \right\}.$$

(ii) *O espaço V_0 pode ser caracterizado como*

$$V_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = \hat{c}(\omega) \hat{\varphi}(\omega) \right. \\ \left. \text{para alguma função } 2\pi\text{-periódica } \hat{c} \in L^2([0, 2\pi]) \right\}.$$

Demonstração. (i) Suponha que $f \in V_{-1}$. Uma vez que o Lema 6.1 garante que $\{D^{-1} T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_{-1} , segue que f pode ser expressa pela seguinte combinação linear

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k D^{-1} T_k \varphi, \quad (6.65)$$

em que $c_k = \langle f, D^{-1} T_k \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \in \mathbb{C}$. Os coeficientes c_k na equação (6.65) são os termos da

sequência $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ que pertence ao espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k D^{-1} T_k \varphi, f \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{\langle f, D^{-1} T_k \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \bar{c}_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2, \end{aligned}$$

de modo que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty,$$

pois $f \in V_{-1} \subset L^2(\mathbb{R})$. Aplicando a transformada de Fourier na equação (6.65) e efetuando uma simples substituição obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{\mathbb{R}} (D^{-1} T_k \varphi)(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{t}{2} - k\right) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \exp[-i2\omega(u+k)] du && u = t/2 - k \text{ e } du = dt/2 \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(-i2\omega k) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \exp(-i2\omega u) du}_{\hat{\varphi}(2\omega)} \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(-i2\omega k) \hat{\varphi}(2\omega), \end{aligned} \tag{6.66}$$

em que $u = t/2 - k$ e $du = dt/2$. Definindo a função \hat{l} como

$$\hat{l}(\omega) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(-i\omega k), \tag{6.67}$$

e utilizando a equação (6.44), pode-se reescrever a equação (6.66) como segue

$$\hat{f}(\omega) = \hat{l}(2\omega) \hat{m}_\varphi(\omega) \hat{\varphi}(\omega).$$

A demonstração de que \hat{l} é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$ é semelhante a realizada para a função \hat{m}_φ no Teorema 6.1. Isso completa a demonstração da necessidade,

restando provar a suficiência. Dessa forma, seja f uma função tal que

$$\hat{f}(\omega) = \hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)\hat{\varphi}(\omega), \quad (6.68)$$

em que \hat{l} é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$. O objetivo é provar que $f \in V_{-1}$. Em primeiro lugar, é preciso verificar que f , definida conforme equação (6.68), realmente está em $L^2(\mathbb{R})$. Nesse sentido, note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{l}[2(\omega + 2\pi k)]\hat{m}_\varphi(\omega + 2\pi k)\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} |\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (6.69)$$

em que a última igualdade é obtida utilizando a periodicidade das funções \hat{l} e \hat{m}_φ . Como $\{T_k\varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal, segue do Lema 6.2 que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1$. Portanto, a equação (6.69) é reescrita como

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{2\pi} |\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)|^2 d\omega < \infty,$$

pois $\hat{l} \in L^2([0, 2\pi])$ por hipótese e \hat{m}_φ é limitada por conta da equação (6.45). Isso mostra que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Como a transformada de Fourier é uma bijeção de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, tem-se $f \in L^2(\mathbb{R})$. Neste ponto, sabe-se que f está em $L^2(\mathbb{R})$ e que sua transformada de Fourier é dada pela equação (6.68), em que \hat{l} é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$ conforme equação (6.67). Portanto, basta efetuar na forma invertida os cálculos que conduzem a equação (6.66) para concluir que $f \in V_{-1}$.

Para demonstrar (ii), basta utilizar (i). Com efeito, pela propriedade (d) da Definição 6.1.1 vem que $f \in V_0 \iff D^{-1}f \in V_{-1}$. Então, de (i) sabe-se que

$$\widehat{D^{-1}f}(\omega) = \hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)\hat{\varphi}(\omega), \quad (6.70)$$

em que \hat{l} é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} \widehat{D^{-1}f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} f(u) \exp(-i2\omega u) du \quad u = t/2 \text{ e } du = dt/2 \\ &= \sqrt{2}\hat{f}(2\omega). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Igualando as equações (6.70) e (6.71), chega-se em

$$\begin{aligned}\hat{f}(2\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{l}(2\omega)\hat{\varphi}(2\omega),\end{aligned}$$

em que a última igualdade é obtida utilizando a equação de dilatação em (6.44). Assim sendo, substituindo ω por $\omega/2$ obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{l}(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \\ &= \hat{c}(\omega)\hat{\varphi}(\omega),\end{aligned}\tag{6.72}$$

com

$$\hat{c}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{l}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(-i\omega k)\tag{6.73}$$

uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$. Por outro lado, suponha uma função f cuja transformada de Fourier seja dada pela equação (6.72), com \hat{c} definida conforme equação (6.73). Pelo mesmo argumento anterior, mostra-se que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Efetuando os cálculos da forma inversa, chega-se na equação (6.70), de onde pode-se concluir que $f \in V_0$. \square

Lema 6.5 (Caracterização de W_{-1}). *Seja φ a função de escala de uma MRA com espaços de aproximação $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, e seja $\hat{m}_\varphi \in L^2([0, 2\pi])$ a função de transferência do filtro passa-baixa h . Então,*

$$\begin{aligned}W_{-1} = \left\{ f \in V_0 \mid \hat{f}(\omega) = \exp(i\omega)\hat{\nu}(2\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}\hat{\varphi}(\omega) \right. \\ \left. \text{para alguma função } 2\pi\text{-periódica } \hat{\nu} \in L^2([0, 2\pi]) \right\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que $f \in W_{-1} \subset V_0$. Então, pelo Lema 6.4 (ii) sabe-se que

$$\hat{f}(\omega) = \hat{c}(\omega)\hat{\varphi}(\omega),\tag{6.74}$$

em que \hat{c} é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$. Uma vez que f pertence a W_{-1} , tem-se $f \perp V_{-1}$. Então, para qualquer $g \in V_{-1}$ vale que

$$\begin{aligned}0 &= \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}\tag{6.75}$$

Como g está em V_{-1} , segue do Lema 6.4 (i) que

$$\hat{g}(\omega) = \hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)\hat{\varphi}(\omega), \quad (6.76)$$

onde \hat{l} é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$. Substituindo as equações (6.74) e (6.76) na equação (6.75), obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{c}(\omega)\hat{\varphi}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)\hat{\varphi}(\omega)}d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{c}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)}|\hat{\varphi}(\omega)|^2d\omega \end{aligned} \quad (6.77)$$

Neste ponto, é preciso decompor a integral ao longo de \mathbb{R} na equação (6.77) em uma soma de várias integrais ao longo dos intervalos $[2\pi k, 2\pi(k+1))$, mapear esses intervalos para o intervalo $[0, 2\pi)$ e utilizar a periodicidade das funções \hat{c} , \hat{l} e \hat{m}_φ . Procedendo desta maneira, a equação (6.77) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \hat{c}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)}|\hat{\varphi}(\omega)|^2d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \hat{c}(\omega + 2\pi k)\overline{\hat{l}[2(\omega + 2\pi k)]\hat{m}_\varphi(\omega + 2\pi k)}|\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \hat{c}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)}|\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} \hat{c}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} \hat{c}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)}d\omega, \end{aligned} \quad (6.78)$$

onde a última igualdade é obtida utilizando o Lema 6.2. Como $\hat{l}(2\cdot)$ é uma função periódica de período π , pode-se reescrever a equação (6.78) da seguinte forma

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi \hat{c}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)}d\omega + \int_\pi^{2\pi} \hat{c}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)}d\omega \\ &= \int_0^\pi \hat{c}(\omega)\overline{\hat{l}(2\omega)\hat{m}_\varphi(\omega)}d\omega + \int_0^\pi \hat{c}(\omega + \pi)\overline{\hat{l}[2(\omega + \pi)]\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}d\omega \\ &= \int_0^\pi \hat{l}(2\omega)[\hat{c}(\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} + \hat{c}(\omega + \pi)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}]d\omega. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Observe que a função F definida por

$$\hat{F}(\omega) = \hat{c}(\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} + \hat{c}(\omega + \pi)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}$$

é periódica de período π e pertence ao espaço $L^2([0, \pi])$, assim como $\hat{l}(2\cdot)$. Dessa forma, a

equação (6.79) pode ser reescrita como

$$0 = \langle \hat{F}, \hat{l}(2\cdot) \rangle_{L^2([0, \pi])}, \quad \forall \hat{l} \in L^2([0, 2\pi]).$$

Uma vez que \hat{l} é arbitrária, isso significa que

$$\hat{c}(\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} + \hat{c}(\omega + \pi)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} = 0 \quad (6.80)$$

para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$. A equação (6.80) indica que os vetores

$$\begin{bmatrix} \hat{c}(\omega) \\ \hat{c}(\omega + \pi) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{m}_\varphi(\omega) \\ \hat{m}_\varphi(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

são ortogonais em \mathbb{C}^2 , sendo que um vetor ortogonal a $\begin{bmatrix} \hat{m}_\varphi(\omega) \\ \hat{m}_\varphi(\omega + \pi) \end{bmatrix}$ é dado por $\begin{bmatrix} \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \\ -\overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} \end{bmatrix}$.

Portanto, existe $\hat{\lambda}(\omega) \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \hat{c}(\omega) \\ \hat{c}(\omega + \pi) \end{bmatrix} = \hat{\lambda}(\omega) \begin{bmatrix} \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \\ -\overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} \end{bmatrix}, \quad (6.81)$$

em que $\hat{\lambda}$ é uma função periódica de período 2π , posto que \hat{c} e \hat{m}_φ são funções periódicas de período 2π . Substituindo ω por $\omega + \pi$ na equação (6.81) e sabendo que $\hat{c}(\omega + 2\pi) = \hat{c}(\omega)$ e $\hat{m}_\varphi(\omega + 2\pi) = \hat{m}_\varphi(\omega)$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \hat{c}(\omega + \pi) \\ \hat{c}(\omega) \end{bmatrix} = \hat{\lambda}(\omega + \pi) \begin{bmatrix} \overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} \\ -\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \end{bmatrix}. \quad (6.82)$$

Das equações (6.81) e (6.82) vem que

$$\hat{c}(\omega) = \hat{\lambda}(\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} = -\hat{\lambda}(\omega + \pi)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \quad (6.83)$$

e

$$\hat{c}(\omega + \pi) = -\hat{\lambda}(\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} = \hat{\lambda}(\omega + \pi)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega)}. \quad (6.84)$$

A equação (6.45) no Teorema 6.1 garante que $\hat{m}_\varphi(\omega) \neq 0$ ou $\hat{m}_\varphi(\omega + \pi) \neq 0$. Portanto, em todo caso pode-se concluir das equações (6.83) e (6.84) que

$$\hat{\lambda}(\omega) = -\hat{\lambda}(\omega + \pi) \quad (6.85)$$

para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$. Definindo

$$\hat{\nu}(\omega) = \exp\left(-i\frac{\omega}{2}\right)\hat{\lambda}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (6.86)$$

chega-se em

$$\hat{\lambda}(\omega) = \exp(i\omega)\hat{\nu}(2\omega). \quad (6.87)$$

A função $\hat{\nu}$ definida na equação (6.86) é periódica de período 2π e pertence ao espaço $L^2([0, 2\pi])$. Com efeito, a periodicidade de $\hat{\nu}$ pode ser verificada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{\nu}(\omega + 2\pi) &= \exp\left[-i\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right]\hat{\lambda}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \\ &= -\exp(-i\pi)\exp\left(-i\frac{\omega}{2}\right)\hat{\lambda}\left(\frac{\omega}{2}\right) && \text{use a equação (6.85)} \\ &= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}\right)\hat{\lambda}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \hat{\nu}(\omega). && \text{use a equação (6.86)} \end{aligned}$$

Para verificar que $\hat{\nu}$ pertence a $L^2([0, 2\pi])$, basta mostrar que $\hat{\lambda}$ está em $L^2([0, 2\pi])$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} 2\pi\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_0^{2\pi} |\hat{c}(\omega)|^2 d\omega \\ &\stackrel{(6.83)}{=} \int_0^{2\pi} |\hat{\lambda}(\omega)|^2 |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)|^2 d\omega \\ &= \int_0^\pi |\hat{\lambda}(\omega)|^2 |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)|^2 d\omega + \int_\pi^{2\pi} |\hat{\lambda}(\omega)|^2 |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)|^2 d\omega \\ &= \int_0^\pi |\hat{\lambda}(\omega)|^2 |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)|^2 d\omega + \int_0^\pi |\hat{\lambda}(\omega + \pi)|^2 |\hat{m}_\varphi(\omega + 2\pi)|^2 d\omega \\ &= \int_0^\pi |\hat{\lambda}(\omega)|^2 [|\hat{m}_\varphi(\omega)|^2 + |\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)|^2] d\omega \\ &\stackrel{(6.45)}{=} \int_0^\pi |\hat{\lambda}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\hat{\nu}(\omega)|^2 d\omega &\stackrel{(6.86)}{=} 2 \int_0^\pi |\hat{\lambda}(\omega)|^2 d\omega \\ &\stackrel{(6.88)}{=} 4\pi\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty, \end{aligned} \quad (6.89)$$

de modo que $\hat{\nu} \in L^2([0, 2\pi])$. Substituindo a equação (6.87) na equação (6.83) vem que

$$\begin{aligned} \hat{c}(\omega) &= \hat{\lambda}(\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \\ &= \exp(i\omega)\hat{\nu}(2\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Portanto, substituindo a equação (6.90) na equação (6.74), obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \hat{c}(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \\ &= \exp(i\omega)\hat{\nu}(2\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}\hat{\varphi}(\omega).\end{aligned}\tag{6.91}$$

Isso mostra que se uma função f está em W_0 , então sua transformada de Fourier \hat{f} é definida pela equação (6.91), em que $\hat{\nu} \in L^2([0, 2\pi])$ é uma função periódica de período 2π .

Por outro lado, suponha que $f \in L^2(\mathbb{R})$ seja uma função cuja transformada de Fourier seja dada pela equação (6.91), com \hat{c} definido conforme equação (6.90) e $\hat{\nu} \in L^2([0, 2\pi])$ uma função periódica de período 2π . Então, pelo Lema 6.4 (ii) sabe-se que $f \in V_0$. A equação (6.90) satisfaz a equação (6.80), pois utilizando a periodicidade das funções $\hat{\nu}$ e \hat{m}_φ obtém-se

$$\begin{aligned}& \hat{c}(\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} + \hat{c}(\omega + \pi)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \\ &= \exp(i\omega)\hat{\nu}(2\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \cdot \overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} \\ & \quad + \exp[i(\omega + \pi)]\hat{\nu}[2(\omega + \pi)]\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + 2\pi)} \cdot \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \\ &= \exp(i\omega)\hat{\nu}(2\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \cdot \overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} \\ & \quad - \exp(i\omega)\hat{\nu}(2\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \cdot \overline{\hat{m}_\varphi(\omega)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Isso significa que f é ortogonal a todos os elementos de V_{-1} , pois efetuando os cálculos na forma inversa verifica-se que a equação (6.75) é válida para qualquer $g \in V_{-1}$. Logo, $f \in W_{-1}$. \square

Proposição 6.2.1 (Caracterização de W_0). *Seja φ a função de escala de uma MRA com espaços de aproximação $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, e seja $\hat{m}_\varphi \in L^2([0, 2\pi])$ a função de transferência do filtro passa-baixa h . Então,*

$$W_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(2\omega) = \exp(i\omega)\hat{\mu}(2\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}\hat{\varphi}(\omega) \right. \\ \left. \text{para alguma função } 2\pi\text{-periódica } \hat{\mu} \in L^2([0, 2\pi]) \right\}.$$

Demonstração. Suponha que $f \in W_0$. Então, do Lema 6.3 vem que $f \in W_0 \iff D^{-1}f \in W_{-1}$. Então, pelo Lema 6.5 isso equivale a dizer que

$$\begin{aligned}\widehat{D^{-1}f}(\omega) &= \exp(i\omega)\hat{\nu}(2\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}\hat{\varphi}(\omega) \\ &\stackrel{(6.71)}{=} \sqrt{2}\hat{f}(2\omega),\end{aligned}\tag{6.92}$$

em que $\hat{\nu} \in L^2([0, 2\pi])$ é uma função periódica de período 2π . Assim,

$$\begin{aligned}\hat{f}(2\omega) &= \exp(i\omega) \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\nu}(2\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \hat{\varphi}(\omega) \\ &= \exp(i\omega) \hat{\mu}(2\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \hat{\varphi}(\omega),\end{aligned}\tag{6.93}$$

em que μ é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$ definida por

$$\hat{\mu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\nu}(\omega).\tag{6.94}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\hat{\mu}(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\hat{\nu}(\omega)|^2 d\omega \\ &\stackrel{(6.89)}{=} 2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty.\end{aligned}$$

Quanto a periodicidade, o resultado é imediato visto que $\hat{\mu}$ é múltiplo constante de $\hat{\nu}$.

Por outro lado, suponha uma função f cuja transformada de Fourier seja dada pela equação (6.93), com $\hat{\mu}$ uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$ definida conforme equação (6.94). O objetivo é mostrar que $f \in W_0$. Em primeiro lugar, note que $D^{-1}f \in L^2(\mathbb{R})$. De fato,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{D^{-1}f}(\omega)|^2 d\omega &\stackrel{(6.71)}{=} 2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2\omega)|^2 d\omega \\ &\stackrel{(6.93)}{=} 2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}(2\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\hat{\mu}(2\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}|^2 |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\mu}[2(\omega + 2\pi k)] \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi + 2\pi k)}|^2 |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega \\ &= 2 \int_0^{2\pi} |\hat{\mu}(2\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega,\end{aligned}$$

em que a última igualdade é obtida utilizando a periodicidade das funções $\hat{\mu}$ e \hat{m}_φ . Como $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal, segue do Lema 6.2 que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{D^{-1}f}(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{2\pi} |\hat{\mu}(2\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}|^2 d\omega < \infty,$$

pois $\hat{\mu} \in L^2([0, 2\pi])$ por hipótese e \hat{m}_φ é limitada por conta da equação (6.45). Isso mostra que $\widehat{D^{-1}f} \in L^2(\mathbb{R})$. Mas, como a transformada de Fourier é uma bijeção de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, tem-se $D^{-1}f \in L^2(\mathbb{R})$ de modo que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Visto que $D^{-1}f$ está em $L^2(\mathbb{R})$

e satisfaz a equação (6.92) por hipótese, segue do Lema 6.4 (ii) que $D^{-1}f \in V_0$, com \hat{c} definido conforme (6.90). Consequentemente, segue que $D^{-1}f \in W_{-1}$ pelo Lema 6.5. Logo, $f \in W_0$ de acordo com o Lema 6.3. \square

Teorema 6.2. *Seja $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ a função escala de uma MRA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ e $\hat{m}_\varphi \in L^2([0, 2\pi])$ o filtro passa-baixa associado. Então, ψ é uma wavelet-mãe para essa MRA, isto é, $\{T_k\psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para W_0 , se e somente se*

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{m}_\psi\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (6.95)$$

com

$$\hat{m}_\psi(\omega) = \exp(i\omega) \hat{\mu}(2\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}, \quad (6.96)$$

em que $\hat{\mu}$ é uma função periódica de período 2π tal que $|\hat{\mu}(\omega)| = 1$ para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que ψ seja uma wavelet-mãe para a MRA em questão, isto é, que $\{T_k\psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ seja uma base ortonormal para W_0 . Então, tem-se que $\psi \in W_0$. Pela Proposição 6.2.1, sabe-se que sua transformada de Fourier é da forma

$$\hat{\psi}(2\omega) = \exp(i\omega) \hat{\mu}(2\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \hat{\varphi}(\omega)$$

ou

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right) \hat{\mu}(\omega) \overline{\hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.97)$$

para alguma função $\hat{\mu}$ periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$. Além disso, o Lema 6.2 mostra que para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$ vale que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 &\stackrel{(6.97)}{=} |\hat{\mu}(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + k\pi + \pi\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 \\ &= |\hat{\mu}(\omega)|^2 \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi + \pi\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2k+1)\pi + \pi\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \right\}, \end{aligned}$$

de modo que pela periodicidade de \hat{m}_φ obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 &= |\hat{\mu}(\omega)|^2 \left\{ \left| \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \right\} \\
&= |\hat{\mu}(\omega)|^2 \left\{ \left| \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 + \left| \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \right\} \quad \text{use o Lema 6.2} \\
&= |\hat{\mu}(\omega)|^2, \tag{6.98}
\end{aligned}$$

em que a última igualdade é obtida utilizando a equação (6.45). Logo, $|\hat{\mu}(\omega)| = 1$ para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, suponha uma função ψ cuja transformada de Fourier seja definida pela equação (6.95), com $\hat{\mu}$ uma função periódica de período 2π tal que $|\hat{\mu}(\omega)| = 1$ para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$. Então, a equação (6.98) mostra que $\{T_k\psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal pelo Lema 6.2. Além disso, segue da Proposição 6.2.1 que $\psi \in W_0$. Da mesma forma, suas versões deslocadas $T_k\psi \in L^2(\mathbb{R})$ estão em W_0 visto que

$$\begin{aligned}
\widehat{T_k\psi}(\omega) &= \exp(-i\omega k) \hat{\psi}(\omega) \\
&= \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right) \exp(-i\omega k) \overline{\hat{\mu}(\omega) \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right) \overline{\hat{\xi}(\omega) \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),
\end{aligned}$$

em que $\hat{\xi}$ é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$ definida por $\hat{\xi}(\omega) = \exp(-i\omega k) \hat{\mu}(\omega)$. Assim sendo, pode-se aplicar novamente a Proposição 6.2.1 para concluir que $T_k\psi \in W_0$. Portanto, $\{T_k\psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal em W_0 . Agora resta provar que $\{T_k\psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um conjunto gerador para W_0 . Nesse sentido, suponha que $g \in W_0$. Então, pela Proposição 6.2.1 existe uma função periódica de período 2π , $\hat{\gamma} \in L^2([0, 2\pi])$, tal que

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right) \overline{\hat{\gamma}(\omega) \hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{\hat{\gamma}(\omega)}{\hat{\mu}(\omega)} \hat{\psi}(\omega) \quad \text{use a equação (6.95)} \\
&= \hat{\zeta}(\omega) \hat{\psi}(\omega), \tag{6.99}
\end{aligned}$$

em que $\hat{\zeta}$ é uma função periódica de período 2π em $L^2([0, 2\pi])$ definida por $\hat{\zeta}(\omega) = \hat{\gamma}(\omega)/\hat{\mu}(\omega)$. De fato,

$$\hat{\zeta}(\omega + 2\pi) = \frac{\hat{\gamma}(\omega + 2\pi)}{\hat{\mu}(\omega + 2\pi)} = \frac{\hat{\gamma}(\omega)}{\hat{\mu}(\omega)}$$

devido a periodicidade das funções $\hat{\gamma}$ e $\hat{\mu}$. Além disso,

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\hat{\gamma}(\omega)}{\hat{\mu}(\omega)} \right|^2 d\omega = \int_0^{2\pi} |\hat{\gamma}(\omega)|^2 d\omega < \infty, \quad |\hat{\mu}(\omega)| = 1$$

pois $\hat{\gamma} \in L^2([0, 2\pi])$. Portanto, pode-se definir $\hat{\zeta}$ como

$$\hat{\zeta}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta_k \exp(-i\omega k),$$

de modo que a equação (6.99) assume a forma

$$\hat{g}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta_k \exp(-i\omega k) \hat{\psi}(\omega). \quad (6.100)$$

Visto que a transformada de Fourier inversa de $\exp(-i\omega k) \hat{\psi}(\omega)$ é $(T_k \psi)(t)$, de (6.100) vem que

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta_k (T_k \psi)(t). \quad (6.101)$$

Tendo em vista que $\{T_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal em W_0 , para todo $\ell \in \mathbb{Z}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \langle g, T_\ell \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &\stackrel{(6.101)}{=} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta_k T_k \psi, T_\ell \psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta_k \underbrace{\langle T_k \psi, T_\ell \psi \rangle}_{\delta_{k,\ell}} \\ &= \zeta_\ell, \end{aligned}$$

de modo que a equação (6.101) se torna

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g, T_k \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} (T_k \psi)(t).$$

Portanto, $\{T_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para W_0 . Noutros termos, ψ é uma *wavelet-mãe*. \square

Considerando uma MRA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ com função escala φ e com uma função de transferência \hat{m}_φ associada ao filtro passa-baixa h , o Teorema 6.2 mostra que a *wavelet-mãe* associada a essa MRA não é única. Especificamente, ele mostra que a construção da *wavelet-mãe* envolve a escolha de uma função $\hat{\mu} \in L^2([0, 2\pi])$, periódica de período 2π , tal que $|\hat{\mu}(\omega)| = 1$ para quase todo $\omega \in \mathbb{R}$. A escolha mais simples é tomar $\mu(\omega) \equiv 1$. Nesse

caso, a equação (6.96) assume a forma

$$\hat{m}_\psi(\omega) = \exp(i\omega)\overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \hat{m}_\psi\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right)\overline{\hat{m}_\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{h_k}\exp\left[ik\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right]\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) && \text{use a equação (6.49)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{h_k}\exp(ik\pi)\exp\left[i(k+1)\frac{\omega}{2}\right]\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\overline{h_k}\exp\left[i(k+1)\frac{\omega}{2}\right]\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.102)$$

Fazendo $n = -(k+1)$, pode-se reescrever a equação (6.102) como segue

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{-n-1}\overline{h_{-n-1}}\exp\left(-i\omega\frac{n}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n-1}\overline{h_{-n-1}}\exp\left(-i\omega\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.103)$$

Utilizando a transformada inversa de Fourier na equação (6.103) chega-se em

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n-1}\overline{h_{-n-1}}\varphi(2t-n) \\ &= \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\varphi(2t-n), \end{aligned} \quad (6.104)$$

em que

$$g_n = (-1)^{n-1}\overline{h_{-n-1}}.$$

A equação (6.104) representa uma equação de dilatação para ψ . Dessa forma, utilizando este resultado em conjunto com a equação (6.62) pode-se obter uma equação de dilatação para $\psi_{j,k}$. Com efeito, note que

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= 2^{j/2}\psi(2t-k) \\ &= 2^{(j+1)/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\varphi(2^{j+1}t-(2k+n)) && \text{use a equação (6.104)} \\ &= 2^{(j+1)/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}g_{m-2k}\varphi(2^{j+1}t-m) && m = 2k+n \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}g_{m-2k}\varphi_{j+1,m}(t). \end{aligned} \quad (6.105)$$

A discussão realizada até aqui demonstra o seguinte resultado.

Teorema 6.3. *Seja $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ uma MRA com função escala φ , e seja \hat{m}_φ a função de transferência do filtro passa-baixa h . Seja $\psi \in W_0$ uma função cuja transformada de Fourier é dada por*

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{m}_\psi \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2} \right), \quad (6.106)$$

com

$$\hat{m}_\psi(\omega) = \exp(i\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}. \quad (6.107)$$

Então,

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k), \quad (6.108)$$

em que

$$g_k = (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}}, \quad (6.109)$$

é uma wavelet-mãe, isto é, $\{T_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para W_0 . A sequência $g = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, cujos termos são dados pela equação (6.109), é chamada de filtro wavelet. Ademais, para $\psi_{j,k}$ definido na equação (6.62), tem-se

$$\psi_{j,\ell}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2\ell} \varphi_{j+1,k}(t). \quad (6.110)$$

Observação. A relação entre g_k e h_k expressa na equação (6.109) está associada com a escolha $\hat{\mu}(\omega) = 1$, que raramente é utilizada na prática (VIDAKOVIC, 1999). De acordo com o Teorema 6.2, pode-se escolher qualquer função $\hat{\mu}$ definida por $\hat{\mu}(\omega) = \mu_0 \exp(-i\omega N)$, com $|\mu_0| = 1$ e $N \in \mathbb{Z}$. Tal escolha implica apenas em uma mudança de fase no domínio da frequência e a um deslocamento de ψ no domínio do tempo (DAUBECHIES, 1992b). Fazendo $\mu_0 = -1$, a equação (6.96) assume a forma

$$\hat{m}_\psi(\omega) = -\exp[-i(2N-1)\omega] \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)}. \quad (6.111)$$

Realizando um cálculo análogo ao da demonstração do Teorema 6.3, mas utilizando a equação (6.111), chega-se em

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{-k+2N-1}}. \quad (6.112)$$

Na prática, utiliza-se $N = 1$ nas equações (6.111) e (6.112).

Os próximos exemplos mostram a construção das *wavelets*-mães de Haar e Shannon utilizando os resultados obtidos até o momento.

Exemplo 6.2.1 (Construindo a *wavelet* de Haar). A MRA de Haar consiste dos espaços

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \text{ é constante em } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)), \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

e da função escala

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ &= \chi_{[0,1)}(t). \end{aligned} \tag{6.113}$$

A verificação deste fato fica como exercício para o leitor, sendo que ela pode ser facilmente encontrada em Walnut (2004). A equação de dilatação para a função escala na equação (6.113) é bastante simples e pode ser obtida por inspeção. Com efeito, ela é da forma

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2t-1) \right), \end{aligned}$$

de modo que os coeficientes $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ do filtro escala são dados por

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad h_k = 0 \text{ para } k \neq 0, 1.$$

Assim sendo, a função de transferência do filtro escala na equação (6.49) pode ser escrita como

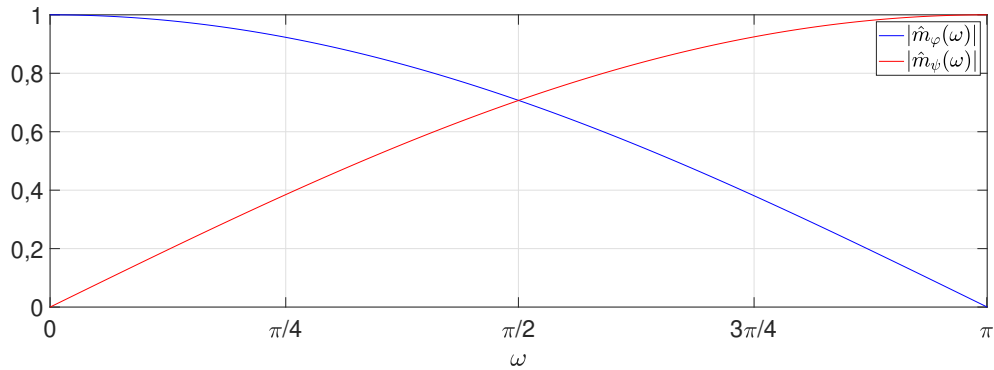
$$\begin{aligned} \hat{m}_\varphi(\omega) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-i\omega) \\ &= \frac{1 + \exp(-i\omega)}{2}. \end{aligned} \tag{6.114}$$

Substituindo a equação (6.114) na equação (6.111) para $N = 1$, chega-se na seguinte expressão para a função de transferência do filtro *wavelet*

$$\begin{aligned} \hat{m}_\psi(\omega) &= -\exp(-i\omega) \overline{\hat{m}_\varphi(\omega + \pi)} \\ &= -\exp(-i\omega) \left[\frac{1 - \exp(i\omega)}{2} \right] && \text{use a equação (6.114)} \\ &= \frac{1 - \exp(-i\omega)}{2}. \end{aligned} \tag{6.115}$$

A Figura 61 ilustra os gráficos das equações (6.114) e (6.115) em valor absoluto. Portanto,

Figura 61 – Ilustração dos gráficos do valor absoluto das funções de transferência \hat{m}_φ e \hat{m}_ψ associadas aos filtros escala e *wavelet* da MRA de Haar, respectivamente.



Fonte: O autor.

utilizando a equação (6.115) obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega) &= \hat{m}_\psi\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \left[\frac{1 - \exp(-i\omega/2)}{2}\right] \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) && \text{use a equação (6.115)} \\ &= \frac{1}{2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{1}{2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\omega}{2}\right),\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \varphi(2t) - \varphi(2t - 1) \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} && (6.116)\end{aligned}$$

O gráfico da equação (6.116) está ilustrado Figura 57a. ■

O seguinte resultado é essencial na construção da *wavelet* de Shannon.

Teorema 6.4 (Teorema da amostragem de Nyquist–Shannon). *Seja f uma função limitada em banda, de modo que sua transformada de Fourier \hat{f} satisfaz $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$, em que $\Omega > 0$. Suponha que \hat{f} é contínua em $[-\Omega, \Omega]$ e suave por partes. Então, f é completamente determinada em qualquer $t \in \mathbb{R}$ por seus valores avaliados nos pontos $t_k = k\pi/\Omega$, com $k \in \mathbb{Z}$, como segue*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{\pi}t - k\right). \quad (6.117)$$

Além disso, a série no lado direito da equação (6.117) converge uniformemente em subcon-

juntos fechados de \mathbb{R} .

Demonstração. Por hipótese, sabe-se que \hat{f} é contínua em $[-\Omega, \Omega]$. Então, ela é limitada nesse intervalo de modo que existe um real $M > 0$ tal que

$$|\hat{f}(\omega)| \leq M \quad \forall \omega \in [-\Omega, \Omega]. \quad (6.118)$$

Além disso, a função f é limitada em banda, isto é, $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$, com $\Omega > 0$. Então, utilizando este fato e a equação (6.118) pode-se concluir que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 && \text{use o Teorema 5.1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega && f \text{ é limitada em banda} \\ &\leq \frac{M^2 \Omega}{\pi} && \text{use a equação (6.118)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

de maneira que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Conseqüentemente, tem-se que

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^2([-\Omega, \Omega])}^2 &= \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega && f \text{ é limitada em banda} \\ &= \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= 2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 && \text{use o Teorema 5.1} \\ &< \infty. && f \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Isso mostra que $\hat{f} \in L^2([-\Omega, \Omega])$. Dessa forma, \hat{f} pode ser expandida em série de Fourier no intervalo $[-\Omega, \Omega]$ da seguinte forma

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp\left(ik \frac{\pi}{\Omega} \omega\right), \quad (6.119)$$

em que

$$c_k = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) \exp\left(-ik \frac{\pi}{\Omega} \omega\right) d\omega. \quad (6.120)$$

Uma vez que \hat{f} é contínua por partes em $[-\Omega, \Omega]$ (por hipótese), a série na equação (6.119) irá convergir uniformemente. Utilizando novamente o fato de que f é limitada em banda,

pode-se reescrever a equação (6.120) como segue

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\Omega} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp\left(-ik \frac{\pi}{\Omega} \omega\right) d\omega \\ &= \frac{2\pi}{2\Omega} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp\left[i\omega \left(-\frac{k\pi}{\Omega}\right)\right] d\omega, \end{aligned}$$

de modo que pela transformada inversa de Fourier tem-se que

$$c_k = \frac{2\pi}{2\Omega} f\left(-\frac{k\pi}{\Omega}\right). \quad (6.121)$$

Dessa forma, substituindo a equação (6.121) na equação (6.119) chega-se em

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{2\pi}{2\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(-\frac{k\pi}{\Omega}\right) \exp\left(i \frac{k\pi}{\Omega} \omega\right) \\ &= \frac{2\pi}{2\Omega} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\ell\pi}{\Omega}\right) \exp\left(-i \frac{\ell\pi}{\Omega} \omega\right), \quad \omega \in [-\Omega, \Omega], \end{aligned} \quad (6.122)$$

em que a última igualdade é obtida por meio da substituição $\ell = -k$. Aplicando a transformada inversa de Fourier na equação (6.122) obtém-se

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega && f \text{ é limitada em banda} \\ &= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\ell\pi}{\Omega}\right) \exp\left[-i\omega \left(\frac{\ell\pi}{\Omega} - t\right)\right] d\omega && \text{use a equação (6.122)} \\ &= \frac{1}{2\Omega} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\ell\pi}{\Omega}\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp\left[-i\omega \left(\frac{\ell\pi}{\Omega} - t\right)\right] d\omega, \end{aligned} \quad (6.123)$$

onde a última igualdade é obtida utilizando a convergência uniforme da série de Fourier de \hat{f} , a qual permite trocar a ordem entre o somatório e a integral. Observe que a integral na equação (6.123) é dada por

$$\begin{aligned} \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp\left[-i\omega \left(\frac{\ell\pi}{\Omega} - t\right)\right] d\omega &= \frac{2}{\frac{\ell\pi}{\Omega} - t} \operatorname{sen}(\ell\pi - \Omega t) \\ &= 2\Omega \frac{\operatorname{sen}(\Omega t - \ell\pi)}{\Omega t - \ell\pi} \\ &= 2\Omega \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{\pi} t - \ell\right). \end{aligned} \quad (6.124)$$

Logo, a substituição da equação (6.124) na equação (6.123) produz o resultado desejado,

$$f(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\ell\pi}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{\pi}t - \ell\right).$$

Isso mostra a equação (6.117) e completa a demonstração. \square

Agora é hora de retornar ao que realmente interessa, para a construção da *wavelet* de Shannon !

Exemplo 6.2.2 (Construindo a *wavelet* de Shannon). A MRA de Shannon tem suas raízes no Teorema 6.4, o qual estabelece condições suficientes para que seja possível reconstruir uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, limitada em banda com $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$, a partir de sua versão uniformemente amostrada. Ele especifica a taxa de amostragem mínima para que a reconstrução possa ser realizada, que é dada pela taxa de Nyquist $\frac{\Omega}{\pi}$ Hz, e fornece uma fórmula para realizar a reconstrução, conforme equação (6.117). Para a discussão a ser desenvolvida nesse exemplo, considere que $\Omega = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Assim sendo, a equação (6.117) assume a forma

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \operatorname{sinc}(t - k). \quad (6.125)$$

A equação (6.125) indica que a família de funções $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, com

$$\varphi_k(t) = \operatorname{sinc}(t - k), \quad (6.126)$$

é uma base para o espaço formado pelas funções de $L^2(\mathbb{R})$ que são limitadas em banda, com $\Omega = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Em verdade, $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para este espaço. Para ver isso, em primeiro lugar observe que a transformada de Fourier da equação (6.126) é dada por

$$\hat{\varphi}_k(\omega) = \begin{cases} \exp(-i\omega k), & \text{para } |\omega| < \pi, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.127)$$

Então, utilizando a equação (6.127) e o Teorema 5.1 obtém-se

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_\ell \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i\omega k) \exp(i\omega \ell) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(k - \ell)\omega] d\omega \\ &= \delta_{k,\ell}. \end{aligned}$$

Esses resultados sugerem definir o espaço V_0 como

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \pi\}, \quad (6.128)$$

e tomar

$$\varphi(t) = \text{sinc}(t) \quad (6.129)$$

como função escala. Assim sendo, da equação (6.128) infere-se que os espaços V_j são dados por

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > 2^j\pi\}. \quad (6.130)$$

Agora, resta mostrar que as propriedades na Definição 6.1.1 são atendidas pelos espaços V_j definidos na equação (6.130). Começando com a propriedade de aninhamento, suponha que $f \in V_j$ para um $j \in \mathbb{Z}$ fixo. Então, segue que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2^j\pi$. Consequentemente, tem-se $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2^{j+1}\pi$, de modo que $f \in V_{j+1}$. Logo, $V_j \subset V_{j+1}$ para $j \in \mathbb{Z}$. Por conseguinte, a propriedade de escalonamento pode ser demonstrada da seguinte forma. Suponha que $f \in V_j$, de modo que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2^j\pi$. Então, de imediato obtém-se que $Df \in L^2(\mathbb{R})$. Além disso, note que

$$\widehat{Df}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

de maneira que $\widehat{Df}(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2^{j+1}\pi$. Assim, tem-se $Df \in V_{j+1}$. Uma argumentação análoga prova a recíproca. Logo, $f \in V_j \iff Df \in V_{j+1}$. Quanto a propriedade de separação, ela é obtida por meio do seguinte argumento. À medida que $j \rightarrow -\infty$, nota-se que o suporte de \hat{f} , dado por $[-2^j\pi, 2^j\pi]$, tende ao intervalo degenerado que contém apenas o elemento zero. Isso significa que f tem largura de banda nula, ou seja, ela é uma função constante. Como o espaço é $L^2(\mathbb{R})$, a única possibilidade é a função identicamente nula. Por fim, a propriedade de densidade também é satisfeita, mas a demonstração está além do escopo desta discussão. Tendo em vista o exposto, pode-se concluir que os espaços V_j na equação (6.130) e a função escala $\varphi(t) = \text{sinc}(t)$ formam uma MRA de $L^2(\mathbb{R})$.

Para essa função escala, os coeficientes h_k da equação de dilatação podem ser obtidos facilmente. Com efeito, utilizando a equação (6.127) e o Teorema 5.1 chega-se no

seguinte resultado

$$\begin{aligned}
h_k &= \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\varphi}, \hat{\varphi}_{1,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(i\omega \frac{k}{2}\right) d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{para } k = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right), & \text{para } k \neq 0. \end{cases} \tag{6.131}
\end{aligned}$$

Com os coeficientes h_k na equação (6.131), a equação de dilatação para a MRA de Shannon assume a forma

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) \\
&= \sqrt{2} h_0 \varphi(2t) + \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} h_{2k} \varphi(2t - 2k) + \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} \varphi(2t - 2k - 1) \\
&= \varphi(2t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \varphi(2t - 2k - 1).
\end{aligned}$$

Para determinar a *wavelet*-mãe ψ da MRA de Shannon, é conveniente considerar a equação de escala no domínio da frequência. Em primeiro lugar, observe que a definição de $\hat{\varphi}$ é dada pela equação (6.127) com $k = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\omega) &= \begin{cases} 1, & \text{para } |\omega| \leq \pi, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \\
&= \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega). \tag{6.132}
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (6.132) na equação de dilatação em (6.44), chega-se na seguinte definição da função de transferência \hat{m}_φ ao longo de um intervalo com comprimento 2π :

$$\begin{aligned}
\hat{m}_\varphi(\omega) &= \begin{cases} 1, & \text{para } |\omega| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{para } \pi/2 < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \\
&= \hat{\varphi}(2\omega), \quad |\omega| \leq \pi. \tag{6.133}
\end{aligned}$$

Visto que \hat{m}_φ é uma função periódica de período 2π , a definição dada pela equação (6.133) deve ser válida em outros intervalos de mesmo comprimento. Assim sendo, pode-se escrever

$$\hat{m}_\varphi(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\omega + 4\pi k). \quad (6.134)$$

Agora, substitua a equação (6.134) na equação (6.111) para $N = 1$ e utilize o fato de que \hat{m}_φ é uma função real. Então, tem-se que

$$\hat{m}_\psi(\omega) = \exp(-i\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\omega + 4\pi k + 2\pi),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(2\omega) &= \hat{m}_\psi(\omega) \hat{\varphi}(\omega) \\ &= \exp(-i\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\omega + 4\pi k + 2\pi) \hat{\varphi}(\omega). \end{aligned} \quad (6.135)$$

O suporte de \hat{m}_ψ intercepta o suporte da função $\hat{\varphi}$ apenas nos intervalos $[-\pi, -\pi/2]$ e $[\pi/2, \pi]$, que correspondem aos índices $k = 0$ e $k = -1$ na equação (6.135), respectivamente. Isso significa que a equação (6.135) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(2\omega) &= \exp(-i\omega) [\hat{\varphi}(2\omega + 2\pi) + \hat{\varphi}(2\omega - 2\pi)] \hat{\varphi}(\omega) \\ &= \exp(-i\omega) [\chi_{[-\pi, -\pi/2]}(\omega) + \chi_{[\pi/2, \pi]}(\omega)], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}\right) [\chi_{[-2\pi, -\pi]}(\omega) + \chi_{[\pi, 2\pi]}(\omega)] \\ &= \begin{cases} \exp(-i\omega/2), & \omega \in [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.136)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier na equação (6.136) chega-se no resultado desejado. De fato,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-2\pi}^{-\pi} \exp[i\omega(t-1/2)] d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} \exp[i\omega(t-1/2)] d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i(t-1/2)} \left(\exp[i\omega(t-1/2)] \Big|_{-2\pi}^{-\pi} + \exp[i\omega(t-1/2)] \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi(t-1/2)} (\text{sen}[2\pi(t-1/2)] - \text{sen}[\pi(t-1/2)]) \\ &= \frac{2 \text{sen}[2\pi(t-1/2)]}{2\pi(t-1/2)} - \frac{\text{sen}[\pi(t-1/2)]}{\pi(t-1/2)} \\ &= 2 \text{sinc}(2t-1) - \text{sinc}(t-1/2). \end{aligned} \quad (6.137)$$

As Figuras 62a e 62b ilustram, respectivamente, os gráficos das funções escala φ e *wavelet*

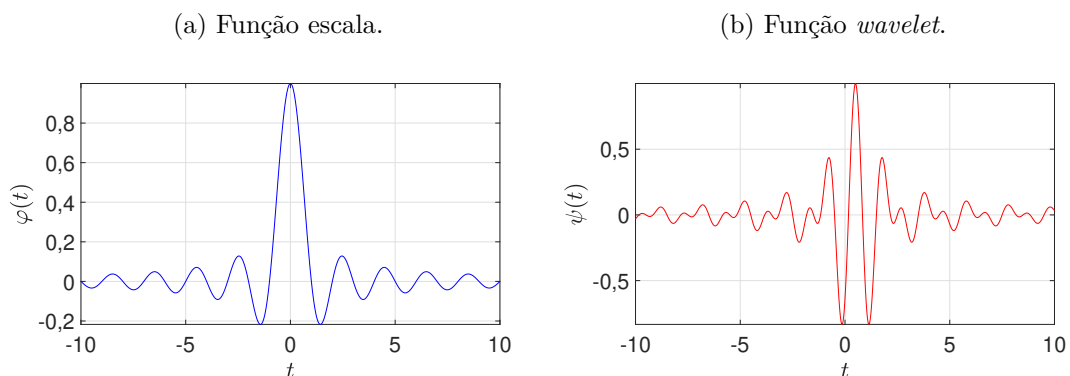
ψ da MRA de Shannon, conforme equações (6.129) e (6.137). ■

Como o leitor deve ter percebido, a teoria da MRA provê um elegante mecanismo para a concepção de bases ortonormais de *wavelets* para $L^2(\mathbb{R})$. Em outras palavras, a partir do momento que uma função escala φ é encontrada, de tal forma que ela gere uma MRA válida, uma *wavelet* ψ associada pode ser construída (TEOLIS, 1998). Nesta seção, apenas as *wavelets* de Haar e Shannon foram construídas por meio da MRA. Apesar disso, o mesmo procedimento pode ser feito para a construção de uma variedade de *wavelets*, tais como as *wavelets* de Meyer, Franklin e Battle-Lemarié, apenas para citar algumas. Em geral, as *wavelets* apresentam vantagens e desvantagens. Por exemplo, a *wavelet* de Haar tem suporte compacto, mas é descontínua. Enquanto isso, a *wavelet* de Shannon é bastante suave, mas não apresenta suporte compacto, pois ela assume valores não nulos ao longo de \mathbb{R} . Além disso, ela apresenta um decaimento lento, segundo $|t|^{-1}$ no infinito (BOGGESS; NARCOWICH, 2009). Como comentado anteriormente, em certo sentido a *wavelet* de Meyer é obtida pela suavização da *wavelet* de Shannon no domínio da frequência, fazendo com que ela tenha um decaimento mais rápido que o recíproco de qualquer polinômio no infinito. Nesse sentido, a única desvantagem da *wavelet* de Meyer é o fato de que ela não tem suporte compacto (BALEANU, 2012).

Durante a década de 80, essas *wavelets* eram as únicas disponíveis e o cerne do problema era a procura por uma *wavelet* que fosse contínua e tivesse suporte compacto. Influenciada pelo trabalho de Mallat e pelos algoritmos piramidais de Burt e Adelson, Daubechies (1988) resolveu esse problema ao criar uma família de *wavelets* de suporte compacto com um grau de regularidade⁶ pré-selecionado (MEYER, 1993). Especificamente, para cada $N \in \mathbb{N}$, Daubechies construiu uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ da forma $2^{j/2}\psi_N(2^j t - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, possuindo as seguintes propriedades:

⁶ Este é um conceito complexo, mas tenha em mente que ele fornece uma medida da suavidade de uma função *wavelet*.

Figura 62 – Ilustração dos gráficos das funções escala e *wavelet* da MRA de Shannon.



Fonte: O autor.

- (a) O suporte de ψ_N é o intervalo $[0, 2N - 1]$.
- (b) ψ_N tem N momentos nulos, isto é,

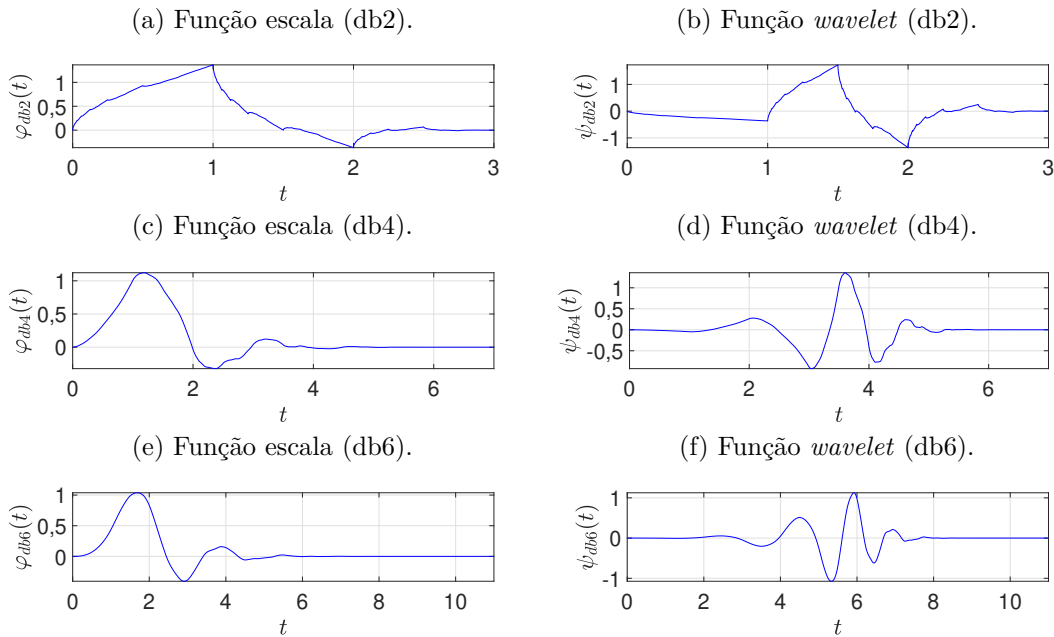
$$\int_{\mathbb{R}} t^\ell \psi_N(t) dt = 0 \text{ para } \ell = 0, 1, \dots, N - 1.$$

- (c) Para N grande, ψ_N tem aproximadamente γN derivadas contínuas, em que γ é uma constante próxima de $1/5$.

A função ψ_N é chamada de *wavelet* de Daubechies de ordem N e, devido as propriedades supracitadas, sua regularidade ou grau de suavidade aumenta linearmente com N , assim como o seu suporte (TEOLIS, 1998). A terminologia para se referir a uma *wavelet* de Daubechies (ou a sua função escala) é dbN , mas em algumas literaturas utiliza-se a notação $D2N$, em que $2N$ é o número de coeficientes não nulos dos filtros escala e *wavelet* de Daubechies. A Figura 63 ilustra o gráfico das funções escala junto com as *wavelets* de Daubechies correspondentes para alguns valores de N , onde é possível observar o aumento do suporte das funções, bem como o aumento do grau de suavidade das mesmas, conforme N aumenta. Infelizmente, as *wavelets* de Daubechies não possuem uma forma analítica fechada, mas podem ser computadas com um grau arbitrário de precisão por meio de um método iterativo chamado de algoritmo de Daubechies-Lagarias (DAUBECHIES; LAGARIAS, 1991). A construção das *wavelets* de Daubechies não é nada trivial, sendo assunto para um capítulo inteiro de um livro. Dessa forma, elas não serão descritas neste texto. O leitor interessado pode consultar Daubechies (1988) e Daubechies (1992b). Neste trabalho, as *wavelets* de Daubechies foram utilizadas no programa MAGNAMI (ver Capítulo 10) para o cômputo do índice EWC.

Na prática, o que realmente interessa são os filtros escala $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e *wavelet* $g = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ advindos de uma MRA, pois são estes que aparecem nos algoritmos. De fato, Mallat (1989a) mostrou que os coeficientes da decomposição de uma função em uma base ortonormal de *wavelets* podem ser computados por um algoritmo rápido que encadeia convoluções discretas, envolvendo estes filtros, seguidas pela operação de subamostragem (OUAHABI, 2012). A reconstrução da função original ocorre de forma bastante análoga, com convoluções discretas seguidas pela operação de sobreamostragem. A razão pelo grande interesse nas bases ortonormais de *wavelets* com suporte compacto é que elas são bastante adequadas para esses algoritmos (TEOLIS, 1998). A próxima seção os descreve brevemente.

Figura 63 – Gráfico das funções escala e *wavelet* de Daubechies para $N = 2, 4$ e 6 . Observe o aumento do suporte e do grau de suavidade das funções à medida que N aumenta.



Fonte: O autor.

6.3 Transformada *Wavelet* Rápida e sua Inversa

Partindo de uma MRA, Mallat (1989a) mostrou que é possível desenvolver algoritmos computacionalmente eficientes para determinar a DWT ortonormal e sua inversa utilizando a teoria de banco de filtros. O algoritmo para o cálculo da DWT ortonormal é denominado de Transformada *Wavelet* Rápida (FWT, do inglês *Fast Wavelet Transform*). A FWT corresponde a etapa de decomposição (análise) de uma função, sendo implementada por meio do encadeamento de bancos de filtros de dois canais com reconstrução perfeita. Cada banco de filtros dispõe dos filtros escala e *wavelet* de uma MRA para o cômputo dos coeficientes de aproximação $a_{j,k}$ e de detalhe $d_{j,k}$ a partir de $a_{j+1,k}$. Em contrapartida, a Transformada *Wavelet* Rápida Inversa (IFWT, do inglês *Inverse Fast Wavelet Transform*) corresponde a etapa de reconstrução (síntese) de uma função, onde os bancos de filtros são utilizados de forma bastante análoga, mas agora com o intuito de computar os coeficientes de aproximação $a_{j+1,k}$ a partir dos coeficientes $a_{j,k}$ e $d_{j,k}$. Esta seção discute brevemente cada um desses algoritmos.

A FWT pode ser descrita da seguinte forma. Suponha que $f \in V_{j+1}$. O Lema 6.1 mostra que $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_{j+1} , de modo que f pode ser escrita como uma combinação linear das funções dessa base, como segue

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}, \quad (6.138)$$

em que $a_{j+1,k} = \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Uma vez que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, a união das bases ortonormais de V_j e W_j , dada por $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, também é uma base ortonormal para V_{j+1} . Nesse caso, f assume a forma

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (6.139)$$

em que $a_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ e $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. O objetivo é obter uma fórmula que permita calcular os coeficientes relativos a segunda base na equação (6.139) a partir dos coeficientes relativos a primeira na equação (6.138). Para os coeficientes de aproximação, essa fórmula é obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_{j,\ell} &= \langle f, \varphi_{j,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j,\ell} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} && \text{use a equação (6.138)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{k-2\ell}} a_{j+1,k}, && \text{use a equação (6.56)} \end{aligned}$$

de modo que

$$a_{j,\ell} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{k-2\ell}} a_{j+1,k}. \quad (6.140)$$

O equivalente da equação (6.56) para o caso da função *wavelet* é dado pela seguinte relação

$$\langle \varphi_{j+1,k}, \psi_{j,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \overline{g_{k-2\ell}}, \quad (6.141)$$

que pode ser demonstrada utilizando a equação (6.110). Dessa forma, para os coeficientes de detalhe tem-se que

$$\begin{aligned} d_{j,\ell} &= \langle f, \psi_{j,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}, \psi_{j,\ell} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} && \text{use a equação (6.138)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \langle \varphi_{j+1,k}, \psi_{j,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{k-2\ell}} a_{j+1,k}, && \text{use a equação (6.141)} \end{aligned}$$

donde

$$d_{j,\ell} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{k-2\ell}} a_{j+1,k}. \quad (6.142)$$

Defina as sequências de aproximação $a_j = (a_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ e de detalhe $d_j = (d_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$, assim como os filtros $\tilde{h} = (\tilde{h}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\tilde{g} = (\tilde{g}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, com $\tilde{h}_k = \overline{h_{-k}}$ e $\tilde{g}_k = \overline{g_{-k}}$. Então, observe

que $\tilde{h}_{2\ell-k} = \overline{h_{k-2\ell}}$ e $\tilde{g}_{2\ell-k} = \overline{g_{k-2\ell}}$. Dessa forma, as equações (6.140) e (6.142) podem ser reescritas como

$$a_{j,\ell} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{2\ell-k} a_{j+1,k} = (\tilde{h} * a_{j+1})(2\ell) \quad (6.143)$$

e

$$d_{j,\ell} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{2\ell-k} a_{j+1,k} = (\tilde{g} * a_{j+1})(2\ell). \quad (6.144)$$

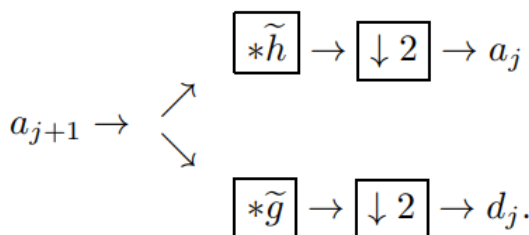
As equações (6.143) e (6.144) expressam os termos das sequências de aproximação e detalhe no nível j , $a_{j,\ell}$ e $d_{j,\ell}$, como uma convolução entre a sequência a_{j+1} e as sequências \tilde{h} e \tilde{g} , seguida por uma subamostragem por dois. Essas equações fornecem a decomposição em apenas um nível ao mapear a sequência a_{j+1} nas sequências a_j e d_j . A Figura 64a ilustra o processo de decomposição na forma de um banco de filtros de dois canais. Considerando a sequência a_j como um novo ponto de partida, o processo de decomposição pode ser realizado novamente para a obtenção das sequências a_{j-1} e d_{j-1} e assim sucessivamente. A FWT consiste justamente da aplicação sucessiva do processo de decomposição, como ilustra a Figura 64b.

Em contrapartida, a IFWT é descrita como segue. Suponha que as sequências de aproximação a_j e de detalhe d_j sejam previamente conhecidas. O objetivo agora é determinar a sequência a_{j+1} a partir delas. Isso pode ser feito da seguinte forma

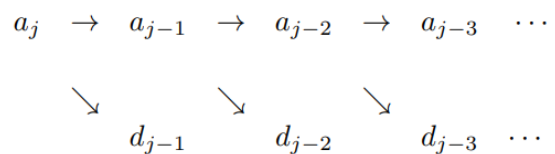
$$\begin{aligned} a_{j+1,\ell} &= \langle f, \varphi_{j+1,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \varphi_{j+1,\ell} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} && \text{use a equação (6.139)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \varphi_{j+1,\ell} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} && \text{equações (6.56) e (6.141)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} h_{\ell-2k} + d_{j,k} g_{\ell-2k}. && (6.145) \end{aligned}$$

Figura 64 – A FWT é um algoritmo implementado pelo encadeamento de banco de filtros de dois canais que efetuam o processo de decomposição em diversos níveis tomando como ponto de partida as sequências de aproximação.

- (a) Banco de filtros de dois canais ilustrando o processo de decomposição do nível $j+1$ para o nível j . O símbolo $\downarrow 2$ denota a operação de subamostragem por dois.



- (b) Partindo sempre de uma sequência de aproximação, a aplicação sucessiva do processo de decomposição é chamada de FWT.



Fonte: Pereyra e Ward (2012).

A equação (6.145) é quase a soma de duas convoluções, sendo que a única diferença é que o subíndice deveria ser $\ell - k$ em vez de $\ell - 2k$ (BOGGESS; NARCOWICH, 2009). Noutros termos, essa equação corresponde a soma de duas convoluções nas quais os termos ímpares $h_{\ell-(2k+1)}$ e $g_{\ell-(2k+1)}$ estão faltando. Para inserir esses termos, basta multiplicá-los por zero para que a equação ainda seja válida. Assim sendo, tem-se que

$$\begin{aligned} a_{j+1,\ell} = & \dots + a_{j,-2}h_{\ell+4} + 0h_{\ell+3} + a_{j,-1}h_{\ell+2} + 0h_{\ell+1} + a_{j,0}h_{\ell} + 0h_{\ell-1} + a_{j,1}h_{\ell-2} + \\ & \dots + d_{j,-2}g_{\ell+4} + 0g_{\ell+3} + d_{j,-1}g_{\ell+2} + 0g_{\ell+1} + d_{j,0}g_{\ell} + 0g_{\ell-1} + d_{j,1}g_{\ell-2} + \dots \end{aligned} \quad (6.146)$$

Dessa forma, a equação (6.146) sugere que é preciso inserir zeros entre os termos das sequências a_j e d_j para que a equação (6.145) possa ser escrita como a soma de duas convoluções. Nesse sentido, suponha uma sequência $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e defina o operador de sobreamostragem por 2, denotado por U_2 , como

$$U_2x = (\dots x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots). \quad (6.147)$$

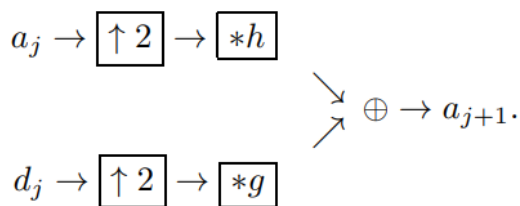
Então, utilizando a equação (6.147) pode-se reescrever a equação (6.145) da seguinte forma

$$a_{j+1,\ell} = [h * (U_2a_j)](\ell) + [g * (U_2d_j)](\ell). \quad (6.148)$$

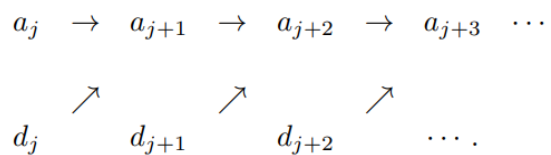
A equação (6.148) expressa os termos da sequência a_{j+1} em função dos termos das sequências de aproximação a_j e detalhe d_j . Essa equação fornece a reconstrução em apenas um nível ao mapear as sequências a_j e d_j na sequência a_{j+1} , como ilustra o banco de filtros na Figura 65a. A IFWT corresponde a aplicação sucessiva do processo de reconstrução tomando as sequências de aproximação e detalhe como ponto de partida, conforme Figura 65b.

Figura 65 – A IFWT é um algoritmo implementado pelo encadeamento de banco de filtros de dois canais que efetuam o processo de reconstrução em diversos níveis tomando como ponto de partida um par de sequências de aproximação e detalhe.

- (a) Banco de filtros de dois canais ilustrando o processo de reconstrução do nível j para o nível $j+1$. O símbolo $\uparrow 2$ denota a operação de sobreamostragem por dois.



- (b) Partindo sempre de um par de sequências de aproximação e detalhe, a aplicação sucessiva do processo de reconstrução é chamada de IFWT.



Fonte: Pereyra e Ward (2012).

7 TRANSFORMADA DE HILBERT-HUANG

A transformada de Hilbert-Huang (HHT) é uma técnica empírica de análise tempo-frequência introduzida por [Huang et al. \(1998\)](#) para analisar sinais oriundos de processos não lineares e não estacionários¹. Ela é composta por duas etapas, a saber: decomposição em modo empírico (EMD, do inglês *Empirical Mode Decomposition*) e análise espectral de Hilbert (HSA, do inglês *Hilbert Spectrum Analysis*). A HHT apresenta aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, tais como engenharia biomédica ([OWEIS; ABDULHAY, 2011](#)), engenharia civil ([CHEN; ZHAO; LI, 2014](#)), engenharia química ([MENG et al., 2012](#)), ciências atmosféricas ([DUFFY, 2004](#)) e sismologia ([SONG et al., 2011](#)). Neste trabalho, a HHT é aplicada como uma ferramenta de filtragem nas séries temporais dos elementos do campo geomagnético com o intuito de detectar variações geomagnéticas causadas por tsunamis.

A primeira etapa da HHT, EMD, tem por objetivo decompor um sinal multi-componente em uma coleção de funções de modo intrínseco (IMFs, do inglês *Intrinsic Mode Functions*). As IMFs são sinais de banda estreita, modulados em amplitude e em frequência, que representam os modos de oscilação embebidos no sinal original ([HUANG; ATTOH-OKINE, 2005](#)). Cada IMF tem uma transformada de Hilbert (HT, do inglês *Hilbert Transform*) bem comportada, o que possibilita a obtenção de frequências instantâneas fisicamente significativas. A noção de frequência instantânea desempenha um papel importante na análise de sinais de processos não lineares, como será discutido mais adiante. A EMD é descrita em detalhes na seção 7.1. A segunda etapa da HHT, HSA, consiste na aplicação da HT em cada uma das IMFs para a construção de uma distribuição tempo-frequência-energia chamada de espectro de Hilbert ([HUANG; SHEN, 2014](#)). O espectro de Hilbert fornece uma resolução tempo-frequência muito superior à resolução das técnicas baseadas na análise de Fourier, pois não é limitado pela incerteza de Heisenberg. Além disso, o espectro de Hilbert é uma forma mais econômica de representar um sinal devido ao baixo número de IMFs. A HSA é brevemente discutida na seção 7.2.

A HHT surge devido a ausência de uma técnica adequada para analisar sinais de processos não lineares e não estacionários, pois a maioria das técnicas tradicionais têm como base a análise de Fourier. Dessa forma, elas repousam sobre as hipóteses de linearidade e/ou estacionariedade ([HUANG; SHEN, 2014](#)). Este é o caso da análise *wavelet* e da distribuição de Wigner-Ville, que são técnicas projetadas para analisar sinais de processos não estacionários, mas lineares ([FLANDRIN, 1999](#); [GRÖCHENIG, 2001](#)). Em contrapartida, algumas técnicas foram introduzidas para lidar com sinais de processos não lineares, como as discutidas por [Tong \(2003\)](#) e [Kantz e Schreiber \(2003\)](#), mas elas

¹ Um sinal de um processo não estacionário é aquele cujo conteúdo espectral varia com o tempo.

ainda requerem a hipótese de estacionariedade. Em todo caso, as técnicas disponíveis não são adequadas para analisar sinais de processos que são não lineares e não estacionários simultaneamente. Esse era o cerne o problema antes da HHT, pois os processos físicos naturais são em grande parte não lineares e não estacionários (HUANG et al., 1998).

Como aponta Huang et al. (1998), os sinais dessa classe de processos necessitam de um tratamento especial que as técnicas usuais não são capazes de oferecer apropriadamente. Por exemplo, a característica típica dos processos não lineares é a modulação em frequência intra-onda, a qual indica que a frequência instantânea varia dentro de um ciclo de oscilação. A variação intra-onda da frequência causa deformações nos perfis ondulatórios de um sinal, que se manifestam como distorções harmônicas nas técnicas baseadas na análise de Fourier, isto é, como harmônicos de alta ordem que são necessários para representar as deformidades do sinal. Dessa forma, a modulação em frequência intra-onda é perdida na análise de Fourier, sendo vagamente retratada na análise *wavelet* (WANG; WANG; ZHANG, 2012). Nesse sentido, a HHT é superior porque ela interpreta não linearidades como modulação em frequência, enquanto as técnicas baseadas na análise de Fourier interpretam como distorções harmônicas (ver seção 7.2). Embora os harmônicos sejam matematicamente necessários para obter uma boa representação dos sinais, eles causam um espalhamento enganoso da energia para altas frequências e são fisicamente sem sentido (HUANG et al., 1998). A superioridade da HHT advém do fato que ela utiliza a frequência instantânea via HT para descrever os sinais de processos não lineares e não estacionários, pois essa é a forma fisicamente significativa de descrevê-los.

A HT é um tipo de transformada integral, assim como as transformadas de Fourier e Laplace, por meio da qual é possível determinar atributos instantâneos importantes de um sinal, tais como amplitude, fase e frequência. Ela recebe esse nome em homenagem ao matemático alemão David Hilbert (1862-1943), que foi o primeiro a introduzi-la para resolver um caso especial de equações integrais na área de Física Matemática (FELDMAN, 2011). Pode-se mostrar que os sinais em $L^p(\mathbb{R})$, com $p \geq 1$, têm transformada de Hilbert (CLANCEY, 1975). Seja $x(t) \in L^p(\mathbb{R})$ um sinal arbitrário. Então, sua HT, denotada por $\mathcal{H}[x(t)]$, é definida como

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{H}[x(t)] \\ &= x(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (7.1)$$

em que V.P. denota o valor principal de Cauchy da integral devido a uma possível singularidade em $t = \tau$. Observe que a HT não é uma transformada entre domínios como as transformadas usuais, pois $\mathcal{H}[x(t)]$ é uma função no domínio do tempo. É importante ressaltar que quando $p > 1$, a HT é um operador linear limitado em $L^p(\mathbb{R})$, como

demonstrado pelo matemático húngaro Marcel Riesz (1886-1969) em 1928². Na equação (7.1), o valor principal de Cauchy é utilizado com o seguinte significado

$$\frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{t-1/\epsilon}^{t-\epsilon} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{t+\epsilon}^{t+1/\epsilon} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \right),$$

pois nesse caso a integral é bem comportada para a maior parte das funções comuns (KING, 2009).

A equação (7.1) define a HT como a convolução entre os sinais $x(t)$ e $1/(\pi t)$, o que enfatiza as propriedades locais de $x(t)$ (HUANG et al., 1998). Nesse sentido, a HT pode ser interpretada como a saída de um sistema linear e invariante no tempo com resposta ao impulso $h(t) = 1/(\pi t)$. A resposta em frequência desse sistema é dada pela transformada de Fourier de $h(t)$, denotada por $H(\omega)$, definida como

$$H(\omega) = -j \text{sgn}(\omega) = \begin{cases} j, & \text{para } \omega < 0 \\ 0, & \text{para } \omega = 0, \\ -j, & \text{para } \omega > 0 \end{cases}, \quad (7.2)$$

em que $\text{sgn}(\omega)$ denota a função sinal. Então, utilizando a propriedade de convolução da transformada de Fourier, vem das equações (7.1) e (7.2) que

$$Y(\omega) = -j \text{sgn}(\omega) X(\omega), \quad (7.3)$$

em que $X(\omega)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$. A equação (7.3) revela o significado físico da HT, pois ela mostra que a HT é equivalente a um filtro linear que preserva a amplitude das componentes de frequência de $x(t)$, desloca suas respectivas fases por $\pi/2$ no caso de componentes de frequência negativas e por $-\pi/2$ no caso de componentes de frequência positivas. Portanto, a HT é um filtro deslocador de fase (QIU; GUO; PRESS, 2018).

A HT apresenta diversas aplicações em processamento de sinais e na teoria das comunicações, sendo que uma delas envolve a construção de um sinal complexo $z(t)$ a partir do sinal real $x(t)$ e de sua HT. Ele é chamado de sinal analítico. A construção do sinal analítico suprime as componentes de frequência negativas de $x(t)$ que são redundantes por conta da simetria Hermitiana de seu espectro. O sinal analítico é importante porque ele fornece valores instantâneos para atributos importantes, tais como amplitude, fase e frequência. A construção do sinal analítico foi proposta por Gabor (1946) e tem a seguinte forma

$$z(t) = x(t) + jy(t) = a(t) \exp[j\theta(t)], \quad (7.4)$$

² Para $p = 1$ isso não é verdade. De fato, considere $x(t) = \chi_{[0,1]}(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Sua HT é dada por $\mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t}{t-1} \right|$, em que claramente se verifica $\mathcal{H}[x(t)] \notin L^1(\mathbb{R})$.

em que $a(t)$ e $\theta(t)$ são, respectivamente, a amplitude e a fase instantâneas do sinal analítico, cujas expressões são dadas por

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (7.5)$$

e

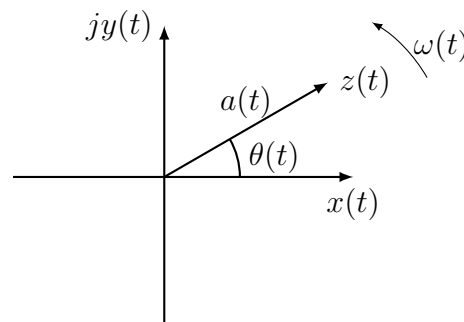
$$\theta(t) = \arctg\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \quad (7.6)$$

Em teoria, há uma infinidade de maneiras de definir a parte imaginária da equação (7.4), mas a HT é a única forma de defini-la tal que o sinal resultante seja uma função analítica (HUANG et al., 1998). A equação (7.4) tem uma representação geométrica na forma de um fasor rotacionando no plano complexo, que pode ser visto como um vetor na origem deste plano com magnitude $a(t)$ e posição angular $\theta(t)$, conforme Figura 66 (HAHN, 1996). A velocidade do fasor tem uma componente tangencial chamada de velocidade angular $\omega(t)$, cuja magnitude mensura o quão rápido o fasor está rotacionando (FELDMAN, 2011). Além desta, há também uma componente radial devido a variação temporal da magnitude do fasor, porém esta não é de interesse na presente discussão. A velocidade angular é definida como a primeira derivada da posição angular,

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{a^2(t)}, \quad (7.7)$$

sendo também chamada de frequência instantânea. O sinal da velocidade angular determina a direção de rotação do fasor, em que $\omega(t) > 0$ indica o sentido anti-horário e $\omega(t) < 0$ o sentido horário. Dessa forma, uma velocidade angular negativa corresponde a uma mudança na direção de rotação do fasor, de anti-horário para horário (FELDMAN, 2011). A título de exemplo, a curva vermelha na Figura 67 ilustra o sinal analítico $z(t) = \exp(-jt)$ construído a partir de $x(t) = \text{sen}(t)$ e de sua HT $y(t) = -\cos(t)$, que estão representados

Figura 66 – A representação geométrica de um sinal analítico $z(t) = x(t) + jy(t)$ é um fasor rotacionando no plano complexo com velocidade angular $\omega(t)$. O sinal de $\omega(t)$ determina a direção de rotação do fasor, sendo que ela é no sentido anti-horário para $\omega(t) > 0$ e horário quando $\omega(t) < 0$.



Fonte: O autor.

pelas curvas azul e verde, respectivamente. A curva rosa ilustra o lugar geométrico dos pontos descritos pelo fasor conforme ele rotaciona no plano complexo. Nesse caso, a curva é claramente uma circunferência de raio unitário centrada na origem, pois $z(t)$ é uma parametrização dessa curva.

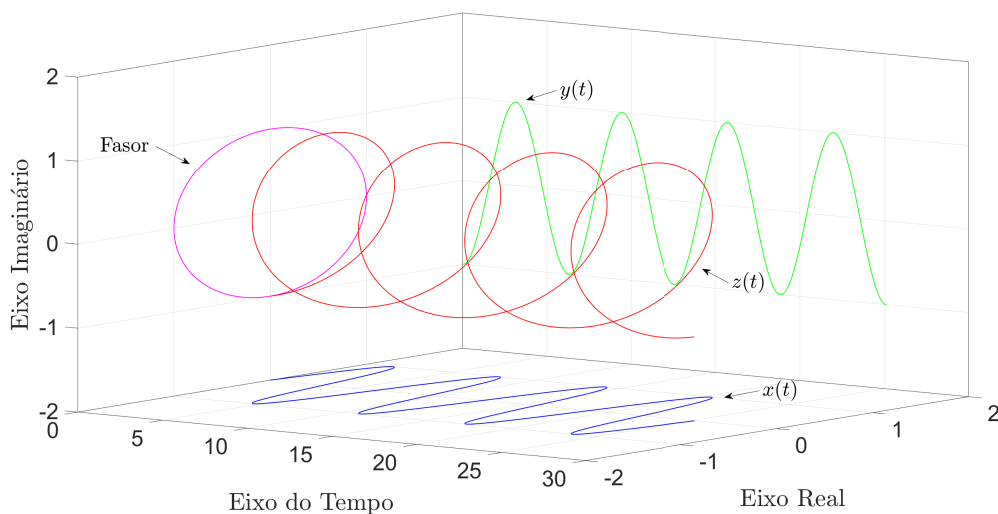
A abordagem mais utilizada para estimar a frequência instantânea é a baseada no sinal analítico construído via HT, que permite o cômputo da frequência instantânea por meio da derivada da posição angular, conforme equação (7.7). No entanto, essa definição de frequência instantânea apresenta problemas que limitam o seu uso direto em sinais arbitrários, tais como valores negativos e flutuações indesejadas da frequência instantânea (HUANG; SHEN, 2014; FENG; ZHANG; ZUO, 2017). Esses problemas podem ser ilustrados de forma simples por meio do sinal

$$x(t) = \alpha + \text{sen}(\omega_0 t), \quad (7.8)$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária e $\omega_0 > 0$ é a frequência angular. A Figura 68a ilustra o gráfico da equação (7.8) para valores distintos de α , em que $\omega_0 = 0,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Como é possível observar, esses gráficos são apenas senoides cujas médias estão deslocadas por α . A HT da equação (7.8) é dada por

$$y(t) = \mathcal{H}[x(t)] = -\cos(\omega_0 t). \quad (7.9)$$

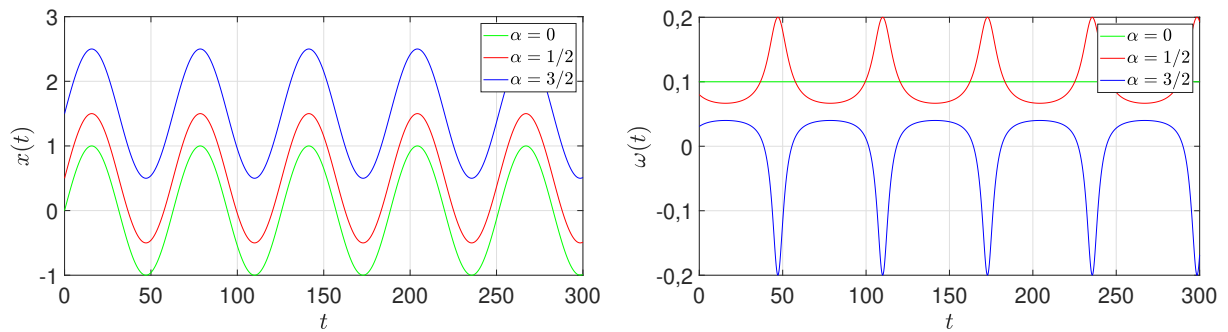
Figura 67 – O sinal analítico $z(t)$ é um sinal bidimensional cujo valor em cada instante de tempo t é especificado por suas partes real e imaginária, $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Considerando $x(t) = \text{sen}(t)$ (curva azul), sua HT é $y(t) = -\cos(t)$ (curva verde), de modo que $z(t) = \exp(-jt)$ (curva vermelha). A curva rosa representa o lugar geométrico dos pontos descritos pela ponta do fasor conforme ele rotaciona no plano complexo.



Fonte: O autor.

Figura 68 – A frequência instantânea obtida por meio da HT apresenta problemas sérios, tais como frequências negativas e flutuações indesejadas. Isso faz com que o seu significado físico seja perdido. Dessa forma, ela não pode ser computada inadvertidamente para sinais arbitrários, sendo necessário o uso de técnicas adequadas de pré-processamento para superar esses problemas.

- (a) Gráfico de sinais senoidais com frequência angular $\omega_0 = 0,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ e médias deslocadas por α . Esses sinais ilustram o problema da frequência instantânea via HT. (b) Gráfico das frequências instantâneas calculadas via HT referente aos sinais senoidais. O único resultado significativo ocorre quando $\alpha = 0$.



Fonte: O autor.

Substituindo as equações (7.8) e (7.9) na equação (7.7) obtém-se a seguinte expressão para a frequência instantânea

$$\omega(t) = \left(\frac{1 + \alpha \sin(\omega_0 t)}{1 + 2\alpha \sin(\omega_0 t) + \alpha^2} \right) \omega_0,$$

cujo gráfico está ilustrado na Figura 68b para diferentes valores de α . Note que o único resultado significativo é para o caso $\alpha = 0$. Isso ocorre porque nos outros casos as curvas não têm média zero e também não são simétricas com respeito ao eixo do tempo (HUANG; ATTOH-OKINE, 2005). O caso $\alpha < 1$ ilustra a presença de ondas assimétricas, enquanto $\alpha > 1$ retrata a presença de ondas surfantes, que são oscilações entre extremos sem cruzamento com o zero (HUANG et al., 1998). Esse exemplo mostra que mesmo para um sinal tão simples como uma senoide, a frequência instantânea só é significativa se houver simetria com respeito a média zero.

Em verdade, o que acontece é que a frequência instantânea determinada via HT só é fisicamente significativa para sinais monocomponentes, para os quais há apenas uma frequência ou um intervalo estreito de frequências variando em função do tempo, tal como acontece com sinais senoidais puros e sinais *chirp*, respectivamente (BOASHASH, 1992). A representação tempo-frequência de um sinal monocomponente é descrita por uma única “cordilheira” que corresponde a uma região alongada de concentração de energia (COHEN, 1992; BOASHASH, 2003). Portanto, se a HT for aplicada inadvertidamente em sinais multicomponentes³ advindos de processos não lineares e não estacionários, resultados sem

³ Um sinal multicomponente é aquele que apresenta diversas regiões delimitadas de concentração de

sentido podem ser obtidos no que diz respeito à frequência instantânea. De fato, esses sinais podem conter ondas surfantes e formas de onda assimétricas que eventualmente produzem valores negativos e flutuações indesejadas na frequência instantânea. Nesse sentido, os sinais devem ser pré-processados antes da aplicação da HT para a obtenção de resultados fisicamente significativos. De acordo com [Huang et al. \(1998\)](#), a técnica correta de pré-processamento dessa classe de sinais deve ser adaptativa e implementada no domínio do tempo, tendo em vista que os métodos baseados na análise de Fourier irão certamente gerar harmônicos espúrios que são matematicamente necessários, mas fisicamente sem sentido ([HUANG et al., 1998](#)).

É neste contexto que ocorre a principal contribuição de [Huang et al. \(1998\)](#), pois ele introduziu a EMD justamente para decompor sinais multicomponentes em IMFs, que são sinais aproximadamente monocomponentes que satisfazem as seguintes condições:

1. Ao longo de toda a duração do sinal, o número de extremos (máximos e mínimos) e o número de cruzamentos com o zero devem ser iguais ou diferir por no máximo uma unidade.
2. Em qualquer ponto, o valor médio do envelope definido pelo máximos locais e do envelope definido pelos mínimos locais deve ser zero.

A primeira condição trata da eliminação das ondas surfantes para evitar as frequências instantâneas negativas, enquanto a segunda condição serve para evitar flutuações indesejadas da frequência instantânea induzidas por assimetrias nos perfis ondulatórios ([HUANG et al., 1998](#)). A EMD é o assunto da seção 7.1.

7.1 Decomposição em Modo Empírico

A decomposição em modo empírico é um método iterativo, adaptativo e orientado a dados que tem por objetivo decompor um sinal multicomponente $x(t)$ em um número finito de sinais aproximadamente monocomponentes com diferentes escalas de tempo⁴, isto é, em IMFs. As IMFs são sinais com média zero, modulados tanto em frequência quanto em amplitude, que têm transformadas de Hilbert bem comportadas a partir das quais é possível obter frequências instantâneas fisicamente significativas ([KOPSINIS; MCLAUGHLIN, 2008](#)). Apesar disso, há alguns sinais patológicos que apresentam frequências instantâneas negativas que não tem sentido físico mesmo satisfazendo a definição de uma IMF ([SHARPLEY; VATCHEV, 2006](#)). O conjunto de IMFs forma uma base que satisfaz as condições necessárias para representar sinais de processos não lineares e não estacionários

energia no plano tempo-frequência, como discutido em [Cohen \(1992\)](#). A fala humana é o principal exemplo de sinal multicomponente.

⁴ Por escala de tempo, entenda-se a duração temporal entre extremos sucessivos (máximos ou mínimos).

(HUANG et al., 1998). Em outros termos, a base é completa, ortogonal⁵, local e adaptativa. Especificamente, essas condições são importantes pelos seguintes motivos:

1. **Completa:** O fato da base ser completa garante que o sinal original pode ser reconstruído com um certo grau de precisão ao somar todas as IMFs.
2. **Ortogonal:** A ortogonalidade garante a positividade da energia e a não redundância das informações contidas em cada uma das IMFs. Na prática, as IMFs formam uma base *quase* ortogonal, pois em decomposições não lineares a ortogonalidade não funciona.
3. **Local:** A localidade é importante para sinais de processos não estacionários, pois suas propriedades variam com o tempo, como é o caso do conteúdo espectral. Nesse sentido, os eventos contidos nesses sinais devem ser identificados no momento de sua ocorrência.
4. **Adaptativa:** A adaptatividade da base significa que ela é construída a partir do sinal original, sendo definida *a posteriori*. Esse fato torna a EMD diferente dos métodos tradicionais, pois estes utilizam uma base *a priori* para representar um sinal. Essa condição é importante porque ela permite que a base se adapte as variações locais do sinal original, além de evitar problemas com harmônicos espúrios como ocorre com os métodos baseados na análise de Fourier. A ideia é que o sinal original não seja forçado a se adequar a uma base preconcebida, pois como bem coloca o físico Richard Feynman:

“O trabalho de um cientista é de escutar cuidadosamente a natureza, não de dizer como ela deve se comportar.”

A única desvantagem da adaptatividade é que ela torna a EMD um método matematicamente menos rigoroso, apesar de alguns esforços nessa direção (DELECHELLE; LEMOINE; NIANG, 2005; RILLING; FLANDRIN, 2008).

No algoritmo da EMD, as IMFs são extraídas de $x(t)$ com o auxílio de um procedimento iterativo chamado de processo de peneiramento, cujo propósito é eliminar a presença de ondas surfantes locais e de assimetrias locais nos perfis ondulatórios de um sinal. Como discutido anteriormente, elas são responsáveis por produzir frequências instantâneas sem sentido físico (VELTCHEVA; SOARES, 2004; SHARPLEY; VATCHEV, 2006). No algoritmo usual da EMD, o número de IMFs extraídas de um sinal com comprimento N é tipicamente próximo, mas não superior a $\log_2(N)$ (WU; HUANG, 2010). Além disso, o algoritmo extrai as IMFs com as maiores frequências primeiro, de modo que as últimas

⁵ Na realidade, as IMFs formam uma base *quase* ortogonal, pois em decomposições não lineares a ortogonalidade não funciona.

IMFs têm as menores frequências. Em verdade, [Wu e Huang \(2004\)](#) e [Flandrin, Rilling e Goncalves \(2004\)](#) mostraram que a EMD atua como um banco de filtros diádico. O algoritmo da EMD consiste dos seguintes passos:

1. **(Inicialização)**. Sejam $i = 1$ e $r_0(t) = x(t)$.
2. **(Extraindo a i -ésima IMF)**. Seja $c_i(t)$ a i -ésima IMF. Então, ela pode ser determinada por meio dos seguintes passos:
 - 2.1. Seja $h_0(t) = r_{i-1}(t)$ e $k = 1$.
 - 2.2. Identifique todos os extremos (mínimos e máximos) locais de $h_{k-1}(t)$.
 - 2.3. Sejam $L_{k-1}(t)$ e $U_{k-1}(t)$ os envelopes inferior e superior de $h_{k-1}(t)$, respectivamente. Utilizando interpolação cúbica segmentada (*spline*), construa $L_{k-1}(t)$ conectando todos os mínimos locais e $U_{k-1}(t)$ utilizando todos os máximos locais.
 - 2.4. A partir dos envelopes inferior e superior, calcule o envelope médio $m_{k-1}(t)$. Isto é, faça $m_{k-1}(t) = \frac{L_{k-1}(t) + U_{k-1}(t)}{2}$.
 - 2.5. Subtraia o envelope médio de $h_{k-1}(t)$, ou seja, faça $h_k(t) = h_{k-1}(t) - m_{k-1}(t)$.
 - 2.6. Verifique se $h_k(t)$ satisfaz a definição de uma IMF utilizando algum critério. Um dos critérios usualmente utilizados requer que o desvio padrão de duas operações de peneiramento consecutivas, dado por

$$SD_k = \sum_t \frac{|m_{k-1}(t)|^2}{[h_{k-1}(t)]^2}, \quad (7.10)$$

seja menor que algum valor predeterminado ϵ . Um valor típico para SD_k pode ser definido entre 0,2 e 0,3, sendo que bons resultados podem ser obtidos tomando $\epsilon = 0,3$ ([HUANG et al., 1998](#); [WANG et al., 2010](#); [LIN et al., 2019](#)). Assim sendo, tem-se que

- i. Se $SD_k < \epsilon$, então faça $c_i(t) = h_k(t)$ e $r_i(t) = r_{i-1}(t) - c_i(t)$. Depois, vá para o passo 3.
- ii. Caso contrário, aumente o valor de k em uma unidade e retorne ao passo 2.2.

É possível utilizar outros critérios, como os discutidos por [Huang e Wu \(2008\)](#) e [Wang et al. \(2010\)](#).

3. **(Verificando o i -ésimo resíduo)**. Se o resíduo $r_i(t)$ se tornar uma função monotônica a partir da qual nenhuma IMF pode ser extraída, encerre o processo de peneiramento. Caso contrário, aumente o valor de i em uma unidade e retorne ao passo 2.

A partir dos passos 1, 2 e 3, nota-se que cada iteração do algoritmo produz uma IMF $c_i(t)$ e um resíduo $r_i(t)$ correspondente. Dessa forma, assumindo que n iterações sejam necessárias para extrair todas as IMFs, vem que

$$\begin{aligned}
 \text{Iteração 1:} & & r_1(t) &= x(t) - c_1(t), \\
 \text{Iteração 2:} & & r_2(t) &= r_1(t) - c_2(t), \\
 \text{Iteração 3:} & & r_3(t) &= r_2(t) - c_3(t), \\
 & \vdots & & \\
 \text{Iteração } n: & & r_n(t) &= r_{n-1}(t) - c_n(t).
 \end{aligned}$$

Somando todos os resíduos acima obtém-se

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) + r_n(t). \quad (7.11)$$

A equação (7.11) é a decomposição de $x(t)$ em uma coleção de n IMFs juntamente com um resíduo $r_n(t)$, que pode ser uma tendência média ou uma constante (HUANG et al., 1998). O algoritmo da EMD está descrito em pseudocódigo no Algoritmo 1, enquanto a Figura 69 ilustra o seu fluxograma. É importante ressaltar que o algoritmo da EMD

Algoritmo 1: O algoritmo da EMD.

Entrada: Um sinal multicomponente $x(t)$ e uma tolerância ϵ .
Resultado: Uma coleção de n IMFs $c_i(t)$ e um resíduo $r_n(t)$.

- 1 $r_0(t) \leftarrow x(t)$;
- 2 $i \leftarrow 0$;
- 3 **faça**
- 4 $h_0(t) \leftarrow r_i(t)$;
- 5 $i \leftarrow i + 1$;
- 6 $k \leftarrow 0$;
- 7 **faça**
- 8 $k \leftarrow k + 1$;
- 9 Identifique todos os extremos de $h_{k-1}(t)$;
- 10 Utilizando interpolação cúbica segmentada (*spline*), construa $L_{k-1}(t)$ conectando todos os mínimos locais e $U_{k-1}(t)$ utilizando todos os máximos locais;
- 11 Calcule o envelope médio, isto é, $m_{k-1}(t) \leftarrow \frac{L_{k-1}(t) + U_{k-1}(t)}{2}$;
- 12 Faça $h_k(t) \leftarrow h_{k-1}(t) - m_{k-1}(t)$;
- 13 Determine o desvio padrão, isto é, $SD_k \leftarrow \sum_t \frac{|m_{k-1}(t)|^2}{[h_{k-1}(t)]^2}$;
- 14 **enquanto** $SD_k \geq \epsilon$;
- 15 $c_i(t) \leftarrow h_k(t)$;
- 16 $r_i(t) \leftarrow r_{i-1}(t) - c_i(t)$;
- 17 **enquanto** $r_i(t)$ não for uma função monotônica;

não é único, pois ele depende da escolha de vários parâmetros, tais como do esquema de interpolação utilizado na construção dos envelopes, do critério de parada do processo de peneiramento e da forma pela qual os efeitos de borda são tratados. Uma escolha inapropriada desses parâmetros pode resultar em um excesso de iterações no processo de peneiramento, drenando o significado físico das IMFs, bem como na mistura de modos (ZEILER et al., 2010). A mistura de modos ocorre quando uma IMF deixa de ser aproximadamente monocomponente por apresentar componentes de frequência diferentes. Em geral, esse é um fenômeno que pode ser observado na primeira IMF (PENG; TSE; CHU, 2005; DAS et al., 2021).

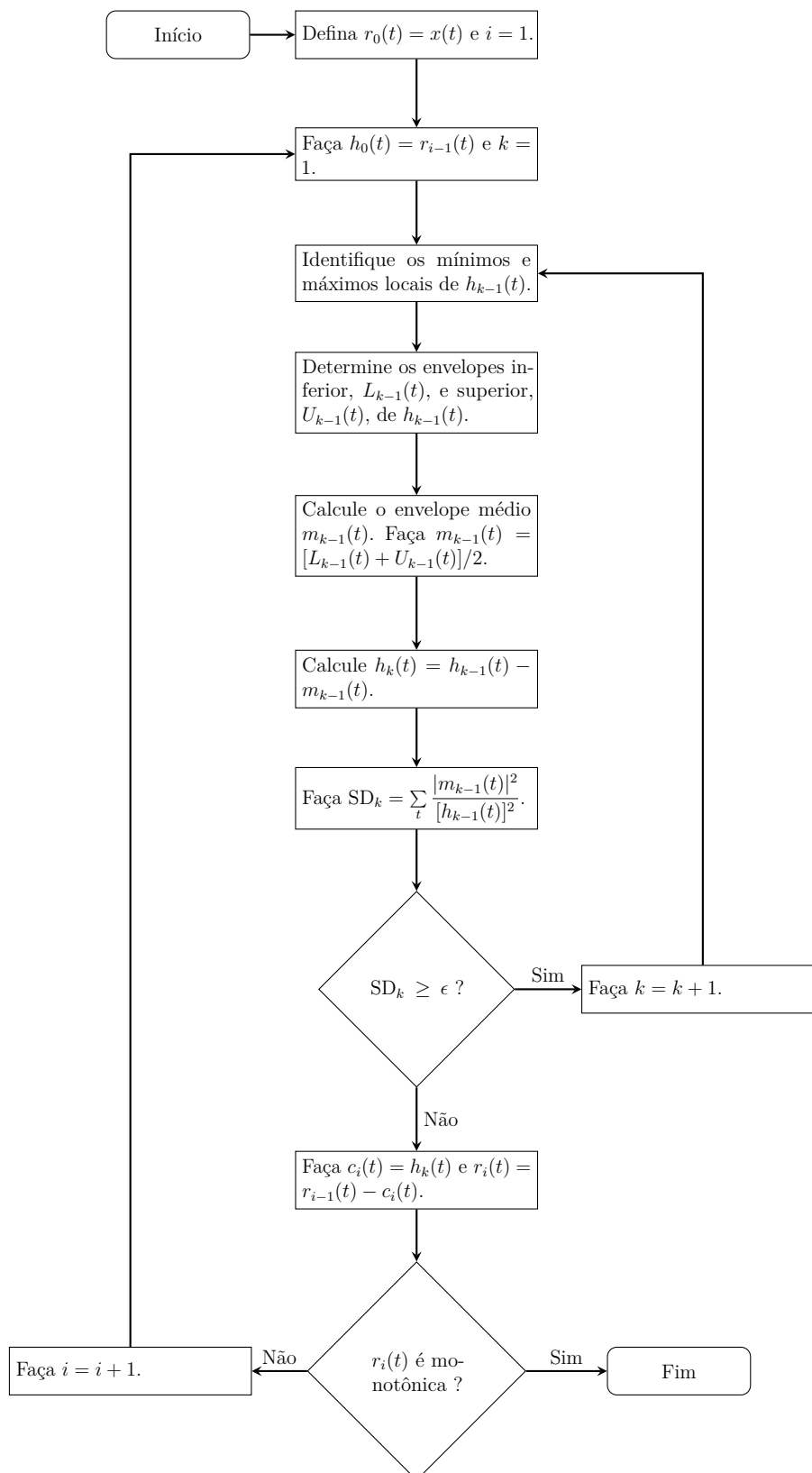
A escolha do critério de parada do processo de peneiramento é essencial para a correta implementação do algoritmo da EMD, pois o excesso de iterações pode resultar em uma IMF a partir da qual nenhum significado físico pode ser extraído (HUANG et al., 1998). De fato, no final de cada iteração obtém-se um sinal cujo perfil oscilatório é cada vez mais simétrico e cuja média é cada vez mais próxima de zero. Dessa forma, um número elevado de iterações fará com que o sinal tenha amplitude constante e apresente modulação apenas em frequência, de onde não é possível extrair nenhuma informação física significativa, tendo em vista que ela reside na variação da amplitude do sinal (HUANG; ATTOH-OKINE, 2005). O critério de parada definido pelo desvio padrão na equação (7.10) foi originalmente proposto por Huang et al. (1998), porém ele pode ser problemático quando o denominador $h_{k-1}(t)$ for pequeno. Esse problema pode ser resolvido somando as contribuições de $h_{k-1}(t)$ ao longo de toda a duração do sinal, em vez de utilizar um valor pontual. Assim, a equação (7.10) é reescrita como

$$SD_k = \frac{\sum_t |m_{k-1}(t)|^2}{\sum_t [h_{k-1}(t)]^2}. \quad (7.12)$$

Os critérios de parada definidos pelas equações (7.10) e (7.12), $SD_k < \epsilon$, apresentam dois problemas que não podem ser negligenciados (HUANG; WU, 2008). O primeiro deles é referente à subjetividade na escolha do valor de ϵ : o quão pequeno ele deve ser? O segundo refere-se ao fato de que os critérios não envolvem a definição de uma IMF. Assim, nada garante que um sinal que satisfaça esses critérios tenha o mesmo número de extremos e cruzamentos com o zero, por exemplo. Nesse sentido, Huang, Shen e Long (1999) e Huang et al. (2003) introduziram um novo critério de parada, no qual o processo de peneiramento é interrompido quando o número de cruzamentos com o zero e extremos são iguais por S peneiramentos sucessivos (HUANG et al., 2003). Uma nova dificuldade surge quanto a escolha do número S , porém bons resultados podem ser obtidos tomando $3 \leq S \leq 5$.

A escolha do esquema de interpolação também é crítica para o sucesso da implementação do algoritmo da EMD. Dentre os métodos tradicionais de interpolação, os melhores resultados são obtidos utilizando a interpolação por *splines* cúbicos (BJELICA et al., 2012).

Figura 69 – Fluxograma do algoritmo da EMD.



Fonte: O autor.

Apesar disso, esse tipo de interpolação induz grandes flutuações nas extremidades do sinal que se não forem tratadas podem se propagar para o interior do mesmo à medida que o processo de peneiramento progride (HUANG et al., 1998). Como resultado, algumas IMFs indesejadas de baixa frequência são produzidas, prejudicando a interpretação do sinal original (DAS et al., 2021). Vários métodos foram propostos para mitigar esse problema, tais como a previsão de séries temporais utilizando redes neurais (DENG et al., 2001), extensão por espelhamento (ZHAO, 2001) e extensões periódicas par e ímpar da série temporal (ZENG; HE, 2004).

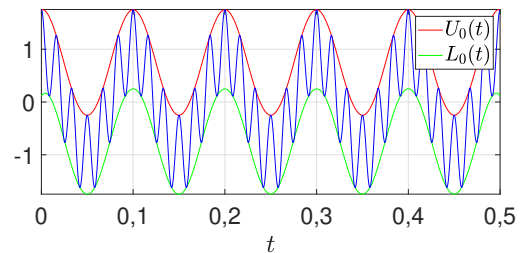
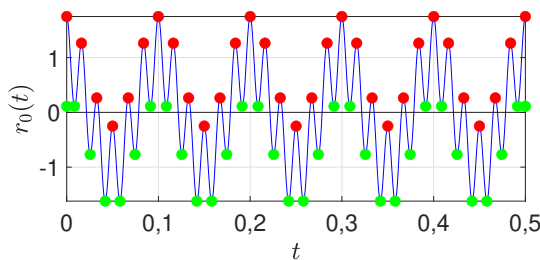
Para ilustrar a primeira iteração ($k = 1$) da extração da primeira IMF ($i = 1$), considere um sinal sintético $x(t)$ composto pela soma de duas ondas senoidais com frequências de 10 e 60 Hz, isto é,

$$x(t) = \cos(\omega t) + \frac{3}{4} \cos(6\omega t), \quad (7.13)$$

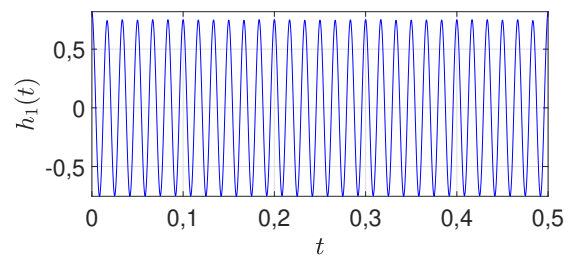
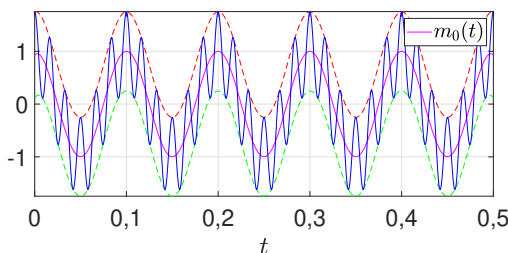
em que $\omega = 20\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. A Figura 70a ilustra o gráfico da equação (7.13) no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, onde é possível observar a presença de ondas surfantes que devem ser eliminadas pelo processo de peneiramento. O primeiro passo consiste em obter os mínimos e máximos locais de $x(t)$, que estão indicados pelas marcações verdes e vermelhas na Figura 70a. Por conseguinte, os extremos identificados devem ser utilizados para construir os envelopes inferior, $L_0(t)$, e superior, $U_0(t)$, de $x(t)$ por meio da interpolação cúbica segmentada. Esses envelopes estão indicados na Figura 70b pelas curvas verde e vermelha. O próximo

Figura 70 – Ilustração da primeira iteração ($k = 1$) para a extração da primeira IMF ($i = 1$).

- (a) Gráfico do sinal $r_0(t)$, que nessa iteração é o sinal original $x(t)$. (b) Gráfico dos envelopes inferior e superior de $r_0(t)$, $L_0(t)$ e $U_0(t)$, respectivamente.



- (c) Gráfico do envelope médio $m_0(t)$, dado pela média aritmética de $L_0(t)$ e $U_0(t)$. (d) Gráfico do sinal residual $h_1(t) = r_0(t) - m_0(t)$.

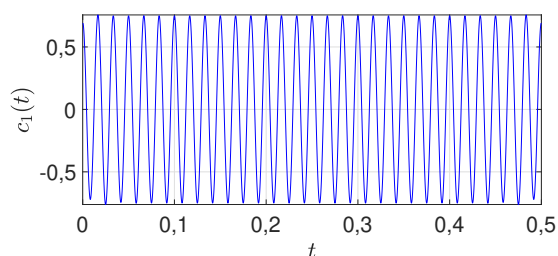


Fonte: O autor.

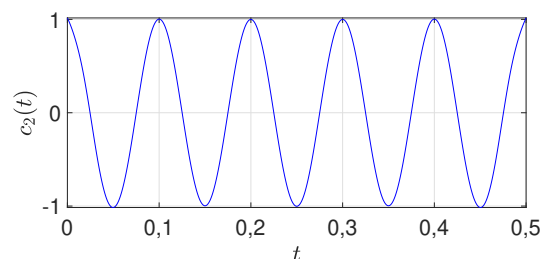
passo consiste em calcular o envelope médio $m_0(t)$ por meio da média aritmética de $L_0(t)$ e $U_0(t)$. O envelope médio está ilustrado na Figura 70c pela curva rosa. Por fim, calcula-se a diferença entre $h_0(t) = x(t)$ e $m_0(t)$ para gerar o sinal $h_1(t)$, que está ilustrado na Figura 70d. Observe que $h_1(t)$ é praticamente a componente de 60 Hz da equação (7.13). Isso sugere que a primeira IMF obtida será a componente com a maior frequência de $x(t)$, como esperado. A Figura 71 ilustra todas as IMFs obtidas com o processo de peneiramento.

Figura 71 – Um total de quatro IMFs foram obtidas para o sinal da equação (7.13), sendo que as duas primeiras, $c_1(t)$ e $c_2(t)$, representam, em essência, as componentes de 10 e 60 Hz do sinal. Como comentado anteriormente, IMFs de baixa frequência às vezes são geradas por conta de problemas com a interpolação nas extremidade do sinal.

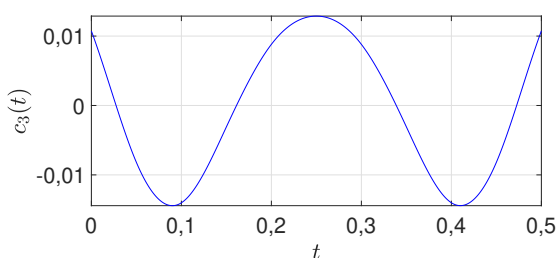
(a) Primeira IMF.



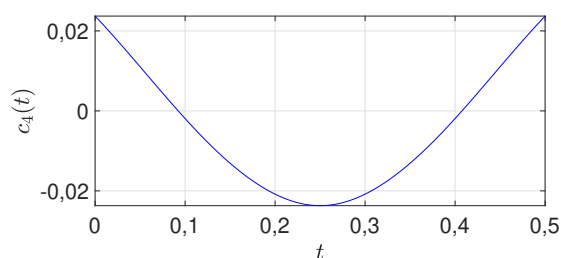
(b) Segunda IMF.



(c) Terceira IMF.



(d) Quarta IMF.



Fonte: O autor.

7.2 Análise Espectral de Hilbert

Suponha que n IMFs tenham sido obtidas com a EMD de um sinal multicomponente $x(t)$. A próxima etapa da HHT, chamada de análise espectral de Hilbert (HSA), consiste em aplicar a HT em cada uma das IMFs, $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$, para determinar suas respectivas amplitudes, fases e frequências instantâneas de acordo com as equações (7.5), (7.6) e (7.7), respectivamente. Para tanto, é preciso computar o sinal analítico de cada uma das IMFs via HT. Seja $z_i(t)$ o sinal analítico construído a partir da i -ésima IMF, com $1 \leq i \leq n$. Então, $z_i(t)$ é expresso como

$$\begin{aligned} z_i(t) &= c_i(t) + j\mathcal{H}[c_i(t)] \\ &= a_i(t) \exp[j\theta_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (7.14)$$

em que

$$a_i(t) = \sqrt{c_i^2(t) + \mathcal{H}[c_i(t)]^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e

$$\theta_i(t) = \text{arctg} \left[\frac{\mathcal{H}[c_i(t)]}{c_i(t)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

correspondem à amplitude e fase instantâneas da i -ésima IMF, respectivamente. A frequência instantânea é obtida por meio da derivada da fase,

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, utilizando a equação (7.14) pode-se reescrever a equação (7.11) da seguinte forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) \exp \left[j \int_t \omega_i(\tau) d\tau \right] \right) + r_n(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(t) \cos [\theta_i(t)] + r_n(t), \end{aligned} \quad (7.15)$$

em que Re denota a parte real. A equação (7.15) mostra que a expansão de $x(t)$ obtida pela EMD pode ser vista como uma expansão de Fourier generalizada, na qual tanto a amplitude quanto a frequência são funções do tempo. Na expansão de Fourier usual, esses parâmetros são constantes. Na realidade, é essa variabilidade temporal da amplitude e da frequência que torna a expansão tão apropriada para sinais oriundos de processos não lineares e não estacionários (HUANG; ATTOH-OKINE, 2005).

A partir da frequência instantânea, $\omega_i(t)$, e da amplitude instantânea, $a_i(t)$, pode-se construir uma distribuição tempo-frequência da amplitude, denotada por $H_i(\omega, t)$. A função

$H_i(\omega, t)$ representa a i -ésima componente do espectro de Hilbert, sendo definida por

$$H_i(\omega, t) = \begin{cases} a_i(t), & \text{para } \omega = \omega_i(t) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dessa forma, o espectro de Hilbert total é dado por

$$H(\omega, t) = \sum_{i=1}^n H_i(\omega, t). \quad (7.16)$$

Caso a amplitude ao quadrado, $a_i^2(t)$, seja utilizada na equação (7.16), o espectro passa a ser chamado de espectro de energia de Hilbert, o qual fornece uma distribuição tempo-frequência da energia. O espectro de Hilbert é uma forma mais econômica e precisa de representar um sinal, tendo em vista que o número de IMFs em geral é pequeno e ao fato de que tempo e frequência não estão limitados pela incerteza de Heisenberg. Isso acontece porque a frequência é obtida via HT por uma derivada, não envolvendo integração como ocorre com as análises de Fourier e *wavelet*. Além disso, o espectro de Hilbert é capaz de evidenciar o significado físico embutido no sinal de forma mais adequada.

Para ilustrar a superioridade do espectro de Hilbert frente ao espectro de potência *wavelet*, considere o seguinte sinal modulado em frequência:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\omega_0 t + \epsilon \sin \omega_0 t) \\ &= \cos(\omega_0 t) \cos[\epsilon \sin(\omega_0 t)] - \sin(\omega_0 t) \sin[\epsilon \sin(\omega_0 t)] \\ &\approx \cos(\omega_0 t) - \epsilon \sin^2(\omega_0 t) \approx \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\epsilon \cos(2\omega_0 t), \end{aligned} \quad (7.17)$$

em que ϵ é um parâmetro de perturbação pequeno. A Figura 72a ilustra o gráfico da equação (7.17) para $\omega_0 = 2\pi f$ e $\epsilon = 0,3$, em que $f = 5$ Hz. Note que ele consiste em uma senoide deformada não linearmente com cristas afiadas e vales arredondados. A Figura 72b ilustra o espectro de Hilbert desse sinal, revelando nitidamente a modulação em frequência, isto é, a variação da frequência em torno da frequência fundamental de 5 Hz. Por outro lado, a Figura 72c apresenta o espectro de potência *wavelet*, que revela apenas uma faixa de frequências espalhadas ao redor da frequência de 5 Hz, juntamente com um harmônico em 10 Hz, tendo em vista que a aproximação de segunda ordem de $x(t)$ são duas senoides com frequências angulares ω_0 e $2\omega_0$, conforme equação (7.17). Esse exemplo simples mostra que a HHT interpreta não linearidades em termos de modulação em frequência, enquanto a análise *wavelet* (técnica baseada em Fourier) tem uma interpretação baseada em harmônicos espúrios (distorção harmônica) que causam um espalhamento da energia para harmônicas de alta ordem (HUANG; ATTOH-OKINE, 2005). Por outro lado, a Figura 73 ilustra a superioridade de resolução do espectro de Hilbert para um sinal cujo conteúdo espectral varia com o tempo (não é estacionário). Uma discussão detalhada

sobre as vantagens do espectro de Hilbert frente as outras técnicas pode ser encontrada em [Huang et al. \(1998\)](#) e [Donnelly e Rogers \(2009\)](#).

Uma vez definido o espectro de Hilbert, pode-se definir uma nova quantidade chamada de espectro marginal, $h(\omega)$, integrando $H(\omega, t)$ ao longo da duração do sinal, isto é,

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, t) dt, \quad (7.18)$$

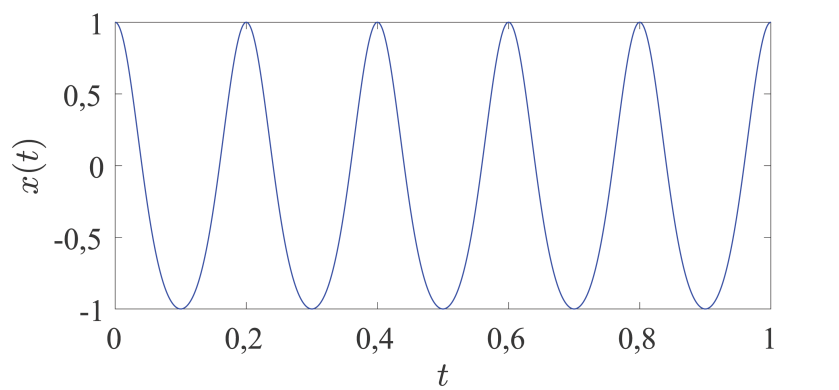
em que T denota a duração do sinal. A equação (7.18) representa a energia acumulada em cada frequência, de modo que o espectro marginal é bastante semelhante ao espectro de potência da análise de Fourier. Uma outra quantidade de interesse é a energia instantânea, $\text{IE}(t)$, dada por

$$\text{IE}(t) = \int_{\omega} H^2(\omega, t) d\omega. \quad (7.19)$$

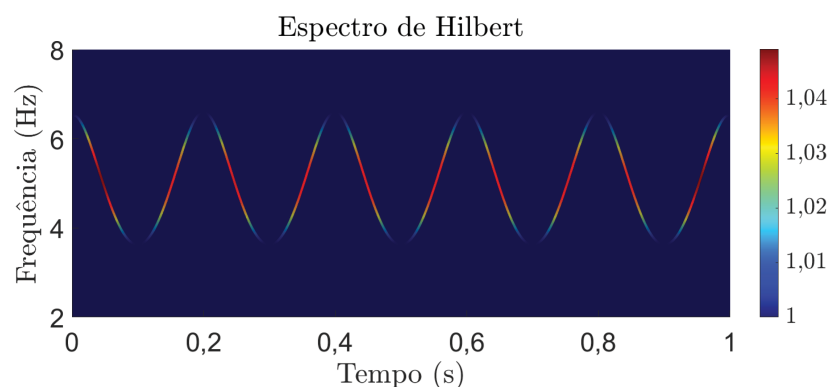
A equação (7.19) pode ser utilizada para verificar flutuações na energia.

Figura 72 – Esta figura apresenta o gráfico de uma senoide cujo perfil ondulatorio está deformado não linearmente devido a uma modulação em frequência, assim como o seu respectivo espectro de Hilbert e espectro de potência *wavelet*.

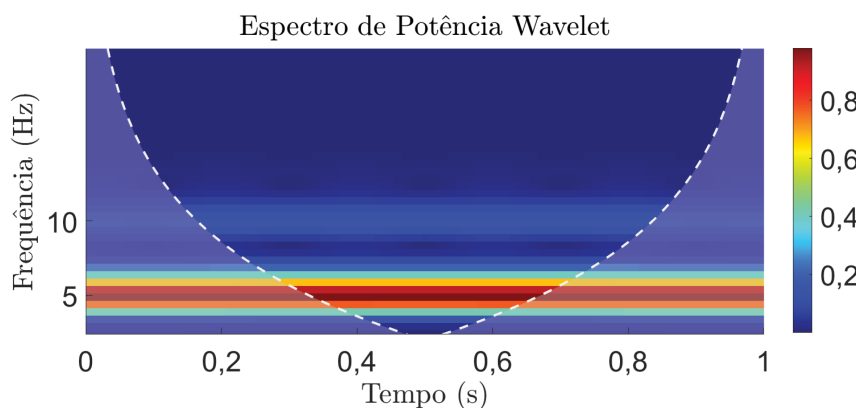
- (a) Gráfico do sinal $x(t)$ definido pela equação (7.17) no intervalo $t \in [0, 1]$, em que $\epsilon = 0,3$ e $\omega = 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



- (b) Espectro de Hilbert de $x(t)$ revelando a variação instantânea da frequência em torno de $f = 5 \text{ Hz}$. Observe como a HHT é capaz de revelar nitidamente a modulação em frequência.



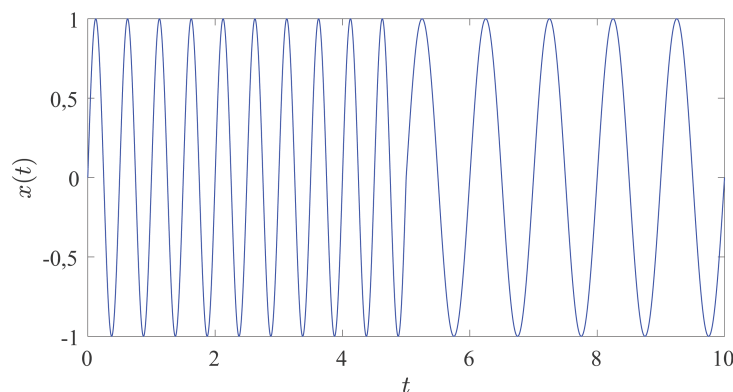
- (c) O espectro de potência *wavelet* revela apenas a presença de dois harmônicos, um de 5 Hz e outro de 10 Hz, uma vez que a equação (7.17) pode ser aproximada pela soma de duas senoides com frequências angulares ω e 2ω .



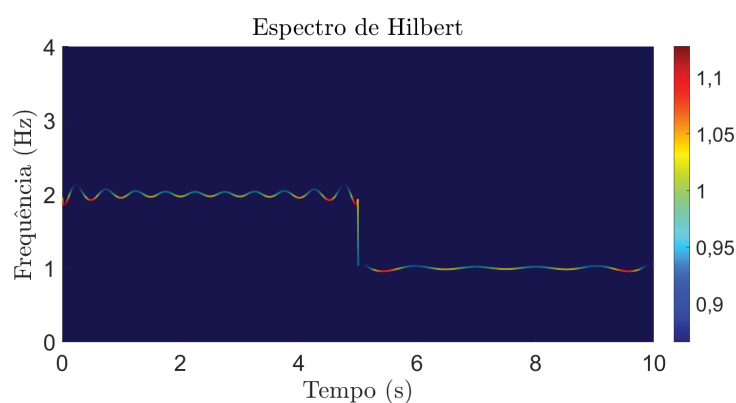
Fonte: O autor.

Figura 73 – Esta figura apresenta uma senoide cujo conteúdo espectral muda abruptamente de 2 Hz para 1 Hz, ilustrando um sinal de um processo não estacionário. Os espectros de Hilbert e de potência *wavelet* do sinal também são mostrados.

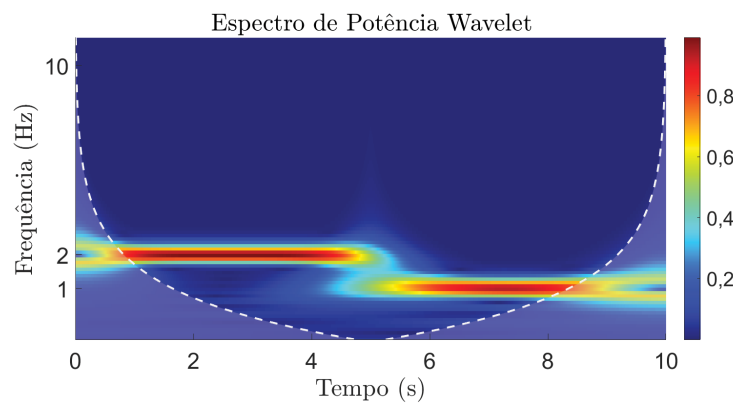
- (a) Gráfico de um sinal $x(t)$ composto por uma senoide de 2 Hz no intervalo $[0, 5]$ e outra de 1 Hz no intervalo $(5, 10]$.



- (b) Espectro de Hilbert de $x(t)$ mostrando nitidamente as frequências em seus respectivos intervalos, bem como o instante de transição.



- (c) O espectro de potência *wavelet* também revela as frequências em seus respectivos intervalos e o momento de transição, porém com uma resolução pior.



Fonte: O autor.

8 ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR

A análise espectral singular (SSA) é uma técnica de análise e previsão de séries temporais, cujo propósito principal é decompor uma série temporal em uma soma com um pequeno número de componentes interpretáveis e separáveis de tendência, oscilação (periódica ou quase-periódica) e ruído (sem estrutura) (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Assim sendo, a SSA está fundamentada na noção de separabilidade, que caracteriza o quanto as componentes de uma série temporal podem ser separadas umas das outras. A SSA é baseada na decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*) de uma matriz específica, que é construída a partir de subséries de uma série temporal. Ela é uma ferramenta bastante versátil, pois combina elementos da análise clássica de séries temporais, de geometria e estatística multivariada, de sistemas dinâmicos (teoria do caos), bem como de processamento de sinais, onde ela está intimamente relacionada com a expansão de Karhunen–Loève (PIKE et al., 1984). A etimologia da SSA advém da decomposição espectral de uma matriz \mathbf{X} em seu conjunto de autovalores λ , que é chamado de espectro de \mathbf{X} . Esses autovalores são os números que fazem a matriz $\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I}$ ser singular. Dessa forma, alguns consideram que o termo SSA é inadequado, tendo em vista que a tradicional decomposição espectral envolvendo dados multivariados também é uma análise espectral singular. Nesse sentido, Elsner e Tsonis (1996) sugerem que a SSA deveria ser chamada de análise de séries temporais utilizando o espectro singular.

Apesar das origens da SSA remontarem ao final do século XVIII (PRONY, 1795), o seu uso generalizado como uma ferramenta para analisar séries temporais é bastante recente, tendo começado na segunda metade do século XX. Em 1978, ela foi utilizada em oceanografia biológica (COLEBROOK, 1978), enquanto em meados da década de 80 ela foi introduzida à teoria do caos por meio dos trabalhos de Broomhead e King (1986a), Broomhead e King (1986b) e Fraedrich (1986), sendo que os dois primeiros são usualmente associados com o início da SSA (ELSNER; TSONIS, 1996; GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Desde sua introdução, ela vem se tornando a ferramenta padrão para a análise de séries temporais climáticas, meteorológicas e geofísicas (GOLYANDINA; NEKRUTKIN; ZHIGLJAVSKY, 2001). Por exemplo, Kondrashov e Ghil (2006) utilizaram a SSA para preencher pontos faltantes em conjuntos de dados geofísicos. A SSA também apresenta aplicações em engenharia biomédica, onde ela é utilizada na detecção de anormalidades em biosinais, tais como em eletrocardiogramas e eletroencefalogramas. Para mais aplicações nessa área, recomenda-se fortemente que o leitor consulte Sanei e Hassani (2016). Além disso, a SSA pode ser aplicada no modelamento e previsão de séries temporais financeiras e econômicas, como discutido em Hassani, Heravi e Zhigljavsky (2009), que fizeram uso da SSA para realizar previsões acerca da produção industrial europeia em

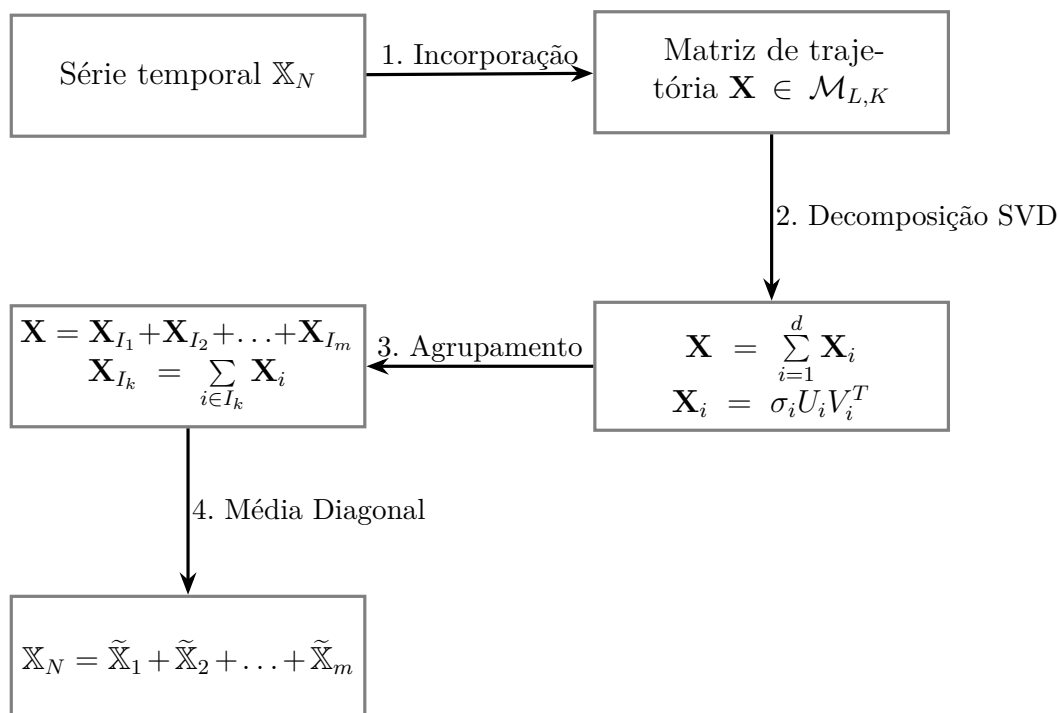
importantes setores econômicos. Uma revisão sobre essa vertente de aplicação pode ser encontrada em [Hassani e Thomakos \(2010\)](#).

O fato da SSA ser aplicada em diversas áreas do conhecimento não ocorre por acaso, pois ela apresenta diversas vantagens em relação às técnicas tradicionais. De fato, a SSA pode ser empregada sem a necessidade de quaisquer suposições estatísticas no que tange à série temporal original, isto é, ela não exige que a série seja oriunda de um processo estacionário e nem que ela esteja normalizada ([SANEI; HASSANI, 2016](#)). Além disso, a SSA oferece uma abordagem linear e adaptativa para a análise e previsão de séries temporais, tendo em vista que as funções base utilizadas na SSA advêm da série temporal original e, portanto, não são conhecidas *a priori* como nas técnicas usuais. Dessa forma, a SSA é muito conveniente para a análise de séries temporais oriundas de processos não lineares ([ELSNER; TSONIS, 1996](#)). Em suma, a SSA é uma técnica adequada para estudar séries temporais provenientes tanto de processos lineares (estacionários) quanto de processos não lineares (não estacionários) ([HASSANI; THOMAKOS, 2010](#)). Na realidade, esse é um dos motivos que fazem a SSA ser tão apropriada para o modelamento e previsão de séries temporais econômicas e financeiras, pois estas últimas são altamente influenciáveis por mudanças políticas e tecnológicas, mudanças na preferência de consumo dos consumidores, bem como por notícias e anúncios ([HASSANI; THOMAKOS, 2010](#)). Também é importante ressaltar a capacidade da SSA em lidar com séries temporais relativamente curtas e ruidosas. Por exemplo, [Hassani et al. \(2012\)](#) investigaram a separabilidade de uma série temporal com ruído por meio da SSA.

Neste capítulo, apenas o algoritmo da SSA básica é abordado, o qual consiste em dois estágios complementares, a saber: decomposição, que é descrito na seção 8.1, e reconstrução, que é descrito na seção 8.2. Cada um desses estágios são compostos por duas fases que serão explicadas em detalhes no decorrer deste capítulo. O estágio de decomposição compreende as fases de incorporação e decomposição SVD, enquanto o de reconstrução engloba as fases de agrupamento e média diagonal. A Figura 74 ilustra a relação das fases em cada um dos estágios. As ideias discutidas neste capítulo serão aplicadas a uma série temporal arbitrária $\mathbb{X}_N = (x_1, \dots, x_N)$ de comprimento $N > 2$, na qual existe ao menos um i tal que $x_i \neq 0$ ¹. Além disso, para que o leitor consiga visualizar a funcionalidade da SSA básica à medida que os conceitos são apresentados, estes serão aplicados à série temporal sintética ilustrada na Figura 75, a qual é composta pela superposição de uma componente de tendência parabólica, de duas componentes oscilatórias na forma de senoides com frequências de 2 e 8 Hz, e de uma componente ruidosa sem estrutura gerada por valores aleatórios entre -1 e 1 . Apesar do adjetivo “básico”, essa versão da SSA apresenta uma miríade de aplicações, tais como previsão, suavização, filtragem, preenchimento de dados faltantes, redução de ruído e extração de

¹ Isso garante que a série temporal é não nula.

Figura 74 – Fluxograma mostrando a relação entre as fases dos estágios de decomposição e reconstrução da SSA básica. Especificamente, o estágio de decomposição é composto pelas fases de incorporação e decomposição SVD, ao passo que o de reconstrução compreende as fases de agrupamento e média diagonal. A ideia fundamental da SSA básica é decompor a série temporal \mathbb{X}_N em várias séries temporais separáveis $\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbb{X}}_m$ que podem ser interpretadas como componentes de tendência, oscilação ou ruído.



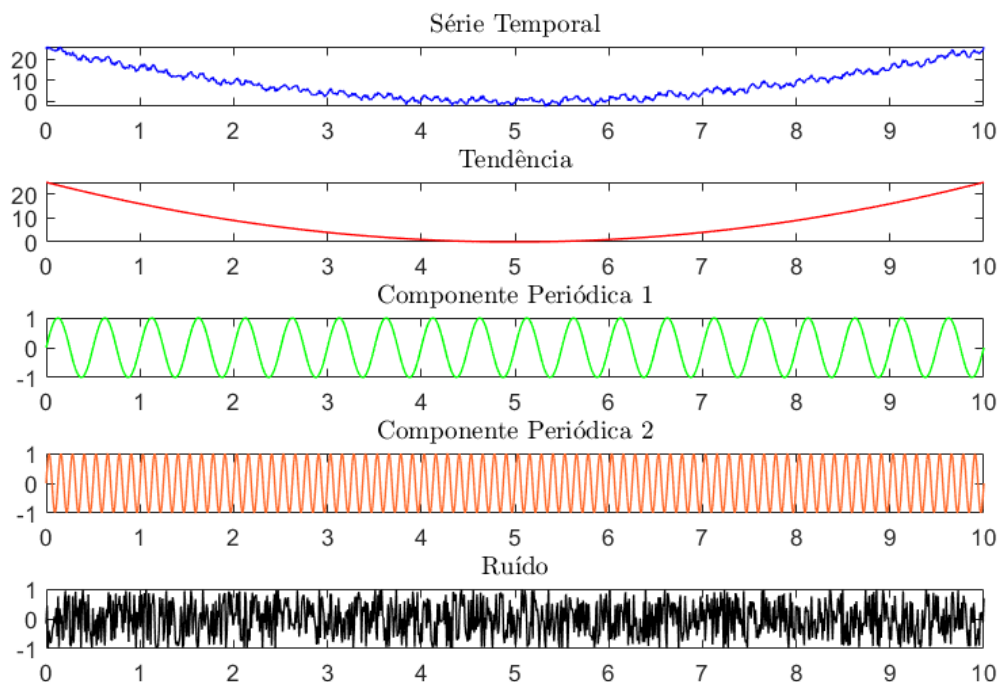
Fonte: O autor.

tendências, apenas para citar algumas. Neste trabalho, a SSA básica foi utilizada para a identificação e remoção de tendências em séries temporais de TEC, bem como para a obtenção de uma curva suave para as linhas de base Sq, que devem ser removidas das séries temporais geomagnéticas para enfatizar as variações geomagnéticas associadas a eventos sísmicos e oceânicos.

8.1 Primeiro Estágio: Decomposição

O estágio de decomposição é composto por duas fases principais. A primeira delas é chamada de incorporação e tem por objetivo mapear a série temporal unidimensional \mathbb{X}_N em uma série multidimensional composta por uma sequência de vetores defasados, os quais formam as colunas de uma matriz chamada de matriz de trajetória. Por conseguinte, a segunda fase é chamada de decomposição em valores singulares e tem por propósito decompor a matriz de trajetória em uma soma de matrizes elementares por meio da SVD. Na fase de incorporação, o único parâmetro importante é um inteiro L chamado de comprimento da janela, o qual deve satisfazer $2 \leq L \leq N - 1$. Na realidade, o comprimento da janela é o principal parâmetro da SSA, pois uma escolha inapropriada de L afeta a

Figura 75 – Para ilustrar o funcionamento da SSA básica, a série temporal em azul será utilizada ao longo deste capítulo. Ela corresponde à soma de uma componente de tendência parabólica, de duas componentes de oscilação na forma de senoides (2 e 8 Hz) e de uma componente de ruído sem estrutura. Essas componentes estão ilustradas nos gráficos abaixo da série temporal.



Fonte: O autor.

separabilidade das componentes da série, fazendo com que nenhum agrupamento (ver seção 8.2) produza uma boa decomposição. A escolha adequada de L depende do problema em questão, bem como de informações preliminares relativas à série temporal original. Apesar de não existir uma regra geral para a escolha de L , há vários princípios para efetuar essa escolha que têm bases teóricas e práticas (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Por exemplo, em séries temporais com componentes sazonais recomenda-se que L seja proporcional ao período de sazonalidade. Além disso, um valor de L muito pequeno pode acarretar na mistura das componentes interpretáveis da série, enquanto um valor elevado faz com que a decomposição da série seja mais detalhada. Ademais, recomenda-se que L não seja superior a $N/2$.

Durante a fase de incorporação, a série temporal \mathbb{X}_N é mapeada em $K = N - L + 1$ vetores defasados $X_i \in \mathbb{R}^L$ da forma

$$X_i = [x_i \ \dots \ x_{i+L-1}]^T, \quad 1 \leq i \leq K, \quad (8.1)$$

em que T denota a operação de transposição. Ao dispor os vetores defasados da equação

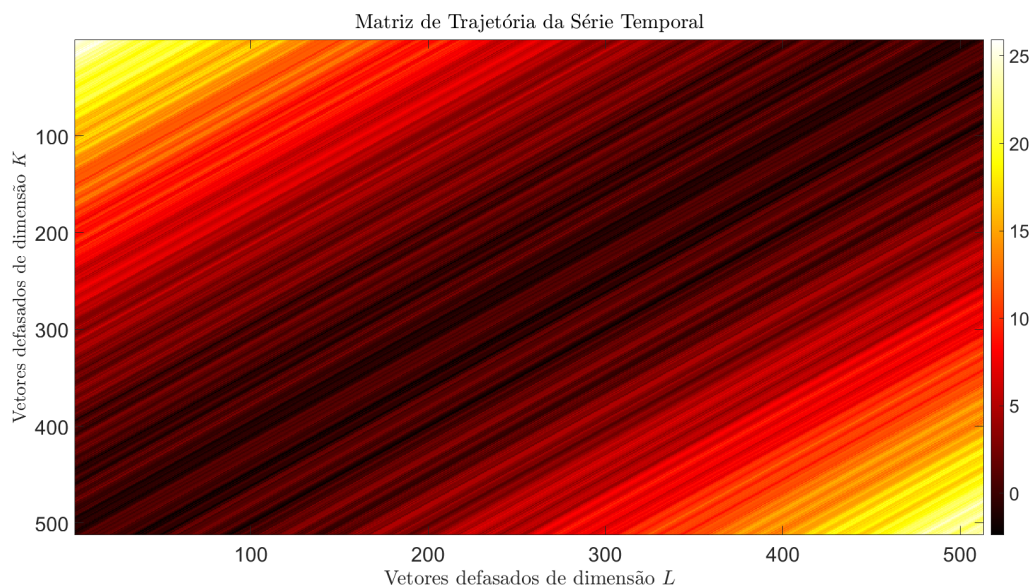
(8.1) em colunas, obtém-se a matriz de trajetória $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ da série \mathbb{X}_N , em que

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} | & & | \\ X_1 & \dots & X_K \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{K+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & x_{L+2} & \dots & x_N \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

Da equação (8.2), observa-se que tanto as linhas quanto as colunas de \mathbf{X} são subséries de \mathbb{X}_N . Além disso, note que todos os elementos ao longo das diagonais paralelas à diagonal secundária são iguais. Em outras palavras, todos os elementos x_{ij} ao longo da diagonal $i + j = k + 1$, com $1 \leq k \leq N$, são iguais, de modo que \mathbf{X} é uma matriz de Hankel. A série temporal \mathbb{X}_N pode ser obtida de \mathbf{X} extraíndo a primeira coluna e a última linha. Essa é uma propriedade importante das matrizes de Hankel que será utilizada posteriormente, pois retrata a relação biunívoca entre uma série temporal e sua matriz de trajetória correspondente. A fase de incorporação se encerra com a obtenção de \mathbf{X} , que está ilustrada na Figura 76 para a série temporal da Figura 75. Observe que ela apresenta um aspecto antidiagonal justamente por ser uma matriz de Hankel.

A segunda fase do estágio de decomposição consiste em decompor a matriz de trajetória \mathbf{X} em matrizes elementares utilizando a SVD, o que é feito por meio dos autova-

Figura 76 – Ilustração da matriz de trajetória da série temporal da Figura 75, em que $L = N/2$ com $N = 1024$. Dessa forma, a matriz de trajetória tem $L = 512$ linhas e $K = 513$ colunas, onde cada linha representa um vetor defasado de dimensão K , enquanto cada coluna é um vetor defasado de dimensão L . Ela apresenta uma estrutura antidiagonal justamente por se tratar de uma matriz de Hankel.



Fonte: O autor.

lores e autovetores da matriz $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{L \times L}$. A matriz \mathbf{S} é simétrica e semidefinida positiva, de modo que os seus L autovalores são números reais não negativos e que os respectivos autovetores formam um conjunto ortonormal de vetores. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$ os autovalores de \mathbf{S} em ordem decrescente de magnitude, em que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$, e U_1, U_2, \dots, U_L os respectivos autovetores. Sabe-se que o posto d de \mathbf{S} é dado pelo número de autovalores não nulos, isto é, $d = \text{posto}(\mathbf{S}) = \max\{i, \text{tal que } \lambda_i > 0\}$, de modo que $\text{posto}(\mathbf{X}) = d \leq \min(L, K)$. As raízes quadradas dos autovalores de \mathbf{S} , denotadas por $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, são chamadas de valores singulares de \mathbf{X} , os quais formam um conjunto $\{\sqrt{\lambda_i}\}_{i=1}^L$ denominado de espectro singular de \mathbf{X} (SANEI; HASSANI, 2016). Definindo $V_i = \mathbf{X}^T U_i / \sigma_i \in \mathbb{R}^K$, com $1 \leq i \leq d$, então a SVD da matriz de trajetória pode ser escrita como

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^d \sigma_i U_i V_i^T = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_d, \quad (8.3)$$

em que $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_L] \in \mathbb{R}^{L \times L}$ é uma matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores de \mathbf{S} , $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ é uma matriz retangular que contém em sua diagonal principal os valores singulares de \mathbf{X} em ordem decrescente de magnitude e $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \dots, V_K] \in \mathbb{R}^{K \times K}$ é uma matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores de $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$. A terna ordenada (σ_i, U_i, V_i) é chamada de i -ésima autotripla da SVD. As matrizes $\mathbf{X}_i = \sigma_i U_i V_i^T$ são denominadas de matrizes elementares porque têm posto unitário. No contexto da SVD, o autovetor U_i é chamado de vetor singular à esquerda, enquanto V_i é chamado de vetor singular à direita. Para ver que as colunas de \mathbf{V} são, de fato, os autovetores de $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, basta utilizar a equação (8.3) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^T (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T) \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T \underbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{U}}_{=\mathbf{I}_L} \mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T && \mathbf{I}_L \text{ é a matriz identidade de ordem } L \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T \mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{V}^T, && \mathbf{\Sigma}^2 = \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{\Sigma} \end{aligned}$$

de modo que pela ortogonalidade de \mathbf{V} tem-se

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^2 \iff (\mathbf{X}^T \mathbf{X})V_i = \sigma_i^2 V_i, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Analogamente, pode-se verificar que as colunas de \mathbf{U} são os autovetores de $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. De fato,

da equação (8.3) vem que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}\mathbf{X}^T &= (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T)(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T)^T \\
 &= \mathbf{U}\Sigma\underbrace{\mathbf{V}^T\mathbf{V}}_{=\mathbf{I}_K}\Sigma^T\mathbf{U}^T && \mathbf{I}_K \text{ é a matriz identidade de ordem } K \\
 &= \mathbf{U}\Sigma\Sigma^T\mathbf{U}^T \\
 &= \mathbf{U}\Sigma^2\mathbf{U}^T, && \Sigma^2 = \Sigma\Sigma^T
 \end{aligned}$$

donde

$$(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)\mathbf{U} = \mathbf{U}\Sigma^2 \iff (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)U_i = \sigma_i^2 U_i, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

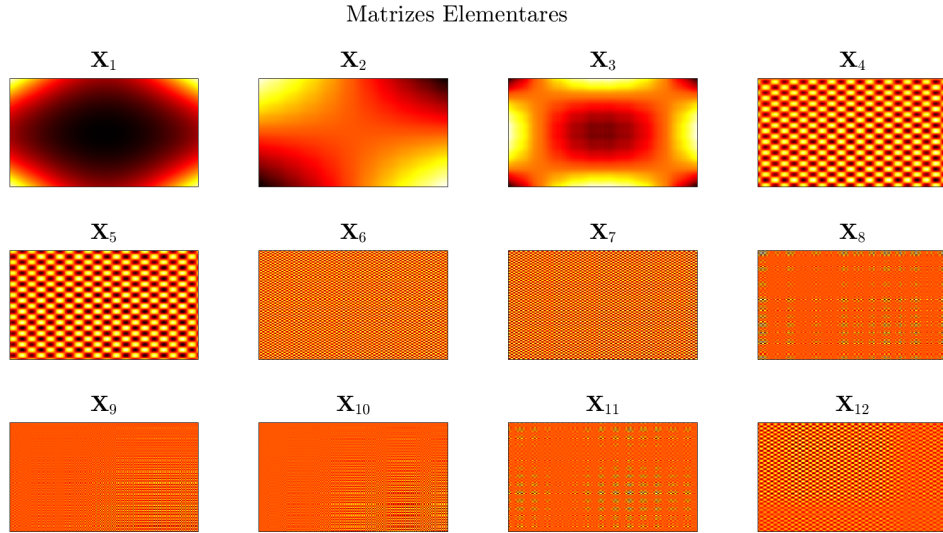
A Figura 77 mostra as 12 primeiras matrizes elementares da matriz de trajetória ilustrada na Figura 76, a qual foi decomposta em 512 matrizes elementares. Note que elas não apresentam um aspecto antidiagonal como a matriz de trajetória, pois não são matrizes de Hankel. Apesar disso, o aspecto de cada \mathbf{X}_i indica se ela está relacionada a uma componente interpretável de tendência, oscilação ou ruído da série temporal. Por exemplo, na Figura 77 os vetores defasados em \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 e \mathbf{X}_3 variam de modo gradual ao longo de suas respectivas matrizes elementares, indicando que elas estão associadas com a tendência da série temporal. Por outro lado, as matrizes \mathbf{X}_4 e \mathbf{X}_5 apresentam um aspecto muito semelhante ao de um tabuleiro de xadrez, sugerindo que elas estão associadas à componente de oscilação de 2 Hz. Da mesma forma, as matrizes \mathbf{X}_4 , \mathbf{X}_5 e \mathbf{X}_{12} estão associadas à componente de 8 Hz, pois os vetores defasados variam rapidamente. Quanto as matrizes restantes, elas estão relacionadas com a componente de ruído porque suas colunas apresentam uma variação elevada que compreende poucos valores.

A SVD na equação (8.3) é ótima no sentido que dentre todas as matrizes $\mathbf{X}^{(r)}$ de posto $r < d$, a matriz $\sum_{i=1}^r \mathbf{X}_i$ é a que fornece a melhor aproximação para a matriz de trajetória \mathbf{X} , isto é, a norma $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(r)}\|_{\mathbb{F}}$ é mínima, em que $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$ denota a norma de Frobenius. Para uma matriz arbitrária $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ela é dada por

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathbb{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}. \quad (8.4)$$

Uma outra característica importante da SVD está relacionada com as propriedades das direções determinadas pelos autovetores U_1, U_2, \dots, U_d . Especificamente, o primeiro autovetor U_1 determina a direção em que a variação das projeções dos vetores defasados X_i sobre essa direção é máxima. Analogamente, cada um dos autovetores subsequentes determina uma direção, ortogonal a todas as direções anteriores, cuja variação das projeções dos vetores defasados sobre essa direção também é máxima (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Nesse sentido, é natural chamar a direção do autovetor U_i de i -ésima direção principal, em alusão à análise de componentes principais. Nesse contexto,

Figura 77 – A matriz de trajetória da Figura 76 foi decomposta em $d = 512$ matrizes elementares, sendo que as 12 primeiras estão ilustradas na presente figura. Observe que elas não são matrizes de Hankel e, portanto, não apresentam um aspecto antidiagonal. Apesar disso, é possível identificar visualmente as componentes de tendência (\mathbf{X}_1 até \mathbf{X}_3), oscilação (\mathbf{X}_4 e \mathbf{X}_5 para 2 Hz, bem como \mathbf{X}_6 , \mathbf{X}_7 e \mathbf{X}_{12} para 8 Hz) e ruído (as demais matrizes elementares).



Fonte: O autor.

os vetores V_i e $\sigma_i V_i$ são chamados de i -ésimo vetor fator e i -ésima componente principal, respectivamente. Na realidade, as matrizes elementares \mathbf{X}_i são construídas a partir das projeções dos vetores defasados sobre as direções principais U_i . Para ver isso, basta utilizar a igualdade $\sigma_i V_i = \mathbf{X}^T U_i$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_i &= \sigma_i U_i V_i^T \\
 &= U_i (\sigma_i V_i)^T \\
 &= U_i U_i^T \mathbf{X} & \sigma_i V_i &= \mathbf{X}^T U_i \\
 &= \left[U_i U_i^T X_1 \quad U_i U_i^T X_2 \quad \dots \quad U_i U_i^T X_K \right], & & (8.5)
 \end{aligned}$$

em que $U_i U_i^T$ é a matriz de projeção ortogonal sobre a i -ésima direção principal U_i . Observe na equação (8.5) que as colunas de \mathbf{X}_i são formadas pelas projeções de cada um dos vetores defasados sobre a direção determinada por U_i , como se queria demonstrar. Portanto, utilizando a equação (8.5) pode-se reescrever a equação (8.3) da seguinte forma

$$\mathbf{X} = \left[\sum_{i=1}^d U_i U_i^T X_1 \quad \sum_{i=1}^d U_i U_i^T X_2 \quad \dots \quad \sum_{i=1}^d U_i U_i^T X_K \right].$$

Nota-se que as colunas de \mathbf{X} pertencem ao espaço gerado pelo conjunto ortonormal $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_d\}$. Dessa forma, \mathcal{U} é uma base ortonormal para o espaço coluna de \mathbf{X} , o qual

é chamado de espaço de trajetória da série temporal \mathbb{X}_N , denotado por $\mathfrak{L}^{(L)}(\mathbb{X}_N) \subset \mathbb{R}^L$ para enfatizar sua dependência com a série temporal original (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Assim sendo, cada vetor defasado X_i pode ser escrito de forma única como uma combinação linear dos elementos de \mathcal{U} . Com efeito, para ver isso defina $Z_i = \sigma_i V_i \in \mathbb{R}^K$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{i=1}^d U_i Z_i^T \\ &= U_1 Z_1^T + U_2 Z_2^T + \dots + U_d Z_d^T \\ &= \begin{bmatrix} z_{11}U_1 & z_{21}U_1 & \dots & z_{K1}U_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{12}U_2 & z_{22}U_2 & \dots & z_{K2}U_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \dots + \begin{bmatrix} z_{1d}U_d & z_{2d}U_d & \dots & z_{Kd}U_d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d z_{1i}U_i & \sum_{i=1}^d z_{2i}U_i & \dots & \sum_{i=1}^d z_{Ki}U_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_K \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que

$$X_j = \sum_{i=1}^d z_{ji}U_i, \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad (8.6)$$

onde z_{ji} é a j -ésima componente do vetor Z_i . A equação (8.6) indica que z_{ji} é o i -ésimo coeficiente de X_j quando representado na base ortonormal \mathcal{U} . Analogamente, pode-se verificar que o conjunto ortonormal $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_d\}$ é uma base ortonormal para o espaço linha de \mathbf{X} , de modo que cada uma de suas linhas pode ser escrita de forma única como uma combinação linear dos elementos de \mathcal{V} . De fato, defina $Y_i = \sigma_i U_i \in \mathbb{R}^L$ e considere a transposta da matriz de trajetória. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T &= \sum_{i=1}^d V_i Y_i^T \\ &= V_1 Y_1^T + V_2 Y_2^T + \dots + V_d Y_d^T \\ &= \begin{bmatrix} y_{11}V_1 & y_{21}V_1 & \dots & y_{L1}V_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{12}V_2 & y_{22}V_2 & \dots & y_{L2}V_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \dots + \begin{bmatrix} y_{1d}V_d & y_{2d}V_d & \dots & y_{Ld}V_d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d y_{1i}V_i & \sum_{i=1}^d y_{2i}V_i & \dots & \sum_{i=1}^d y_{Li}V_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_1^{(T)} & X_2^{(T)} & \dots & X_L^{(T)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que

$$X_j^{(T)} = \sum_{i=1}^d y_{ji}V_i, \quad j = 1, 2, \dots, L, \quad (8.7)$$

onde $X_j^{(T)}$ representa a j -ésima linha de \mathbf{X} e y_{ji} é a j -ésima componente de Y_i . A equação (8.7) sugere que y_{ji} é o i -ésimo coeficiente de $X_j^{(T)}$ quando escrito em termos da base

ortonormal \mathcal{V} . Dessa forma, das equações (8.6) e (8.7) verifica-se que a SVD conduz a duas interpretações geométricas da matriz de trajetória \mathbf{X} .

Por meio dos valores singulares de \mathbf{X} é possível mensurar a contribuição relativa de \mathbf{X}_i na decomposição de \mathbf{X} dada pela equação (8.3), doravante denotada por c_i . O valor de c_i é calculado por meio da razão entre as normas $\|\mathbf{X}_i\|_F^2$ e $\|\mathbf{X}\|_F^2$, que podem ser determinadas diretamente da equação (8.4). De fato, a norma de Frobenius de \mathbf{X}_i é dada pelo valor singular σ_i , pois

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}_i\|_F^2 &= \sigma_i^2 \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K |v_{ki}u_{li}|^2 \\ &= \sigma_i^2 \left(\sum_{l=1}^L |u_{li}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^K |v_{ki}|^2 \right) \\ &= \sigma_i^2 \|U_i\|_F^2 \|V_i\|_F^2 \\ &= \sigma_i^2 \iff \|\mathbf{X}_i\|_F = \sigma_i,\end{aligned}\tag{8.8}$$

tendo em vista que U_i e V_i têm normas unitárias. Quanto a \mathbf{X} , o cômputo de sua norma envolve o uso da propriedade de invariância por transformações ortogonais da norma de Frobenius. Desse resultado, vem que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}\|_F^2 &= \|\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\|_F^2 \\ &= \|\Sigma\|_F^2 \\ &= \sum_{i=1}^d \sigma_i^2.\end{aligned}\tag{8.9}$$

Portanto, das equações (8.8) e (8.9) verifica-se que c_i é dada por

$$c_i = \frac{\|\mathbf{X}_i\|_F^2}{\|\mathbf{X}\|_F^2} = \frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^d \sigma_j^2}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Consequentemente, pode-se definir a contribuição acumulativa das matrizes elementares $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_i$, denotada por a_i , da seguinte forma

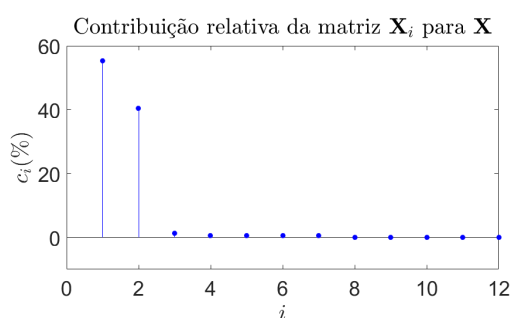
$$a_i = \frac{1}{\|\mathbf{X}\|_F^2} \sum_{j=1}^i \|\mathbf{X}_j\|_F^2 = \frac{\sum_{j=1}^i \sigma_j^2}{\sum_{j=1}^d \sigma_j^2}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

As Figuras 78a e 78b ilustram as contribuições relativas e acumulativas das matrizes elementares da Figura 77. As matrizes \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 têm uma contribuição de cerca de 55% e 40%, respectivamente. Juntas, elas explicam 95% de \mathbf{X} . Ao somar a contribuição das 12 matrizes elementares, verifica-se que elas contribuem com 99,3%. Cabe ressaltar que

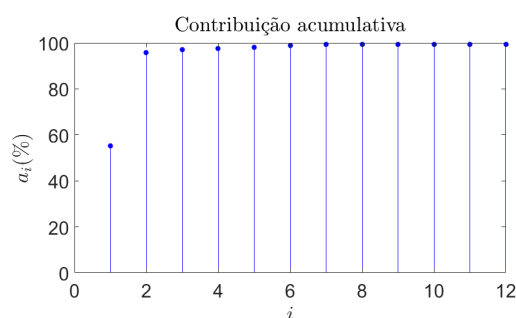
o gráfico da contribuição relativa pode ajudar a identificar as matrizes elementares que devem ser agrupadas para formar uma componente interpretável da série temporal, pois as matrizes com valores singulares próximos, em geral, devem ser agrupadas. O agrupamento é discutido na seção 8.2.

Figura 78 – Os valores singulares de \mathbf{X} podem ser utilizados como uma medida da contribuição relativa de cada matriz elementar \mathbf{X}_i na SVD de \mathbf{X} . Consequentemente, é possível definir a contribuição acumulativa das matrizes elementares $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_i$. A presente figura mostra as contribuições relativas e acumulativas, em termos percentuais, das matrizes elementares da Figura 77.

(a) Este gráfico apresenta a contribuição relativa de cada matriz elementar \mathbf{X}_i na composição de \mathbf{X} .



(b) Este gráfico apresenta a contribuição acumulativa das matrizes elementares $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_i$ na composição de \mathbf{X} .



Fonte: O autor.

8.2 Segundo Estágio: Reconstrução

O estágio de reconstrução também é composto por duas fases, assim como ocorre com o estágio de decomposição. Porém, nesse caso o propósito geral é converter as matrizes elementares da SVD de \mathbf{X} em séries temporais que podem ser interpretadas como sendo as componentes de tendência, oscilação ou ruído da série temporal \mathbb{X}_N . A primeira fase é chamada de agrupamento, a qual consiste na divisão das matrizes elementares em vários grupos, bem como na soma de todas as matrizes no interior de cada grupo. Noutros termos, uma vez obtida a SVD conforme equação (8.3), a ideia é particionar o conjunto de índices $I = \{1, 2, \dots, d\}$ em $m \leq d$ subconjuntos disjuntos $I_1, I_2, \dots, I_m \subset I$ a fim de obter a decomposição agrupada da matriz de trajetória, que é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{X}_{I_1} + \mathbf{X}_{I_2} + \dots + \mathbf{X}_{I_m} \\ &= \sum_{i \in I_1} \mathbf{X}_i + \sum_{j \in I_2} \mathbf{X}_j + \dots + \sum_{k \in I_m} \mathbf{X}_k, \end{aligned} \quad (8.10)$$

em que

$$\mathbf{X}_{I_k} = \sum_{i \in I_k} \mathbf{X}_i, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

representa a soma das matrizes elementares cujos índices pertencem a I_k . O processo de escolher os subconjuntos I_1, I_2, \dots, I_m é chamado de agrupamento da autotripla, tendo em

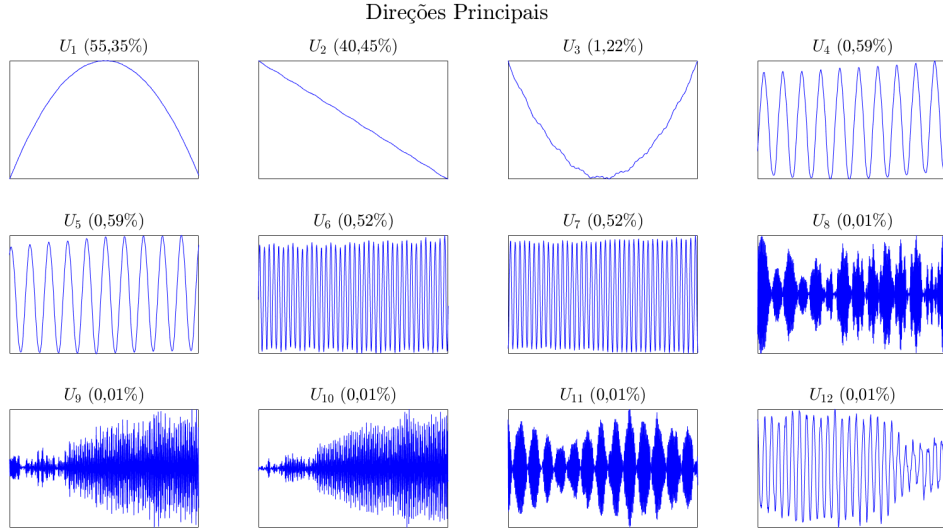
vista que as matrizes elementares \mathbf{X}_i são completamente determinadas por suas autotriplas correspondentes. Dessa forma, pode-se falar em agrupar as autotriplas em vez das matrizes elementares (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Quando $m = d$, o agrupamento é dito elementar, pois cada subconjunto só contém um único índice, isto é, $I_k = \{k\}$, com $k = 1, 2, \dots, d$. O procedimento para efetuar o agrupamento é difícil de formalizar completamente, pois ele pode ser feito tanto por inspeção visual quanto por meio de alguma técnica automatizada. Por exemplo, Kalantari e Hassani (2019) fizeram uso de técnicas hierárquicas da análise de *cluster* para realizar o agrupamento de forma automática, ao passo que Lin et al. (2019) propuseram uma abordagem alternativa utilizando a EMD. Quanto a inspeção visual, é de praxe recorrer à análise gráfica tanto dos vetores singulares (autovetores) quanto dos valores singulares. Isso se deve ao fato de que os autovetores repetem o comportamento das componentes de uma série temporal, isto é, os autovetores que variam paulatinamente estão associados com as componentes de tendência, enquanto os que oscilam de forma periódica ou quase-periódica estão associados com as componentes oscilatórias e assim por diante (GOLYANDINA et al., 2015). Com efeito, a Figura 79 ilustra as direções principais (autovetores de $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$) relativas às matrizes elementares da Figura 77, onde é possível constatar esse fato. Nota-se claramente que as direções U_1 , U_2 e U_3 estão relacionadas com a componente de tendência parabólica. Por outro lado, verifica-se que U_4 e U_5 retratam a componente oscilatória de 2 Hz, enquanto U_6 , U_7 e U_{12} retratam a de 8 Hz. As demais direções principais estão relacionadas com a componente de ruído por conta da rápida variação.

É desejável que os subconjuntos I_1, I_2, \dots, I_m sejam tais que as matrizes agrupadas $\mathbf{X}_{I_1}, \mathbf{X}_{I_2}, \dots, \mathbf{X}_{I_m}$ estejam próximas de certas matrizes de Hankel (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). No caso ideal, se as componentes de uma série temporal são separáveis e se o agrupamento for feito de forma adequada, então as matrizes agrupadas na equação (8.10) serão de Hankel. O interesse nessa classe específica de matrizes reside no fato de que qualquer matriz de Hankel é a matriz de trajetória de uma série temporal. Conseqüentemente, se todas as matrizes agrupadas \mathbf{X}_{I_k} forem de Hankel, então cada uma delas determinará unicamente uma série temporal $\tilde{\mathbf{X}}^{(k)} = (\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)}, \dots, \tilde{x}_N^{(k)})$. Nesse caso, o valor de $\tilde{x}_n^{(k)}$ será igual a todas as entradas $x_{ij}^{(k)}$ ao longo da antidiagonal $\{(i, j), \text{ tal que } i + j = n + 1\}$ de \mathbf{X}_{I_k} . Dessa forma, a série temporal original \mathbb{X}_N é decomposta na soma de m séries reconstruídas, em que

$$x_n = \sum_{k=1}^m \tilde{x}_n^{(k)}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (8.11)$$

Todavia, na prática as coisas não são tão simples assim, pois em geral as matrizes agrupadas \mathbf{X}_{I_k} não são de Hankel. Destarte, é necessário transformá-las em matrizes de Hankel por meio de algum procedimento formal. Para tanto, é conveniente considerar o procedimento da média diagonal ou Hankelização, o qual define os valores das séries temporais $\tilde{\mathbf{X}}^{(k)}$ a partir das médias aritméticas das antidiagonais correspondentes de \mathbf{X}_{I_k} . Esse é justamente

Figura 79 – As direções principais U_i repetem o comportamento das componentes de uma série temporal. A presente figura ilustra as direções principais relativas às matrizes elementares da Figura 77, juntamente com suas respectivas contribuições relativas no título de cada gráfico. Infere-se visualmente as componentes de tendência (U_1 até U_3), oscilação (U_4 e U_5 para 2 Hz, bem como U_6, U_7 e U_{12} para 8 Hz) e ruído (as demais direções principais).



Fonte: O autor.

o propósito da segunda fase do estágio de reconstrução, que naturalmente recebe o nome de média diagonal. Para representar essa fase, define-se o operador linear de Hankelização $\mathcal{H} : \mathcal{M}_{L,K} \mapsto \mathcal{M}_{L,K}^{(H)}$, em que $\mathcal{M}_{L,K}$ é o espaço vetorial das matrizes reais de dimensão $L \times K$ e $\mathcal{M}_{L,K}^{(H)} \subset \mathcal{M}_{L,K}$ é uma restrição deste espaço para conter apenas as matrizes de Hankel. O espaço $\mathcal{M}_{L,K}$ está munido com o produto interno de Frobenius, que para duas matrizes arbitrárias $\mathbf{Y} = (y_{ij})_{i,j=1}^{L,K}$ e $\mathbf{Z} = (z_{ij})_{i,j=1}^{L,K}$ é definido por

$$\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle_{\text{F}} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K y_{ij} z_{ij}. \quad (8.12)$$

Conseqüentemente, o produto interno na equação (8.12) induz a norma de Frobenius introduzida anteriormente,

$$\|\mathbf{Y}\|_{\text{F}}^2 = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle_{\text{F}} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K y_{ij}^2.$$

O operador \mathcal{H} mapeia uma matriz $\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_{L,K}$ em uma matriz de Hankel $\mathcal{H}\mathbf{Y}$ de mesma dimensão. Contudo, esta não é qualquer matriz de Hankel, pois suas entradas são definidas em termos das médias aritméticas das antidiagonais de \mathbf{Y} . Especificamente, as

entradas \tilde{y}_{ij} de $\mathcal{H}\mathbf{Y}$ são dadas por

$$\tilde{y}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} \sum_{l=1}^{s-1} y_{l,s-l}^* & \text{para } 2 \leq s \leq L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{l=1}^{L^*} y_{l,s-l}^* & \text{para } L^* \leq s \leq K^* + 1, \\ \frac{1}{N-s+2} \sum_{l=s-K^*}^{L^*} y_{l,s-l}^* & \text{para } K^* + 2 \leq s \leq N + 1, \end{cases}$$

em que $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$ e $s = i + j$. Se $L < K$, então $y_{ij}^* = y_{ij}$. Caso contrário, tem-se $y_{ij}^* = y_{ji}$. Como $\mathcal{H}\mathbf{Y}$ é de Hankel, ela pode ser interpretada como a matriz de trajetória de uma série temporal $\mathbb{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ tal que

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n y_{m,n-m+1}^* & \text{para } 1 \leq n < L^*, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m,n-m+1}^* & \text{para } L^* \leq n \leq K^*, \\ \frac{1}{N-n+1} \sum_{m=n-K^*+1}^{N-K^*+1} y_{m,n-m+1}^* & \text{para } K^* < n \leq N. \end{cases} \quad (8.13)$$

A princípio, a equação (8.13) pode parecer um pouco complicada em virtude do excesso de índices e variáveis. Contudo, y_n é justamente a média aritmética da antidiagonal $i + j = n + 1$ de \mathbf{Y} , com $1 \leq n \leq N$. Para ver isso, suponha que \mathbf{Y} seja uma matriz tal que $L < K^2$. Então, tem-se que

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \cancel{y_{11}} & \cancel{y_{12}} & \cancel{y_{13}} & y_{14} & \dots & y_{1K} \\ \cancel{y_{21}} & \cancel{y_{22}} & y_{23} & y_{24} & \dots & y_{2K} \\ \cancel{y_{31}} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & \dots & y_{3K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{L1} & y_{L2} & y_{L3} & y_{L4} & \dots & y_{LK} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} n = 1 \implies y_1 = y_{11}, \\ n = 2 \implies y_2 = (y_{12} + y_{21})/2, \\ n = 3 \implies y_3 = (y_{13} + y_{22} + y_{31})/3, \\ \vdots \\ \text{e assim por diante.} \end{array}$$

Se por acaso \mathbf{Y} for a matriz de trajetória de uma série z_1, z_2, \dots, z_N , então $y_i = z_i$ para todo i (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Vale destacar que a equação (8.13) não é muito eficiente em termos computacionais, mas felizmente há formas alternativas de se obter o mesmo resultado. De fato, Korobeynikov (2009) propõe o uso da transformada rápida de Fourier no processo de Hankelização de matrizes com posto unitário, que são as de maior interesse no contexto da SSA básica.

A Hankelização é um procedimento ótimo no sentido que dentre todas as matrizes de Hankel, $\mathcal{H}\mathbf{Y}$ é a mais próxima de \mathbf{Y} com respeito a norma de Frobenius, isto é, o valor de $\|\mathbf{Y} - \mathcal{H}\mathbf{Y}\|_F$ é mínimo. Este é o motivo pelo qual a Hankelização é o procedimento

² Essa é uma hipótese razoável, pois na prática tem-se $2 \leq L \leq N/2$, de modo que $L_{\max} = N/2 \implies K_{\min} = N - L_{\max} + 1 = N/2 + 1$. Logo, $K_{\min} > L_{\max}$, donde $K > L$.

escolhido para transformar as matrizes agrupadas \mathbf{X}_{I_k} em matrizes de Hankel. Nesse sentido, ao aplicar \mathcal{H} em ambos os lados da equação (8.10), obtém-se

$$\mathbf{X} = \widetilde{\mathbf{X}}_{I_1} + \widetilde{\mathbf{X}}_{I_2} + \dots + \widetilde{\mathbf{X}}_{I_m}, \quad (8.14)$$

em que $\mathcal{H}\mathbf{X} = \mathbf{X}$ (já é de Hankel) e $\mathcal{H}\mathbf{X}_{I_k} = \widetilde{\mathbf{X}}_{I_k}$. Posto que as matrizes $\widetilde{\mathbf{X}}_{I_k}$ são de Hankel, elas determinam unicamente as séries temporais $\widetilde{\mathbf{X}}^{(k)} = (\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)}, \dots, \tilde{x}_N^{(k)})$, cujos valores podem ser computados diretamente da equação (8.13) considerando $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_{I_k}$. Logo, da equação (8.14) vem que

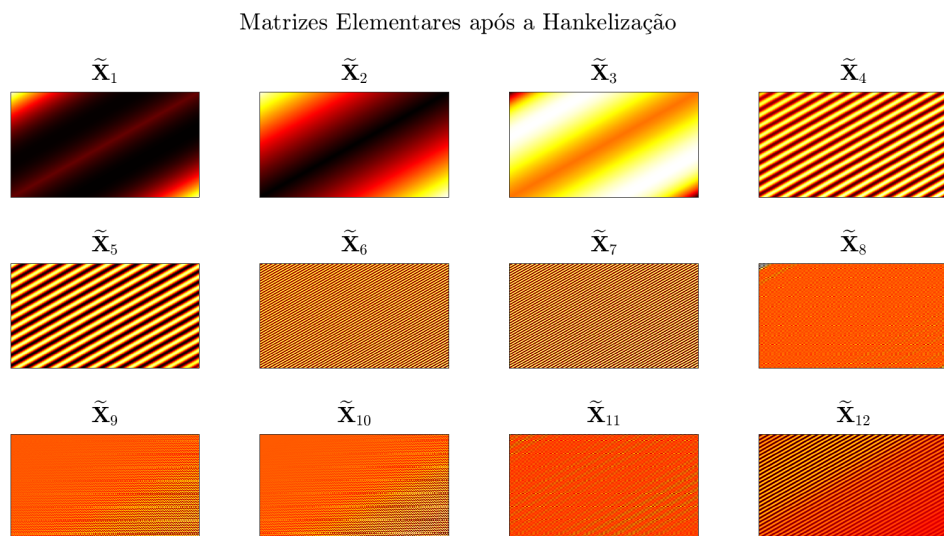
$$\mathbb{X}_N = \widetilde{\mathbf{X}}^{(1)} + \widetilde{\mathbf{X}}^{(2)} + \dots + \widetilde{\mathbf{X}}^{(m)}. \quad (8.15)$$

A equação (8.15) é uma versão alternativa, mas equivalente da equação (8.11). Observe que pela linearidade de \mathcal{H} tem-se que $\mathcal{H}\mathbf{X}_{I_k} = \sum_{i \in I_k} \mathcal{H}\mathbf{X}_i$. Portanto, pode-se inverter a ordem na qual as fases de agrupamento e média diagonal aparecem na SSA básica (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013).

A Figura 80 ilustra o efeito da Hankelização sobre as matrizes elementares da Figura 77, onde é possível confirmar as asserções feitas anteriormente relativas ao agrupamento das matrizes elementares³. Notadamente, as matrizes $\widetilde{\mathbf{X}}_1$, $\widetilde{\mathbf{X}}_2$ e $\widetilde{\mathbf{X}}_3$ variam de forma

³ Isso ocorre porque após a Hankelização as matrizes (de trajetória) retratam o comportamento das séries temporais que as geraram.

Figura 80 – O operador de Hankelização \mathcal{H} transforma uma matriz arbitrária em uma matriz de Hankel por meio da média aritmética das antidiagonais da matriz original. O efeito de \mathcal{H} sobre as matrizes elementares da Figura 77 é ilustrado na presente figura, sendo possível observar que elas apresentam um aspecto antidiagonal justamente por serem matrizes de Hankel.



Fonte: O autor.

lenta e gradual, indicando que elas devem ser agrupadas para dar origem à componente de tendência parabólica $\widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{tendência})}$, de modo que $I_1 = \{1, 2, 3\}$. Por outro lado, uma vez que as matrizes $\widetilde{\mathbf{X}}_4$ e $\widetilde{\mathbf{X}}_5$ apresentam uma periodicidade semelhante, elas devem ser agrupadas para conceber a primeira componente periódica de 2 Hz, $\widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{periódica 1})}$, por conta da baixa frequência, de maneira que $I_2 = \{4, 5\}$. Analogamente, as matrizes $\widetilde{\mathbf{X}}_6$, $\widetilde{\mathbf{X}}_7$ e $\widetilde{\mathbf{X}}_{12}$ também têm uma periodicidade semelhante, porém menor, sinalizando que elas devem ser agrupadas para produzir a segunda componente periódica de 8 Hz, $\widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{periódica 2})}$, de forma que $I_3 = \{6, 7, 12\}$. Quanto as outras matrizes, elas devem ser agrupadas para sintetizar à componente de ruído, $\widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{ruído})}$, de forma que $I_4 = I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$, onde $I = \{1, 2, \dots, 512\}$. Em suma, tem-se que

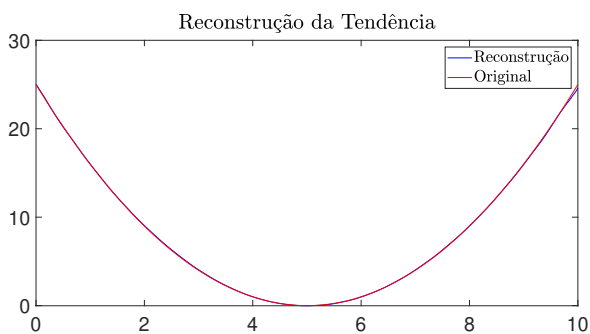
$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{tendência})} &= \widetilde{\mathbf{X}}_1 + \widetilde{\mathbf{X}}_2 + \widetilde{\mathbf{X}}_3 \implies \widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{tendência})} = \widetilde{\mathbf{X}}^{(1)} + \widetilde{\mathbf{X}}^{(2)} + \widetilde{\mathbf{X}}^{(3)}, \\ \widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{periódica 1})} &= \widetilde{\mathbf{X}}_4 + \widetilde{\mathbf{X}}_5 \implies \widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{periódica 1})} = \widetilde{\mathbf{X}}^{(4)} + \widetilde{\mathbf{X}}^{(5)}, \\ \widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{periódica 2})} &= \widetilde{\mathbf{X}}_6 + \widetilde{\mathbf{X}}_7 + \widetilde{\mathbf{X}}_{12} \implies \widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{periódica 2})} = \widetilde{\mathbf{X}}^{(6)} + \widetilde{\mathbf{X}}^{(7)} + \widetilde{\mathbf{X}}^{(12)}, \\ \widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{ruído})} &= \sum_{i \in I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)} \widetilde{\mathbf{X}}_i \implies \widetilde{\mathbf{X}}^{(\text{ruído})} = \sum_{i \in I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)} \widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}. \end{aligned}$$

A título de comparação, a Figura 81 ilustra o gráfico das componentes originais da série temporal da Figura 75, juntamente com as componentes reconstruídas por meio do agrupamento supracitado. Apesar das reconstruções não serem perfeitas, as componentes puderam ser aproximadamente identificadas e reconstruídas por inspeção visual. Isso indica que essas componentes são aproximadamente separáveis, o que já é algo considerável, tendo em vista que a separação exata não ocorre na prática (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). A Figura 82 ilustra a série temporal reconstruída sem a componente de ruído, demonstrando a capacidade da SSA em reduzir o ruído de uma série temporal.

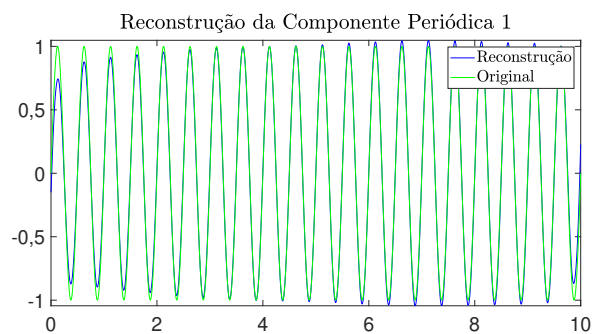
A noção de separabilidade é muito importante na SSA. Em verdade, a decomposição de \mathbb{X}_N na equação (8.15) só é útil se as componentes aditivas $\widetilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \widetilde{\mathbf{X}}^{(2)}, \dots, \widetilde{\mathbf{X}}^{(m)}$ forem aproximadamente separáveis entre si (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Para entender o conceito de separabilidade, fixe o comprimento da janela L , considere uma SVD da matriz de trajetória \mathbf{X} de uma série temporal \mathbb{X} com comprimento N e assuma que esta última é a soma de duas séries $\mathbb{X}^{(1)}$ e $\mathbb{X}^{(2)}$, isto é, $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{(1)} + \mathbb{X}^{(2)}$. Nesse contexto, a separabilidade de $\mathbb{X}^{(1)}$ e $\mathbb{X}^{(2)}$ significa que é possível dividir as matrizes elementares de \mathbf{X} em dois grupos de tal forma que a soma das matrizes em cada grupo produza as matrizes de trajetória $\mathbf{X}^{(1)}$ e $\mathbf{X}^{(2)}$ das séries $\mathbb{X}^{(1)}$ e $\mathbb{X}^{(2)}$, respectivamente. Uma vez que a SVD não é única, há dois tipos de separabilidade. Diz-se que as séries $\mathbb{X}^{(1)}$ e $\mathbb{X}^{(2)}$ são fracamente separáveis se existir uma SVD de \mathbf{X} de modo que seja possível dividir as matrizes elementares em dois grupos tais que a soma das matrizes em cada um deles resulte em $\mathbf{X}^{(1)}$ e $\mathbf{X}^{(2)}$. A separabilidade é dita forte quando isso é verdade para qualquer SVD da matriz de trajetória.

Figura 81 – Por inspeção visual das matrizes da Figura 80, um agrupamento razoável pôde ser efetuado. Um total de quatro subconjuntos disjuntos de $I = \{1, 2, \dots, 512\}$ foram determinados, em que $I_1 = \{1, 2, 3\}$ refere-se à tendência parabólica, $I_2 = \{4, 5\}$ à senoide de 2 Hz, $I_3 = \{6, 7, 12\}$ à senoide de 8 Hz e $I_4 = I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$ ao ruído. Com esse agrupamento, quatro séries temporais foram obtidas, uma para cada componente da série temporal original.

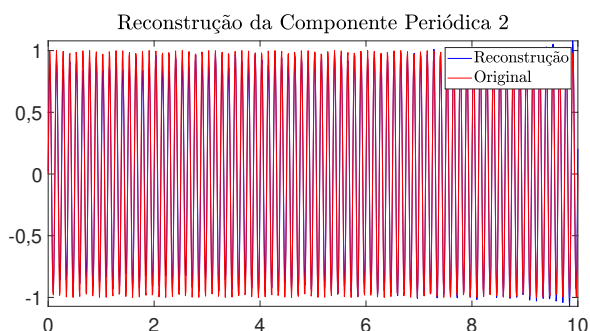
(a) Componente de tendência reconstruída a partir do agrupamento definido por I_1 .



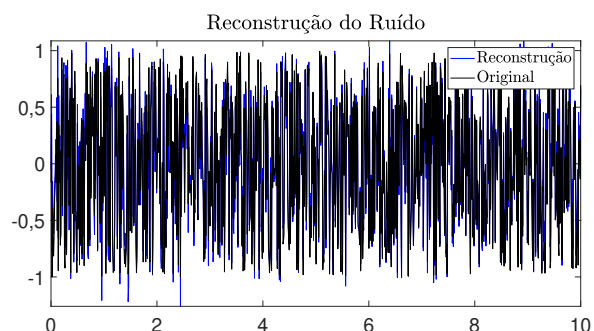
(b) Componente periódica (2 Hz) reconstruída a partir do agrupamento definido por I_2 .



(c) Componente periódica (8 Hz) reconstruída a partir do agrupamento definido por I_3 .



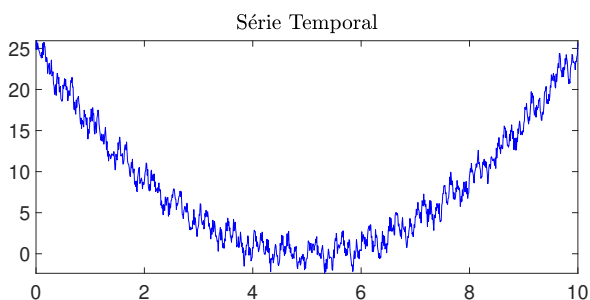
(d) Componente de ruído reconstruída a partir do agrupamento definido por I_4 .



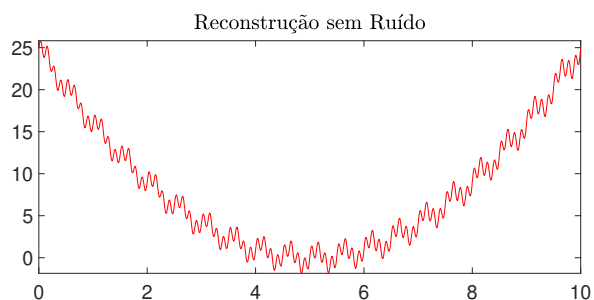
Fonte: O autor.

Figura 82 – Uma vez identificada a componente de ruído de uma série temporal, ela pode ser removida desta última de modo a produzir uma versão da série com ruído reduzido. A presente figura ilustra esse fato para a série temporal da Figura 75.

(a) Série temporal original contendo todas as componentes, inclusive a de ruído.



(b) Reconstrução da série temporal original sem a componente de ruído.



Fonte: O autor.

A condição de separabilidade fraca entre duas séries temporais pode ser enunciada em termos da ortogonalidade dos espaços linha e coluna de suas respectivas matrizes de trajetória. Sejam $\mathfrak{L}^{(L,1)}$ e $\mathfrak{L}^{(L,2)}$ os espaços coluna de $\mathbf{X}^{(1)}$ e $\mathbf{X}^{(2)}$, respectivamente. Da mesma forma, sejam $\mathfrak{L}^{(K,1)}$ e $\mathfrak{L}^{(K,2)}$ os respectivos espaços linha. Então, as séries temporais $\mathbb{X}^{(1)}$ e $\mathbb{X}^{(2)}$ são fracamente separáveis se, e somente se, $\mathfrak{L}^{(L,1)} \perp \mathfrak{L}^{(L,2)}$ e $\mathfrak{L}^{(K,1)} \perp \mathfrak{L}^{(K,2)}$. Em termos das matrizes de trajetória, isso se traduz nas seguintes equações:

$$\mathbf{X}^{(1)} \left(\mathbf{X}^{(2)} \right)^{\text{T}} = \mathbf{0}_{LL}$$

e

$$\left(\mathbf{X}^{(1)} \right)^{\text{T}} \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{0}_{KK},$$

em que $\mathbf{0}_{LL}$ e $\mathbf{0}_{KK}$ denotam as matrizes nulas de ordem L e K , respectivamente. Em outras palavras, qualquer subsérie de comprimento L de $\mathbb{X}^{(1)}$ é ortogonal a qualquer subsérie de $\mathbb{X}^{(2)}$ com o mesmo comprimento. Como é possível perceber, as condições para a separabilidade fraca são muito restritivas, de modo que as componentes de uma série temporal da vida real dificilmente irão satisfazê-las (separabilidade exata não é usual na prática). Apesar disso, as componentes podem ser aproximadamente separáveis como é o caso das série temporal da Figura 75.

Para verificar a separabilidade das componentes reconstruídas $\tilde{\mathbb{X}}^{(i)}$ e $\tilde{\mathbb{X}}^{(j)}$ na equação (8.15), pode-se averiguar a ortogonalidade de suas respectivas matrizes de trajetória $\tilde{\mathbf{X}}_{I_i}$ e $\tilde{\mathbf{X}}_{I_j}$ por meio do produto interno de Frobenius definido na equação (8.12). Uma vez que $\tilde{\mathbf{X}}_{I_i}$ e $\tilde{\mathbf{X}}_{I_j}$ são matrizes de Hankel, o produto interno de Frobenius pode ser reescrito em função de um novo produto interno entre $\tilde{\mathbb{X}}^{(i)}$ e $\tilde{\mathbb{X}}^{(j)}$, o qual é definido no espaço vetorial das séries temporais de comprimento N , denotado por \mathfrak{F}_N . Com efeito,

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\mathbf{X}}_{I_i}, \tilde{\mathbf{X}}_{I_j} \right\rangle_{\text{F}} &= \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^K x_{kl}^{(i)} x_{kl}^{(j)} \\ &= \sum_{s=2}^{L+K} \sum_{i+j=s} \tilde{x}_{s-1}^{(i)} \tilde{x}_{s-1}^{(j)} \\ &= \sum_{k=1}^N w_k \tilde{x}_k^{(i)} \tilde{x}_k^{(j)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \tilde{\mathbb{X}}^{(i)}, \tilde{\mathbb{X}}^{(j)} \right\rangle_{\mathbf{w}}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

em que

$$w_k = \begin{cases} k & \text{para } 1 \leq k < L^*, \\ L^* & \text{para } L^* \leq k \leq K^*, \\ N - k + 1 & \text{para } K^* < k \leq N, \end{cases}$$

fornece a quantidade de elementos na k -ésima antidiagonal de uma matriz com dimensão

$L \times K$, isto é, $w_k = \#\{(i, j) : 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K, i + j = k + 1\}$. O produto interno na equação (8.16) é chamado de produto interno ponderado. Diz-se que as séries $\tilde{\mathbf{X}}^{(i)}$ e $\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}$ são \mathbf{w} -ortogonais se $\langle \tilde{\mathbf{X}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(j)} \rangle_{\mathbf{w}} = 0$ for verificado. Pode-se mostrar que a \mathbf{w} -ortogonalidade é uma condição necessária, mas não suficiente, para a separabilidade fraca. A partir do produto interno ponderado introduz-se a \mathbf{w} -correlação dada por

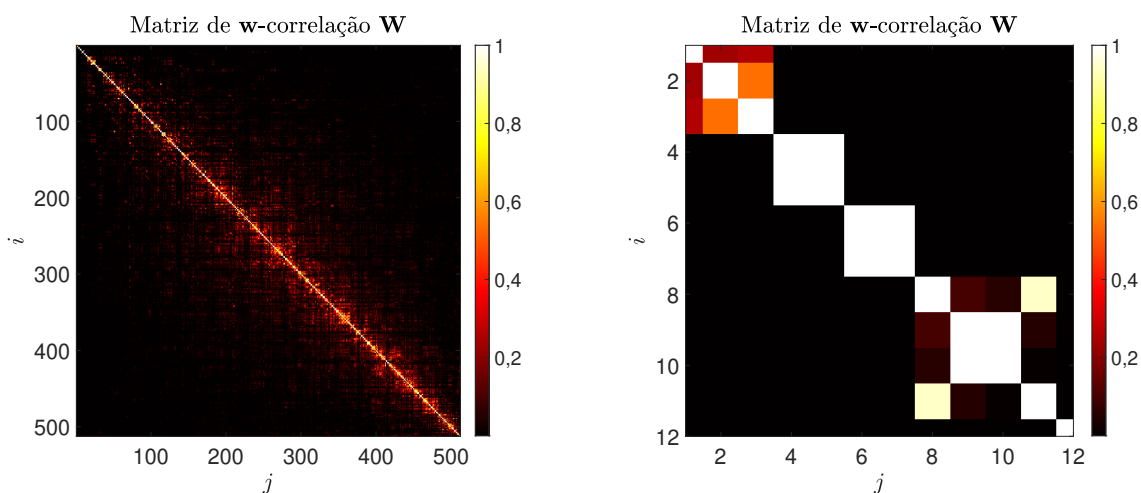
$$\rho_{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{X}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(j)}) = \frac{\langle \tilde{\mathbf{X}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(j)} \rangle_{\mathbf{w}}}{\|\tilde{\mathbf{X}}^{(i)}\|_{\mathbf{w}} \|\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}\|_{\mathbf{w}}},$$

em que $\|\cdot\|_{\mathbf{w}}$ é a norma induzida pelo produto interno ponderado. As séries $\tilde{\mathbf{X}}^{(i)}$ e $\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}$ são aproximadamente separáveis se $\rho_{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{X}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(j)}) \approx 0$ para valores razoáveis de L (GOLYAN-DINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). A \mathbf{w} -correlação mostra a qualidade da decomposição e determina o quanto as componentes de uma série temporal são separáveis entre si (KALANTARI; HASSANI, 2019). Além disso, ela é utilizada para definir as entradas $\rho_{ij}^{(\mathbf{w})}$ da matriz de \mathbf{w} -correlação, denotada por $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, em que $\rho_{ij}^{(\mathbf{w})} = \rho_{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{X}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(j)})$. A matriz \mathbf{W} contém todas as \mathbf{w} -correlações possíveis entre as componentes de uma série temporal, obtidas a partir de algum agrupamento preliminar, que em geral é o elementar. Nesse sentido, \mathbf{W} pode ser empregada como um recurso visual para a fase de agrupamento, assim como as matrizes elementares e as direções principais.

A Figura 83a ilustra a matriz \mathbf{W} com as \mathbf{w} -correlações de todas as componentes elementares da série temporal da Figura 75, enquanto a Figura 83b realça as \mathbf{w} -correlações das 12 primeiras componentes elementares, onde é possível inferir que o agrupamento realizado nesta seção é consistente. De fato, a \mathbf{w} -correlação entre as componentes $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}$ e $\tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ é $\rho_{12}^{(\mathbf{w})} = 0,2329$, sugerindo que elas devem ser agrupadas. Por conseguinte, a \mathbf{w} -correlação entre as componentes $\tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ e $\tilde{\mathbf{X}}^{(3)}$ é $\rho_{32}^{(\mathbf{w})} = 0,5389$, indicando que $\tilde{\mathbf{X}}^{(3)}$ deve ser agrupada com $\tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ e, portanto, com $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}$; isso corrobora o agrupamento I_1 . As componentes $\tilde{\mathbf{X}}^{(4)}$ e $\tilde{\mathbf{X}}^{(5)}$ apresentam uma \mathbf{w} -correlação considerável de $\rho_{45}^{(\mathbf{w})} = 0,9968$ e correlacionam-se pouco com as componentes restantes, ratificando o agrupamento I_2 . Por outro lado, apesar das componentes $\tilde{\mathbf{X}}^{(6)}$ e $\tilde{\mathbf{X}}^{(7)}$ apresentarem uma \mathbf{w} -correlação elevada de $\rho_{45}^{(\mathbf{w})} = 0,9999$, a Figura 83b não sugere o agrupamento dessas componentes com $\tilde{\mathbf{X}}^{(12)}$ como feito anteriormente. Assim sendo, é preciso recorrer a outros mecanismos para realizar o agrupamento, tais como os utilizados no decorrer desta seção. Nota-se da Figura 83a que algumas componentes apresentam uma \mathbf{w} -correlação significativa com um vasto número de componentes. Isso sugere que elas estão associadas à componente de ruído da série temporal, tendo em vista que o ruído em questão não tem uma estrutura. Nesse sentido, pode-se agrupar as demais componentes, resultando no agrupamento I_4 .

Figura 83 – A matriz de \mathbf{w} -correlação é uma importante ferramenta que auxilia no agrupamento durante o estágio de reconstrução, seja ele feito por meio de mecanismos visuais ou automatizados. A presente figura apresenta a matriz de \mathbf{w} -correlação em valores absolutos das componentes elementares da série temporal da Figura 75, com ênfase nas 12 primeiras componentes elementares.

- (a) Matriz de \mathbf{w} -correlação referente a todas as componentes elementares. (b) Matriz de \mathbf{w} -correlação referente as 12 componentes elementares.



Fonte: O autor.

Parte III

DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL

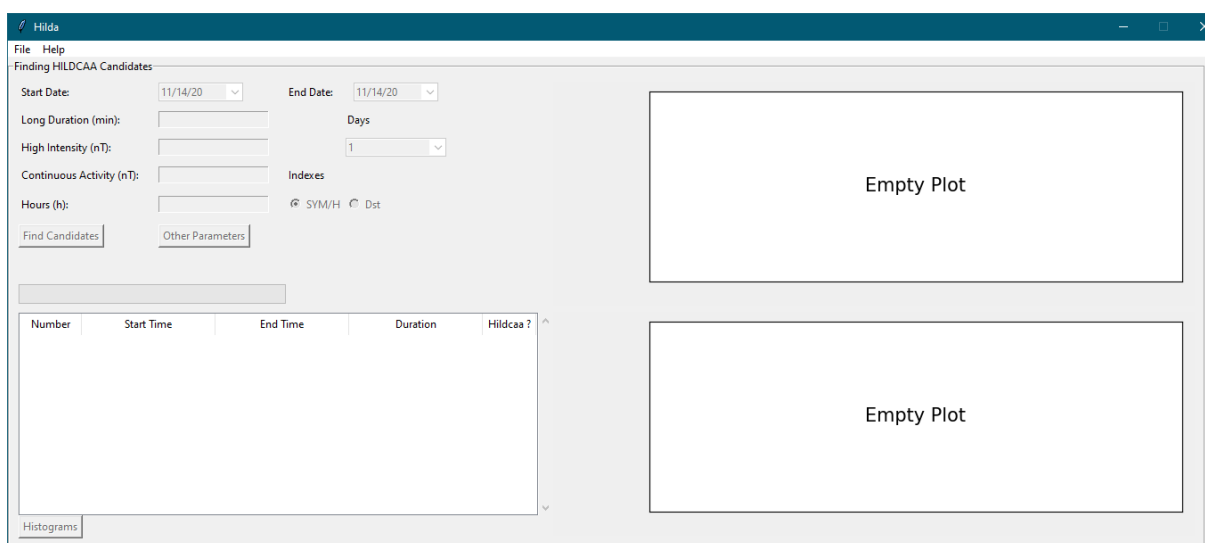
9 HILDA

O Hilda é um *software* com interface gráfica amigável escrito em Python, cujo propósito é identificar a ocorrência de eventos HILDCAA utilizando os critérios propostos por [Tsurutani e Gonzalez \(1987\)](#), que são baseados nos índices AE e Dst, bem como as condições do meio interplanetário determinadas a partir dos parâmetros do vento solar e das componentes do IMF. O Hilda permite relaxar ou restringir os três primeiros critérios e identificar um possível evento HILDCAA pela inspeção visual das condições do meio interplanetário. O capítulo está redigido da seguinte forma. A seção 9.1 mostra como obter os arquivos requeridos pelo Hilda em um endereço da Internet, enquanto a seção 9.2 ensina como o usuário deve utilizá-lo para identificar eventos HILDCAA. A seção 9.3 mostra uma aplicação do Hilda para a identificação de eventos HILDCAA nos anos de 2008 e 2010. A ideia é comparar suas saídas com os resultados encontrados em [Klausner et al. \(2021\)](#). Ao longo deste capítulo, a palavra “candidato” é utilizada para denotar um segmento do índice AE que satisfaz os três primeiros critérios de identificação de um evento HILDCAA.

9.1 Obtenção dos Arquivos

Quando o Hilda é inicializado, ele apresenta o aspecto da Figura 84. Observe que todos os recursos estão inicialmente desabilitados. A fim de habilitá-los, o usuário deve

Figura 84 – A tela principal do Hilda contém praticamente todas as suas funcionalidades. Na parte esquerda da tela, é possível configurar os critérios para a identificação de um ou mais eventos HILDCAA, enquanto na parte direita há dois painéis para apresentar os gráficos dos índices AE e Dst (ou SYM-H) dos candidatos e dos eventos HILDCAA (ou não).

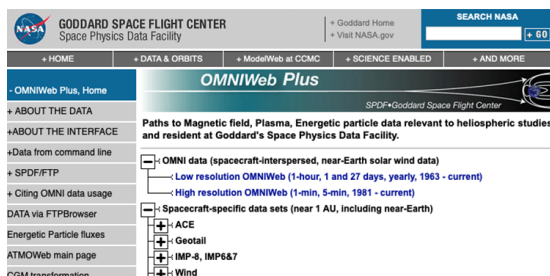


Fonte: O autor.

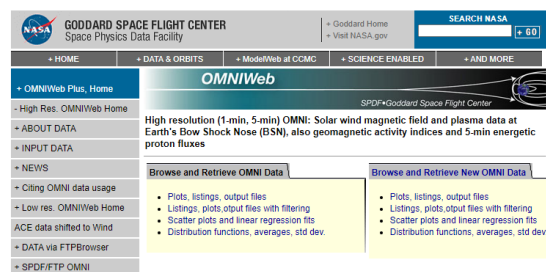
introduzir dois arquivos indispensáveis que podem ser obtidos no endereço [OMNIWeb](#). Nesse endereço, as séries temporais dos parâmetros do vento solar, das componentes do IMF e dos índices geomagnéticos estão disponíveis em resoluções diferentes (quando aplicável). O primeiro arquivo tem que ser de alta resolução e precisa conter ao menos os índices AE e SYM-H, enquanto o segundo arquivo tem que ser de baixa resolução e deve conter ao menos o índice Dst. Para obtê-los, em primeiro lugar o usuário deve acessar o endereço supracitado e selecionar o item **OMNI data** (ver Figura 85a). Na sequência, ele deve escolher a opção **Low resolution OMNIWeb** para ter acesso a página referente ao conteúdo em baixa resolução ou a opção **High Resolution OMNIWeb** para acessar a página relacionada ao conteúdo em alta resolução. A partir disso, uma nova página irá se abrir. A Figura 85b ilustra essa página para a opção de alta resolução. Por conseguinte, nessa página o usuário deverá escolher a opção **Plots, listings, output files** sob a aba **Browse and Retrieve OMNI Data**.

Figura 85 – No endereço [OMNIWeb](#), sob o item **OMNI data** o usuário precisará escolher as opções **Low resolution OMNIWeb** ou **High resolution OMNIWeb** para ter acesso as páginas relativas aos conteúdos em baixa e alta resolução, respectivamente. Depois disso, ele deverá escolher a opção **Plots, listings, output files** sob a aba **Browse and Retrieve OMNI Data** na nova página que será aberta.

(a) Na página inicial, tem-se as opções de baixa e alta resolução sob o item **OMNI data**.



(b) Ilustração da página que é aberta caso a opção de alta resolução seja escolhida pelo usuário.



Fonte: O autor.

Ao efetuar os passos descritos anteriormente para a opção de alta resolução, chega-se em uma nova página cuja estrutura está ilustrada nas Figuras 86a-86c. Em primeiro lugar, o usuário deve selecionar a opção **Create file** sob **Select activity** para indicar que um arquivo seja gerado no final do processo. Depois, ele deve selecionar a opção **1-min averaged** sob **Select resolution** para indicar que as séries temporais nesse arquivo tenham resolução de 1 minuto (a resolução de 5 minutos também está disponível). As caixas de texto **Start** e **Stop** servem para informar as datas de início e fim dessas séries temporais (ver Figura 86a). Após essa etapa, sob **Select variables** o usuário precisa escolher as séries temporais dos índices geomagnéticos, dos parâmetros do vento solar e das componentes do IMF que irão constar no arquivo a ser gerado. Basta marcar as caixas de seleção correspondentes (ver Figuras 86b e 86c). Por fim, é necessário pressionar o

Figura 86 – Ilustração da página que é aberta após a escolha da opção **High resolution OMNIWeb** na página inicial e da opção **Plots, listings, output files** sob a aba **Browse and Retrieve OMNI Data** na página subsequente. Ela contém várias caixas de seleção para que o usuário indique quais índices geomagnéticos, parâmetros do vento solar e componentes do IMF devem constar no arquivo a ser gerado. O usuário também pode indicar a resolução e o período de tempo que as séries temporais irão abranger.

(a) Nessa parte, o usuário deve marcar **Create file**, **1-min averaged** e indicar as datas de início (**Start**) e fim (**Stop**).

(b) Nessa parte, o usuário precisa marcar as componentes do IMF e os parâmetros do vento solar que desejar sob **Magnetic field** e **Plasma**, respectivamente.

(c) Nessa parte, o usuário necessita marcar os índices geomagnéticos sob **Provisional activity Indexes**.

(d) Após pressionar **Submit**, uma nova página é aberta fornecendo os arquivos com as séries temporais selecionadas.

Fonte: O autor.

botão **Submit**. Assim, uma nova página é aberta contendo dois endereços relacionados a dois arquivos (ver Figura 86d).

O primeiro arquivo tem extensão **.lst** e contém as séries temporais selecionadas pelo usuário dispostas em colunas entre as datas de início e fim informadas. O segundo arquivo tem extensão **.fmt** e contém o significado de cada uma dessas colunas. Ao pressionar sobre um desses arquivos, o usuário é direcionado a uma nova página contendo a sua estrutura interna. As Figuras 87a e 87b mostram a estrutura interna dos arquivos com extensão **.fmt** e **.lst**, respectivamente. É bastante comum que em certos instantes de tempo os valores das séries temporais no arquivo **.lst** não estejam disponíveis. Nesse caso, eles são substituídos por 99, 999, 9999 ou 99999, a depender da ordem de grandeza da série temporal. Quando esse arquivo é armazenado internamente pelo Hilda, ele faz um tratamento no qual os valores faltantes são substituídos por NaN (do inglês *Not a Number*).

Figura 87 – Os arquivos gerados sempre formam um par. O arquivo com extensão `.fmt` contém o significado de cada uma das colunas do arquivo com extensão `.lst`. Este último contém as séries temporais selecionadas pelo usuário dispostas em colunas.

(a) Estrutura interna de um arquivo com extensão `.fmt`.

| FORMAT OF THE SUBSETTED FILE | |
|------------------------------|--------|
| ITEMS | FORMAT |
| 1 Year | I4 |
| 2 Day | I4 |
| 3 Hour | I3 |
| 4 Minute | I3 |
| 5 BZ, nT (GSM) | F8.2 |
| 6 Speed, km/s | F8.1 |
| 7 Proton Density, n/cc | F7.2 |
| 8 Temperature, K | F9.0 |
| 9 Flow pressure, nPa | F6.2 |
| 10 AE-index, nT | I6 |
| 11 SYM/H, nT | I6 |

(b) Estrutura interna de um arquivo com extensão `.lst`.

| | | | | | | | | | | |
|------|---|---|----|------|-------|------|--------|------|----|----|
| 2003 | 1 | 0 | 0 | 2.90 | 358.0 | 2.02 | 68510. | 0.52 | 30 | -6 |
| 2003 | 1 | 0 | 1 | 1.71 | 384.2 | 4.81 | 50879. | 1.42 | 26 | -5 |
| 2003 | 1 | 0 | 2 | 2.83 | 391.0 | 5.44 | 69335. | 1.66 | 24 | -5 |
| 2003 | 1 | 0 | 3 | 2.92 | 383.7 | 5.76 | 55873. | 1.70 | 23 | -5 |
| 2003 | 1 | 0 | 4 | 2.57 | 373.1 | 4.53 | 40826. | 1.26 | 19 | -5 |
| 2003 | 1 | 0 | 5 | 2.57 | 387.9 | 4.47 | 53296. | 1.35 | 18 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 6 | 2.46 | 395.0 | 5.59 | 57740. | 1.74 | 17 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 7 | 3.65 | 387.5 | 5.68 | 55262. | 1.71 | 18 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 8 | 3.06 | 385.0 | 4.36 | 47347. | 1.29 | 22 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 9 | 1.72 | 380.5 | 5.47 | 54673. | 1.53 | 26 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 10 | 2.22 | 376.0 | 4.54 | 46672. | 1.28 | 27 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 11 | 4.03 | 393.8 | 5.88 | 58925. | 1.82 | 28 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 12 | 1.63 | 395.3 | 5.40 | 54139. | 1.69 | 30 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 13 | 3.24 | 391.1 | 6.32 | 64476. | 1.93 | 26 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 14 | 2.71 | 412.2 | 4.60 | 58258. | 1.56 | 19 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 15 | 3.06 | 392.2 | 5.65 | 45108. | 1.74 | 23 | -4 |
| 2003 | 1 | 0 | 16 | 3.18 | 397.1 | 6.03 | 56241. | 1.90 | 21 | -3 |
| 2003 | 1 | 0 | 17 | 2.55 | 391.6 | 5.49 | 54355. | 1.68 | 26 | -3 |
| 2003 | 1 | 0 | 18 | 3.17 | 382.6 | 4.32 | 76688. | 1.26 | 26 | -3 |
| 2003 | 1 | 0 | 19 | 3.72 | 389.6 | 5.91 | 64890. | 1.79 | 26 | -3 |
| 2003 | 1 | 0 | 20 | 3.42 | 374.5 | 6.19 | 55284. | 1.74 | 25 | -3 |
| 2003 | 1 | 0 | 21 | 3.00 | 395.7 | 5.37 | 70232. | 1.68 | 24 | -3 |
| 2003 | 1 | 0 | 22 | 3.65 | 383.2 | 4.93 | 46166. | 1.45 | 26 | -3 |

Fonte: O autor.

9.2 Uso do Programa

Após a obtenção dos arquivos, o usuário deve selecioná-los por meio do menu **File** **Open** no canto superior esquerdo da tela principal do Hilda (ver Figura 84). Assim, ele iniciará o processo de leitura desses arquivos. Se nenhum erro ocorrer, então a maior parte dos objetos da tela serão habilitados, tais como calendários suspensos, caixas de texto, botões de rádio e listas suspensas. No caso dos botões usuais, apenas o botão **Find Candidates** é habilitado nessa etapa (ver Figura 88). Os calendários suspensos **Start Date** e **End Date** permitem especificar em qual intervalo de tempo os eventos HILDCAA devem ser procurados entre as datas de início e fim das séries temporais. Quanto as caixas

Figura 88 – Após a leitura dos arquivos, as funcionalidades da tela principal do Hilda tornam-se parcialmente disponíveis para o usuário. Em particular, os calendários suspensos (**Start Date** e **End Date**) e as 4 caixas de texto. Por padrão, elas são preenchidas em conformidade com os critérios propostos por Tsurutani e Gonzalez (1987) no momento em que são habilitadas.

Fonte: O autor.

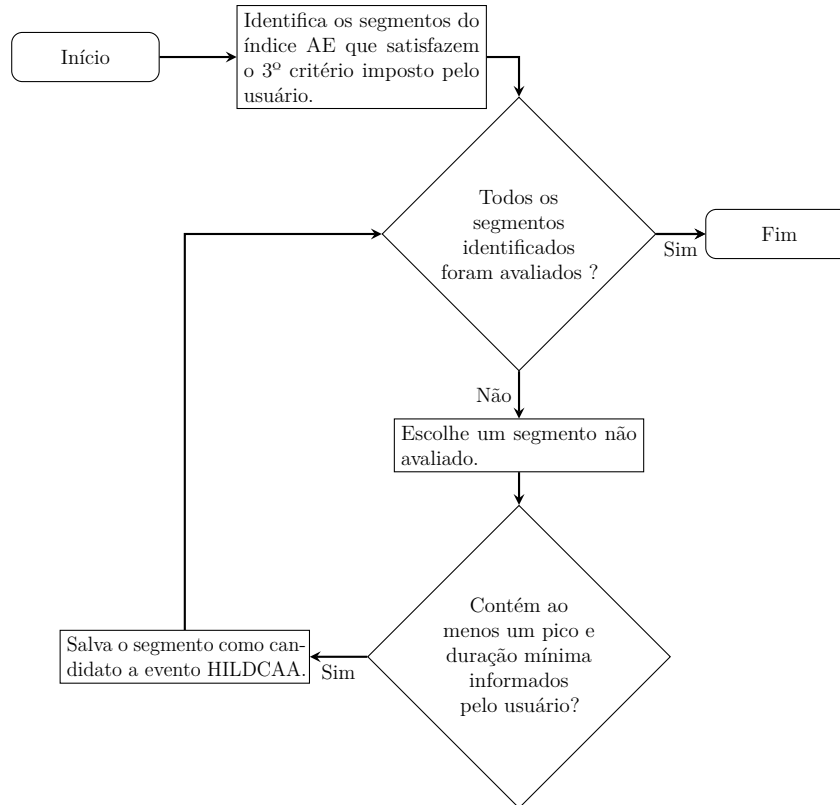
de texto, elas permitem relaxar ou restringir os três primeiros critérios propostos por Tsurutani e Gonzalez (1987) e já vêm preenchidas com valores padronizados no momento em que são habilitadas. Elas podem ser descritas individualmente da seguinte forma:

1. *Long Duration (min)*: Um evento HILDCAA deve ter duração mínima de 2 dias. Assim, a caixa de texto já vem preenchida com o valor 2880 min por padrão.
2. *High Intensity (nT)*: Em um evento HILDCAA, o índice AE deve apresentar ao menos um pico ≥ 1000 nT em algum momento durante o evento. Por este motivo, a caixa de texto já vem preenchida com o valor de 1000 nT por padrão.
3. *Continuous Activity (nT) e Hours (h)*: Em um evento HILDCAA, a amplitude do índice AE não pode ficar abaixo de 200 nT por mais de 2 h consecutivas. Dessa forma, o valor padrão dessas caixas de texto são 200 nT e 2 h, respectivamente.

Depois de especificar as datas de início e fim, bem como os valores a serem utilizados nos critérios de identificação de um evento HILDCAA, o usuário deve pressionar o botão **Find Candidates**. Assim, a busca por segmentos do índice AE que satisfazem esses critérios dentro do intervalo de tempo especificado é iniciada. Noutros termos, o Hilda começa a sua busca por candidatos a evento HILDCAA. O fluxograma ilustrado na Figura 89 mostra como essa busca é realizada. Se, porventura, candidatos a evento HILDCAA forem encontrados, então eles são listados em ordem crescente de ocorrência na tabela do canto inferior esquerdo da tela principal do Hilda (ver Figura 90). Essa tabela apresenta quatro colunas com informações importantes a respeito dos candidatos identificados. As colunas **Start Time** e **End Time** indicam, respectivamente, a data e hora de início e fim dos candidatos. As colunas **Duration** e **Hildcaa ?** mostram, respectivamente, o tempo de duração dos candidatos e se eles são ou não eventos HILDCAA. Por padrão, as linhas da coluna **Hildcaa ?** vêm preenchidas com o símbolo **C** de candidato. Apesar disso, na Figura 90 é possível observar que algumas dessas linhas estão preenchidas com **Y**. Isso acontece quando o índice Dst é maior que -50 nT ao longo de toda a duração de um candidato. Nesse caso, o quarto critério é automaticamente satisfeito e o candidato é realmente um evento HILDCAA.

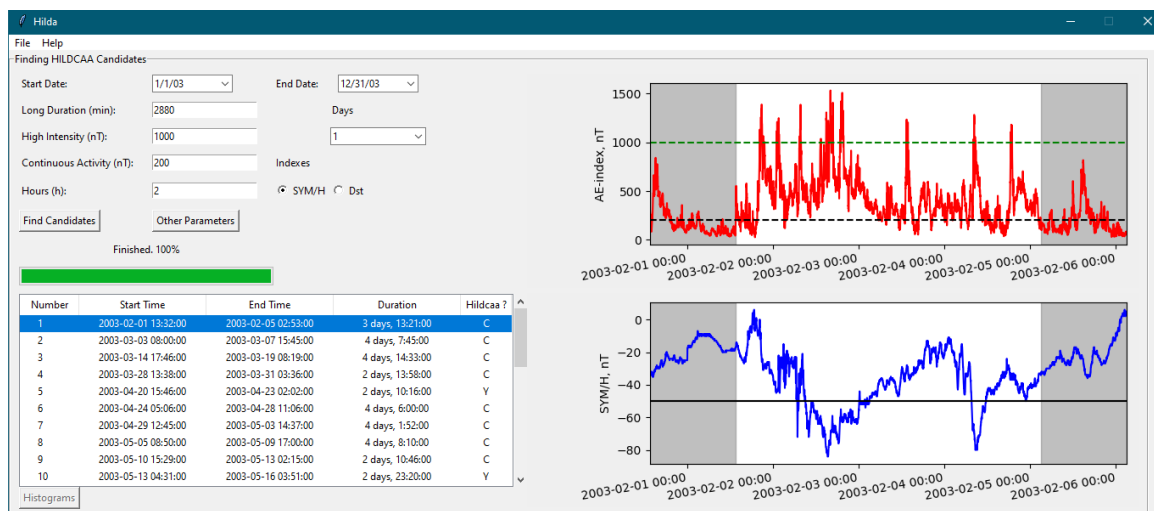
Com a tabela construída, o usuário pode escolher qualquer uma de suas linhas. Ao selecionar uma delas, o Hilda gera os gráficos dos índices AE e SYM-H (ou Dst) do candidato ou evento HILDCAA (ou não) correspondente. Os gráficos são apresentados nos painéis à direita da tela principal do Hilda como ilustra a Figura 90. O painel superior contém o gráfico do índice AE, enquanto o painel inferior contém o gráfico do índice SYM-H (ou Dst). A escolha do índice que deve aparecer no gráfico do painel inferior é feita por meio dos botões de rádio **SYM-H** e **Dst**. Além disso, observe que ambos os gráficos apresentam linhas horizontais. No caso do índice AE, há duas linhas horizontais para

Figura 89 – Esse fluxograma descreve o processo de busca por candidatos a evento HILDCAA. A busca é feita entre as datas informadas em **Start Date** e **End Date**. Ela tem como base os valores informados pelo usuário nas caixas de texto relativas aos três primeiros critérios.



Fonte: O autor.

Figura 90 – Ilustração da tela principal do Hilda após a busca por candidatos a evento HILDCAA ter sido realizada. Os candidatos encontrados são listados por ordem de ocorrência na tabela do canto inferior esquerdo. Ao selecionar uma linha da tabela, o Hilda gera os gráficos dos índices AE e SYM-H (ou Dst) para o período indicado nas colunas **Start Time** e **End Time**. Eles aparecem nos painéis à direita da tela.



Fonte: O autor.

ênfatisar visualmente que os critérios relativos a atividade contínua e a presença de um pico foram satisfeitos. Quanto ao índice SYM-H (ou Dst), há uma única linha para ênfatisar situações nas quais ele permanece acima de -50 nT durante todo o período. Por fim, note a região sombreada que também está presente em ambos os gráficos. Ela representa os dias adicionais colocados antes e depois do intervalo de tempo de interesse com o intuito de aprimorar a visualização dos gráficos. O número de dias adicionais pode ser alterado utilizando o menu suspenso **Days**.

Se o usuário pressionar o botão direito do *mouse* em qualquer parte da tabela, então um menu suspenso contendo algumas opções é aberto (ver Figura 91). Tais opções podem ser descritas como segue:

1. *Export Table*: Essa opção permite exportar a tabela inteira em um arquivo de texto que será salvo no diretório especificado pelo usuário em uma caixa de diálogo.
2. *Export AE Index*: Essa opção permite exportar o índice AE abrangendo o período entre **Start Time** e **End Time** do candidato ou evento HILDCAA (ou não) selecionado. O índice é salvo em um arquivo de texto no diretório especificado pelo usuário em uma caixa de diálogo. O arquivo contém duas colunas. A primeira corresponde aos instantes de tempo entre **Start Time** e **End Time**, enquanto a segunda corresponde aos valores do índice AE em cada um desses instantes.
3. *Export SYM/H*: Essa opção é análoga a anterior, mas agora é o índice SYM-H que será salvo em um arquivo de texto.
4. *Reset*: Essa opção permite que os valores correntes das colunas **Start Time**, **End Time** e **Hildcaa ?** do candidato ou evento HILDCAA (ou não) selecionado sejam substituídos pelos valores iniciais. Os valores das colunas **Start Time** e **End Time** são alterados quando a fase principal de uma tempestade é removida (explicação mais adiante). Quanto ao valor da coluna **Hildcaa ?**, ele pode ser alterado por meio das duas últimas opções do menu suspenso ou pelo próprio Hilda após determinar se um candidato é ou não um evento HILDCAA.
5. *is Hildcaa ? No (Yes)*.: Altera o valor da coluna **is Hildcaa ?** do candidato ou evento HILDCAA (ou não) selecionado para N (Y).

A seleção de uma linha da tabela também habilita o botão **Other Parameters**, como ilustra a Figura 90. Ao pressioná-lo, uma nova tela é aberta contendo diversas caixas de seleção referentes aos parâmetros do vento solar, aos índices geomagnéticos e as componentes do IMF que estão disponíveis em ambos os arquivos (baixa e alta resolução) introduzidos pelo usuário. Sob o painel **High Resolution Parameters** estão as caixas de seleção referentes ao conteúdo do arquivo de alta resolução, enquanto sob o

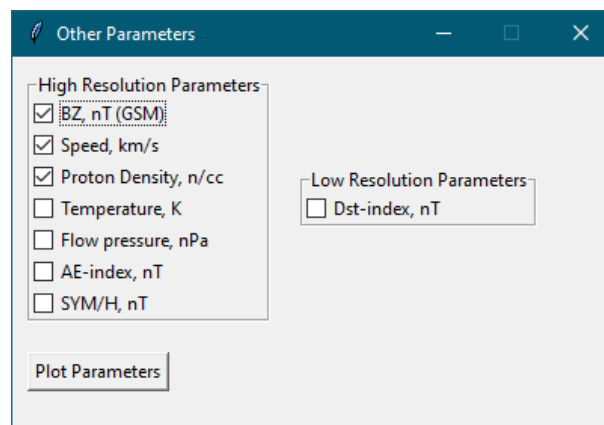
Figura 91 – O Hilda permite que o usuário exporte a tabela inteira em um arquivo de texto. Ao selecionar um candidato ou evento HILDCAA (ou não) - uma linha da tabela -, o Hilda também admite que o usuário exporte os índices geomagnéticos (AE e SYM-H) correspondentes, substitua os valores atuais da linha selecionada pelos valores iniciais e altere o valor da coluna *Hildcaa ?*. Para isso, basta pressionar o botão direito do *mouse* em qualquer parte da tabela para selecionar a operação desejada.

| Number | Start Time | End Time | Duration | Hildcaa ? |
|--------|---------------------|---------------------|------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2003-02-01 13:32:00 | 2003-02-05 02:53:00 | 3 days, 13:21:00 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 2 | 2003-03-03 08:00:00 | 2003-03-07 15:45:00 | 4 days, 7:45:00 | <input type="checkbox"/> |
| 3 | 2003-03-14 17:46:00 | 2003-03-19 08:19:00 | 4 days, 14:33:00 | <input type="checkbox"/> |
| 4 | 2003-03-28 13:38:00 | 2003-03-31 03:36:00 | 2 days, 13:58:00 | <input type="checkbox"/> |
| 5 | 2003-04-20 15:46:00 | 2003-04-23 02:02:00 | 2 days, 10:16:00 | <input type="checkbox"/> |
| 6 | 2003-04-24 05:06:00 | 2003-04-28 11:06:00 | 4 days, 6:00:00 | <input type="checkbox"/> |
| 7 | 2003-04-29 12:45:00 | 2003-05-03 14:37:00 | 4 days, 1:52:00 | C |
| 8 | 2003-05-05 08:50:00 | 2003-05-09 17:00:00 | 4 days, 8:10:00 | C |
| 9 | 2003-05-10 15:29:00 | 2003-05-13 02:15:00 | 2 days, 10:46:00 | C |
| 10 | 2003-05-13 04:31:00 | 2003-05-16 03:51:00 | 2 days, 23:20:00 | Y |

Fonte: O autor.

painel **Low Resolution Parameters** estão as caixas de seleção associadas ao conteúdo do arquivo de baixa resolução. Veja a Figura 92. O usuário pode marcar até 5 caixas de seleção em cada resolução. Depois disso, ele deve pressionar o botão **Plot Parameters** para abrir novas janelas (uma para cada resolução) com os gráficos das componentes do IMF, dos parâmetros do vento solar e dos índices geomagnéticos selecionados. Esses gráficos compreendem apenas o período relativo a linha selecionada da tabela, entre **Start Time** e **End Time**. Dias adicionais são anexados antes e depois desse período para melhorar a visualização. O número de dias pode ser alterado no menu suspenso **Days**.

Figura 92 – O Hilda apresenta uma janela com caixas de seleção relativas ao conteúdo dos arquivos de baixa e alta resolução fornecidos pelo usuário. Ele tem a liberdade de marcar até 5 caixas de seleção sob **High Resolution Parameters** ou **Low Resolution Parameters**. Os gráficos das componentes do IMF, dos índices geomagnéticos e dos parâmetros do vento solar escolhidos em cada resolução são mostrados em janelas diferentes ao pressionar o botão **Plot Parameters**.



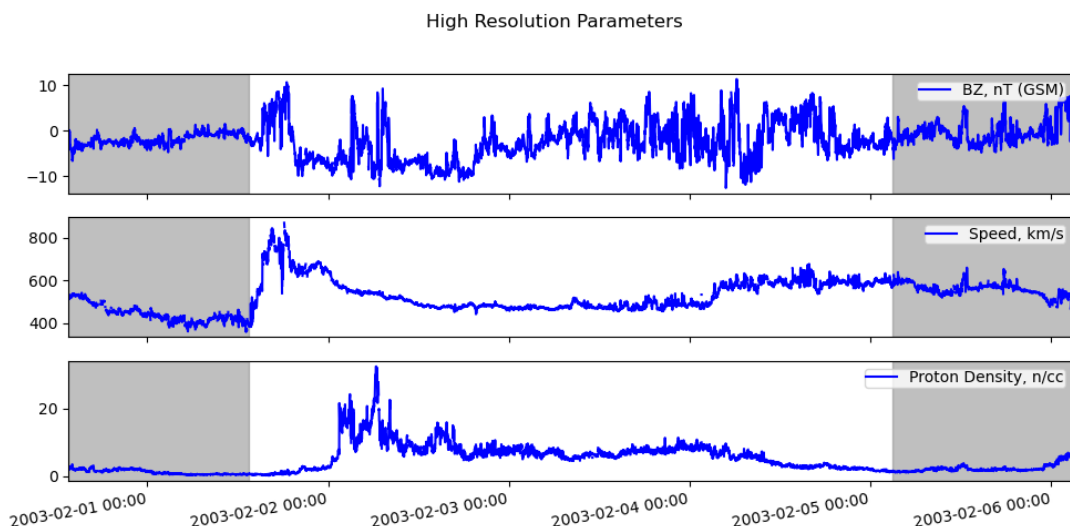
Fonte: O autor.

A Figura 93 mostra a janela que é aberta ao selecionar BZ, nT (GSM), Speed, km/s e Proton Density, n/cc) sob High Resolution Parameters e pressionar o botão Plot Parameters. A região sombreada são os dias adicionais. A ideia desse recurso é permitir que o usuário decida se um candidato é ou não um evento HILDCAA avaliando as condições do meio interplanetário. Em geral, as curvas de densidade e velocidade do vento solar são analisadas.

No momento em que a tabela é construída, os valores da coluna Hildcaa ? podem ser C ou Y indicando um candidato ou um evento HILDCAA, respectivamente. Para alterar o valor dessa coluna em uma dada linha, o usuário pode simplesmente selecionar uma das opções is Hildcaa? no menu suspenso da Figura 91. Essa abordagem permite que o usuário indique se um candidato é ou não um evento HILDCAA após analisar visualmente os gráficos dos parâmetros interplanetários (vento solar e IMF). Por outro lado, o valor também pode ser alterado de forma automática analisando o gráfico do índice Dst. Ele é apresentado no painel inferior da tela principal do Hilda ao marcar o botão de rádio Dst. A análise consiste em remover (se houver) a fase principal de tempestades geomagnéticas, visto que por definição um evento HILDCAA só pode ocorrer fora dela.

O procedimento para a remoção da fase principal de uma tempestade geomagnética pode ser descrito da seguinte forma. Em primeiro lugar, o usuário deve selecionar uma linha da tabela cuja coluna Hildcaa ? tenha o valor C. Assim, o gráfico do índice Dst é apresentado no lado direito da tabela para o período entre Start Time e End Time, juntamente com os dias adicionais (ver Figura 94); certifique-se que o botão de rádio

Figura 93 – Essa janela contém os gráficos relativos a três caixas de seleção marcadas sob o painel de alta resolução (ver Figura 92). Especificamente, tem-se a componente B_z do IMF (BZ, nT (GSM)), a velocidade (Speed, km/s) e a densidade (Proton Density, n/cc) do vento solar. As regiões sombreadas são dias adicionais colocados antes e depois.

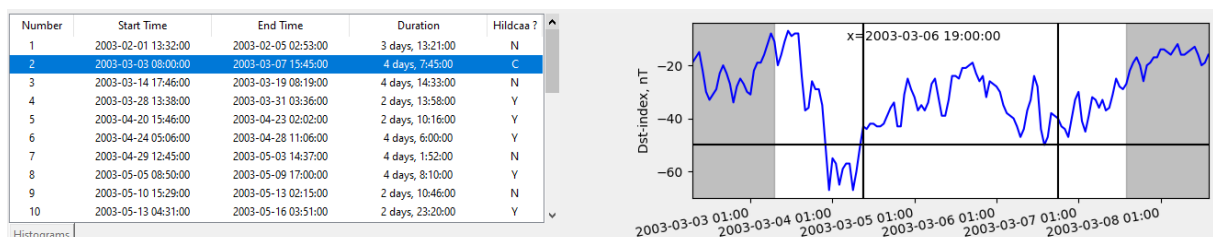


Fonte: O autor.

Dst esteja marcado. Se o usuário mover o cursor do *mouse* sobre o gráfico, então uma barra vertical deslizante aparecerá sobre o mesmo. Se, porventura, uma fase principal for identificada, então o usuário poderá indicar um novo **Start Time** por meio dessa barra deslizante. Do mesmo modo, um novo **End Time** poderá ser especificado por meio de outra barra deslizante. Após esse processo, uma mensagem é emitida ao usuário com os novos valores de **Start Time** e **End Time** selecionados. Ela questiona se as alterações devem ser feitas. Em caso afirmativo, a tabela e o gráfico são atualizados de modo a abranger o novo período. Como a remoção da fase principal altera a duração do candidato, esta é comparada com a duração mínima informada pelo usuário. Se o critério de duração for violado, então o valor da coluna **Hildcaa ?** se torna **N**. Caso contrário, o candidato é um evento **HILDCAA** e o valor se torna **Y**.

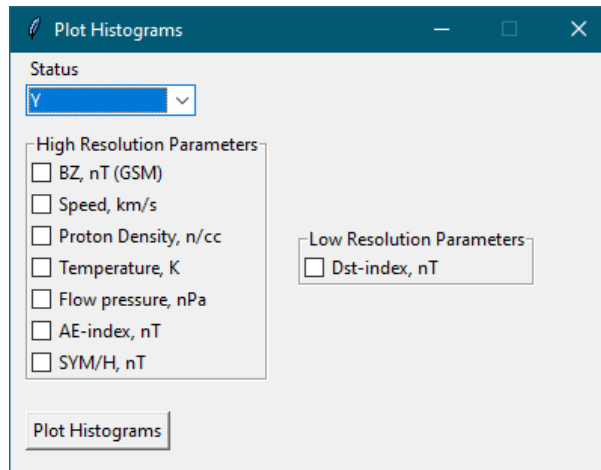
Após a análise de todos os candidatos da tabela, de maneira que a coluna **Hildcaa ?** não contenha nenhum valor **C**, o botão **Histograms** na parte inferior da tabela é habilitado. Ao pressioná-lo, a tela ilustrada na Figura 95 aparece para o usuário. Ela é muito semelhante a tela da Figura 92, com exceção do menu suspenso **Status** com as opções **Y** e **N**. Novamente, o usuário pode marcar até 5 caixas de seleção relativas aos parâmetros do vento solar, aos índices geomagnéticos e as componentes do IMF. Na sequência, ele deve pressionar o botão **Plot Histograms** para gerar os histogramas das caixas de seleção marcadas. Para entender como o Hilda gera um histograma, suponha que o usuário tenha marcado a caixa de seleção **BZ, nT (GSM)** e a opção **Y** no menu **Status**. Quando o botão **Plot Histograms** é pressionado, o Hilda junta os valores das séries temporais da componente B_z do IMF apenas nos períodos de ocorrência de um evento **HILDCAA** e cria uma distribuição de frequências (histograma) desses valores. Um procedimento análogo é realizado caso a opção **N** seja escolhida, mas agora para períodos de não ocorrência de um evento **HILDCAA**. Por fim, uma curva gaussiana é gerada a partir da média e do desvio padrão desses valores. Ela é sobreposta ao histograma recém gerado. A Figura 96 ilustra os histogramas gerados ao selecionar **BZ, nT (GSM)**, **Speed, km/s** e **Proton Density, n/cc** sob **High Resolution Parameters**. Note que no canto superior

Figura 94 – O Hilda permite a remoção da fase principal de uma tempestade geomagnética ocorrendo no período entre **Start Time** e **End Time** de um candidato a evento **HILDCAA**. Para isso, ele dispõe de duas barras deslizantes para que o usuário possa indicar novos valores para **Start Time** e **End Time** a fim de remover a fase principal.



Fonte: O autor.

Figura 95 – Essa janela permite que o usuário gere histogramas dos parâmetros do vento solar, dos índices geomagnéticos e das componentes do IMF em cada uma das resoluções. O usuário escolhe os histogramas que deseja nas caixas de seleção sob **High Resolution Parameters** ou **Low Resolution Parameters**. O tipo de histograma é especificado no menu **Status**. Caso o valor seja Y, os histogramas são gerados considerando apenas os períodos de ocorrência de um evento HILDCAA. Caso o valor seja N, eles são gerados considerando apenas os períodos de não ocorrência.

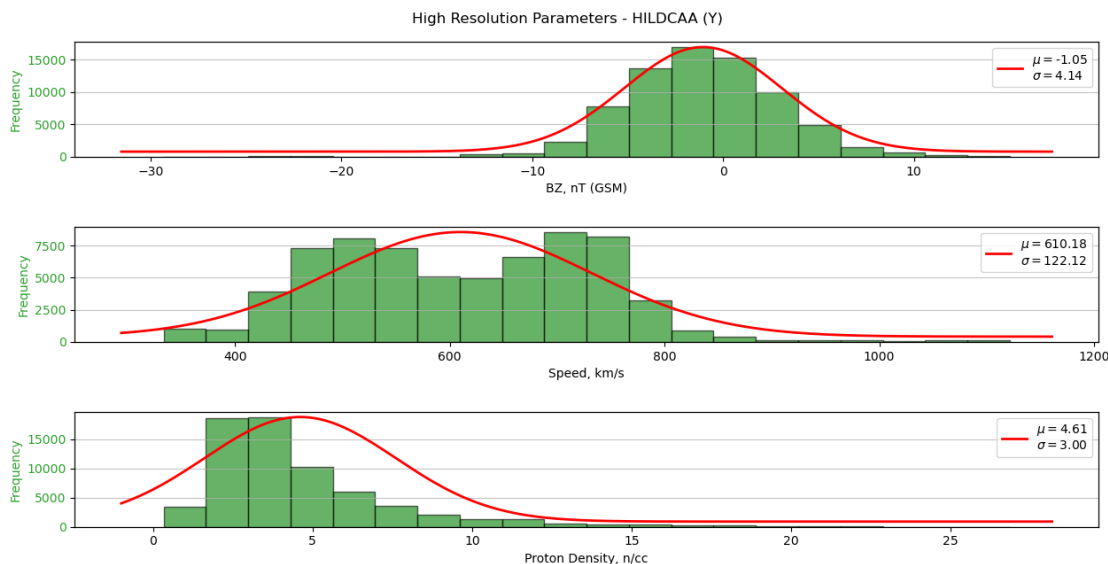


Fonte: O autor.

direito de cada histograma há uma legenda com a média e o desvio padrão relacionados a cada uma das curvas gaussianas.

Por fim, o usuário pode obter informações do Hilda e de seus desenvolvedores por meio do menu **Help >> About** na Figura 84. Ao selecioná-lo, uma tela é aberta para o usuário contendo uma breve descrição do propósito do Hilda e informações (nome completo e endereço eletrônico) de seus desenvolvedores (ver Figura 97). Caso o usuário pressione sobre o nome (em azul) de um desenvolvedor, ele será direcionado ao currículo Lattes dele. Esse recurso é uma forma de manter o usuário próximo dos desenvolvedores do Hilda, pois críticas e sugestões são sempre bem vindas.

Figura 96 – Essa janela contém os histogramas relativos a componente B_z do IMF (BZ, nT (GSM)), a velocidade (Speed, km/s) e a densidade (Proton Density, n/cc) do vento solar. Em cada histograma, há uma curva gaussiana em vermelho cuja média e desvio padrão estão indicados na legenda no canto superior direito. Os histogramas foram gerados por meio da janela ilustrada na Figura 95 ao marcar as caixas de seleção sob **High Resolution Parameters** e selecionar a opção **Y** no menu suspenso **Status**.



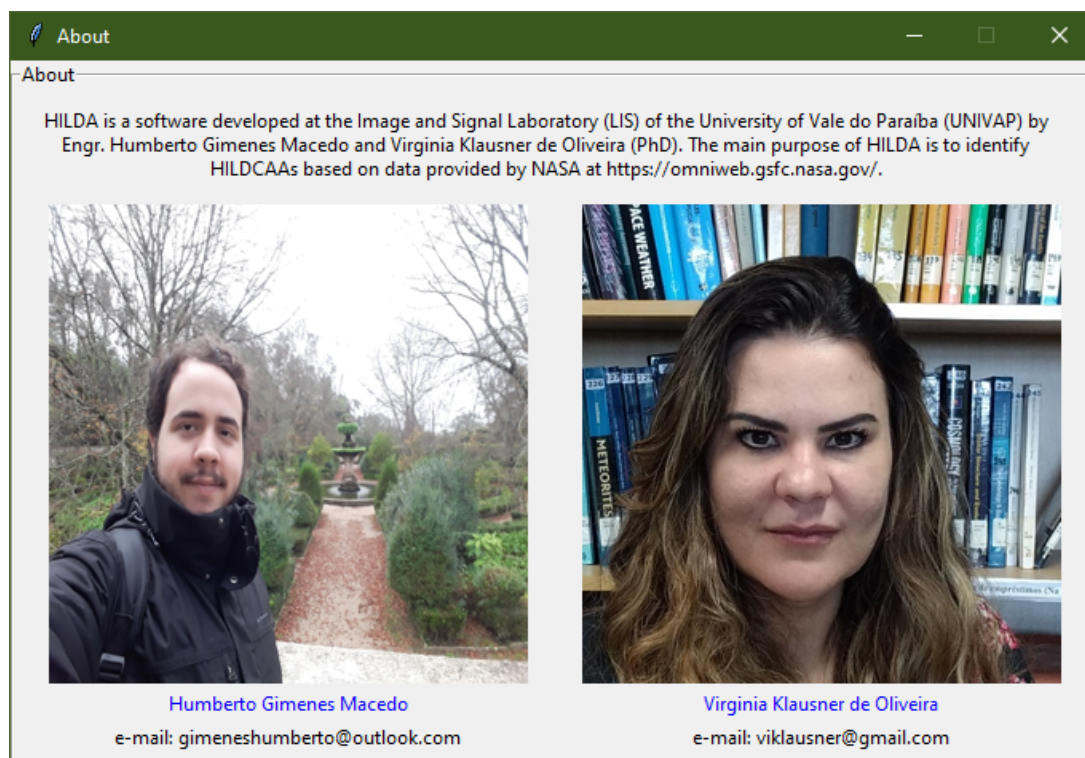
Fonte: O autor.

9.3 Aplicação do Programa

Como discutido anteriormente, o Hilda é um programa desenvolvido para detectar eventos HILDCAA a partir das séries temporais dos índices geomagnéticos e dos parâmetros do meio interplanetário em algum período de interesse. Para validar as saídas produzidas pelo Hilda, foram consideradas as séries temporais dos anos de 2008 e 2010. A ideia era comparar os eventos HILDCAA e HILDCAA* identificados pelo Hilda com os eventos identificados por Klausner et al. (2021) no mesmo período. Um evento HILDCAA* trata-se essencialmente de um evento HILDCAA, mas com uma ligeira mudança no terceiro critério. Nesse caso, o critério é relaxado para permitir que o índice AE possa permanecer por até 4 horas consecutivas abaixo de 200 nT, em vez de 2 horas como exige o critério original (PRESTES et al., 2017). Klausner et al. (2021) identificaram eventos HILDCAA e HILDCAA* durante o mínimo solar dos ciclos 23 e 24, em particular nos anos de 2008, 2009 e 2010¹. O propósito do trabalho era modelar os eventos HILDCAA/HILDCAA* nesse período utilizando análise de componentes principais, regressão por componentes principais e regressão linear múltipla. Por meio dessas ferramentas, Klausner et al. (2021) estabeleceram um modelo linear no qual o índice AE é escrito em termos das componentes do IMF, dos parâmetros do vento solar e do índice geomagnético SYM-H. A ideia era determinar

¹ A propósito, o autor deste texto também é um dos autores desse artigo.

Figura 97 – Essa janela permite que o usuário obtenha informações sobre o propósito do Hilda, bem como de seus desenvolvedores. Ela contém a foto, o nome completo e o endereço eletrônico de cada um deles. Ao pressionar em um dos nomes (em azul), o navegador do usuário é aberto no currículo Lattes do respectivo desenvolvedor.



Fonte: O autor.

se esse modelo poderia ser utilizado para o prognóstico de eventos HILDCAA/HILDCAA* entre 2008 e 2010.

Em 2008, o Hilda identificou 2 eventos HILDCAA e 8 eventos HILDCAA*, como ilustram, respectivamente, as Figuras 98a e 98b. Em 2010, foram identificados 5 eventos HILDCAA*, como ilustra a Figura 98c. As Tabelas 4 e 5 listam, respectivamente, os eventos HILDCAA/HILDCAA* encontrados pelo Hilda e por Klausner et al. (2021) nos anos de 2008 e 2010. Todos os eventos identificados pelo Hilda diferem em apenas 1 minuto nos instantes inicial e final dos eventos identificados por Klausner et al. (2021), com exceção dos eventos HILDCAA* de número 1 e 2 do ano de 2010. Estes últimos apresentam uma diferença ligeiramente maior, tendo a vista a necessidade de remoção da fase principal de uma tempestade geomagnética em seus respectivos períodos. Na versão atual, o Hilda permite configurar novos instantes inicial e final com uma resolução de horas e não de minutos. É por este motivo que os instantes inicial e final desses dois eventos na tabela do Hilda representam horas inteiras, sem os minutos. Portanto, os eventos identificados com o Hilda mostram-se condizentes com os identificados por Klausner et al. (2021), como se queria demonstrar. As Figuras 99, 100 e 100 ilustram os gráficos dos índices AE e SYM-H para os eventos HILDCAA e HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2008. Analogamente,

Figura 98 – Eventos HILDCAA/HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2008 e 2010.

(a) Eventos HILDCAA (2008).

| Number | Start Time | End Time | Duration | Hildcaa ? |
|--------|---------------------|---------------------|------------------|-----------|
| 1 | 2008-02-28 09:23:00 | 2008-03-01 23:43:00 | 2 days, 14:20:00 | Y |
| 2 | 2008-03-26 05:58:00 | 2008-03-29 01:33:00 | 2 days, 19:35:00 | Y |

(b) Eventos HILDCAA* (2008).

| Number | Start Time | End Time | Duration | Hildcaa ? |
|--------|---------------------|---------------------|------------------|-----------|
| 1 | 2008-01-05 08:14:00 | 2008-01-07 13:52:00 | 2 days, 5:38:00 | Y |
| 2 | 2008-01-31 17:52:00 | 2008-02-04 15:19:00 | 3 days, 21:27:00 | Y |
| 3 | 2008-02-27 12:18:00 | 2008-03-01 23:43:00 | 3 days, 11:25:00 | Y |
| 4 | 2008-03-26 05:58:00 | 2008-03-30 18:12:00 | 4 days, 12:14:00 | Y |
| 5 | 2008-04-05 09:18:00 | 2008-04-07 23:20:00 | 2 days, 14:02:00 | Y |
| 6 | 2008-04-22 23:33:00 | 2008-04-25 10:53:00 | 2 days, 11:20:00 | Y |
| 7 | 2008-06-14 17:58:00 | 2008-06-18 14:40:00 | 3 days, 20:42:00 | Y |
| 8 | 2008-07-12 02:09:00 | 2008-07-14 18:00:00 | 2 days, 15:51:00 | Y |
| 9 | 2008-10-11 04:57:00 | 2008-10-13 10:21:00 | 2 days, 5:24:00 | C |

(c) Eventos HILDCAA* (2010).

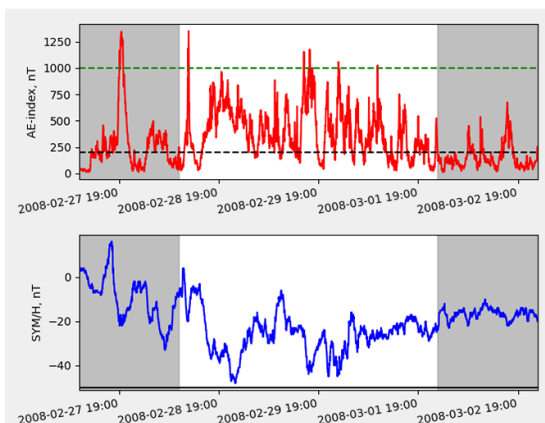
| Number | Start Time | End Time | Duration | Hildcaa ? |
|--------|---------------------|---------------------|------------------|-----------|
| 1 | 2010-04-06 08:00:00 | 2010-04-08 13:00:00 | 2 days, 5:00:00 | Y |
| 2 | 2010-05-02 20:00:00 | 2010-05-05 08:00:00 | 2 days, 12:00:00 | Y |
| 3 | 2010-05-30 15:10:00 | 2010-06-02 04:42:00 | 2 days, 13:32:00 | Y |
| 4 | 2010-07-27 00:05:00 | 2010-07-29 15:29:00 | 2 days, 15:24:00 | Y |
| 5 | 2010-08-23 22:11:00 | 2010-08-26 16:24:00 | 2 days, 18:13:00 | Y |
| 6 | 2010-11-10 17:52:00 | 2010-11-13 00:31:00 | 2 days, 6:39:00 | N |

Fonte: O autor.

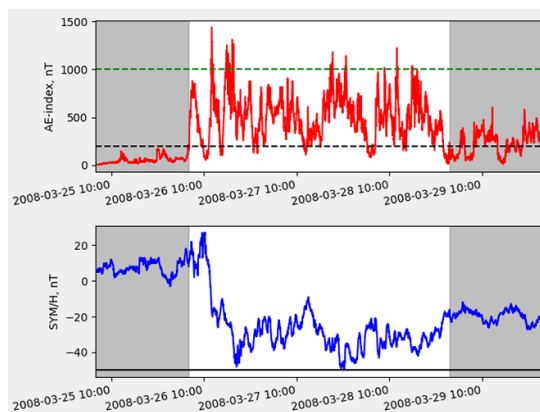
a Figura 101 ilustra os gráficos dos mesmos índices, mas para os eventos HILDCAA* de 2010.

Figura 99 – Gráficos dos índices AE e SYM-H referentes aos eventos HILDCAA identificados pelo Hilda em 2008.

(a) Evento HILDCAA entre 28 de Fevereiro, 09:23 UT e 01 de Março, 23:43 UT.



(b) 26 de Março, 05:58 UT e 29 de Março, 01:33 UT.



Fonte: O autor.

Tabela 4 – Lista de eventos HILDCAA/HILDCAA* identificados pelo Hilda nos anos de 2008 e 2010. Na coluna Evento, o símbolo H denota um evento HILDCAA, enquanto o símbolo H* denota um evento HILDCAA*. A coluna ID é a identificação do evento em um dado ano. Por fim, as colunas Início e Fim contêm, respectivamente, o dia e a hora de início e fim de um evento H ou H*.

| Evento | ID | Ano | Início | | Fim | |
|--------|----|------|-----------------|-----------|---------------|-----------|
| | | | Dia e Mês | Hora (UT) | Dia e Mês | Hora (UT) |
| H | 1 | 2008 | 28 de Fevereiro | 09:23 | 01 de Março | 23:43 |
| H | 2 | 2008 | 26 de Março | 05:58 | 29 de Março | 01:33 |
| H* | 1 | 2008 | 05 de Janeiro | 08:14 | 07 de Janeiro | 13:52 |
| H* | 2 | 2008 | 31 de Janeiro | 17:52 | 04 Fevereiro | 15:19 |
| H* | 3 | 2008 | 27 de Fevereiro | 12:18 | 01 de Março | 23:43 |
| H* | 4 | 2008 | 26 de Março | 05:58 | 30 de Março | 18:12 |
| H* | 5 | 2008 | 05 de Abril | 09:18 | 07 de Abril | 23:20 |
| H* | 6 | 2008 | 22 de Abril | 23:33 | 25 de Abril | 10:53 |
| H* | 7 | 2008 | 14 de Junho | 17:58 | 18 de Junho | 14:40 |
| H* | 8 | 2008 | 12 de Julho | 02:09 | 14 de Julho | 18:00 |
| H* | 1 | 2010 | 06 de Abril | 08:00 | 08 de Abril | 13:00 |
| H* | 2 | 2010 | 02 de Maio | 20:00 | 05 de Maio | 08:00 |
| H* | 3 | 2010 | 30 de Maio | 15:10 | 02 de Junho | 04:42 |
| H* | 4 | 2010 | 27 de Julho | 00:05 | 29 de Julho | 15:29 |
| H* | 5 | 2010 | 23 de Agosto | 22:11 | 26 de Agosto | 16:24 |

Fonte: O autor.

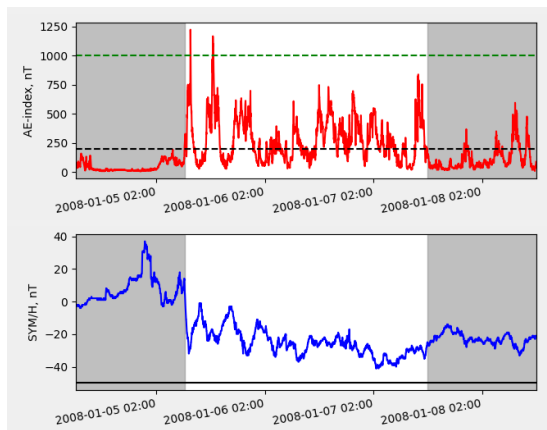
Tabela 5 – Lista de eventos HILDCAA/HILDCAA* identificados por [Klausner et al. \(2021\)](#) nos anos de 2008 e 2010. As colunas possuem o mesmo significado das colunas da Tabela 4.

| Evento | ID | Ano | Início | | Fim | |
|--------|----|------|-----------------|-----------|---------------|-----------|
| | | | Dia e Mês | Hora (UT) | Dia e Mês | Hora (UT) |
| H | 1 | 2008 | 28 de Fevereiro | 09:22 | 01 de Março | 23:42 |
| H | 2 | 2008 | 26 de Março | 05:57 | 29 de Março | 01:32 |
| H* | 1 | 2008 | 05 de Janeiro | 08:13 | 07 de Janeiro | 13:51 |
| H* | 2 | 2008 | 31 de Janeiro | 17:51 | 04 Fevereiro | 15:18 |
| H* | 3 | 2008 | 27 de Fevereiro | 12:17 | 01 de Março | 23:42 |
| H* | 4 | 2008 | 26 de Março | 05:57 | 30 de Março | 18:11 |
| H* | 5 | 2008 | 05 de Abril | 09:17 | 07 de Abril | 23:19 |
| H* | 6 | 2008 | 22 de Abril | 23:32 | 25 de Abril | 10:52 |
| H* | 7 | 2008 | 14 de Junho | 17:57 | 18 de Junho | 14:39 |
| H* | 8 | 2008 | 12 de Julho | 02:08 | 14 de Julho | 17:59 |
| H* | 1 | 2010 | 06 de Abril | 07:40 | 08 de Abril | 13:48 |
| H* | 2 | 2010 | 02 de Maio | 20:16 | 05 de Maio | 08:53 |
| H* | 3 | 2010 | 30 de Maio | 15:09 | 02 de Junho | 04:41 |
| H* | 4 | 2010 | 27 de Julho | 00:04 | 29 de Julho | 15:28 |
| H* | 5 | 2010 | 23 de Agosto | 22:10 | 26 de Agosto | 16:23 |

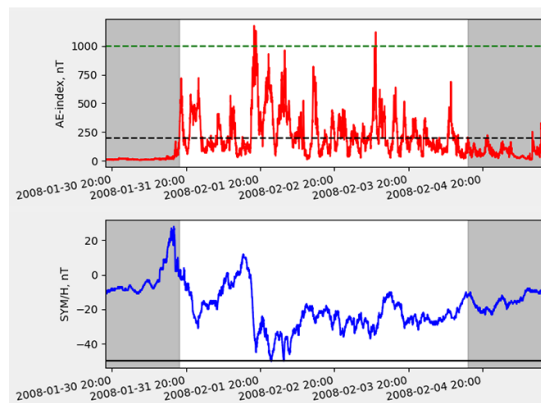
Fonte: Adaptado de [Klausner et al. \(2021\)](#).

Figura 100 – Gráficos dos índices AE e SYM-H referentes aos eventos HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2008.

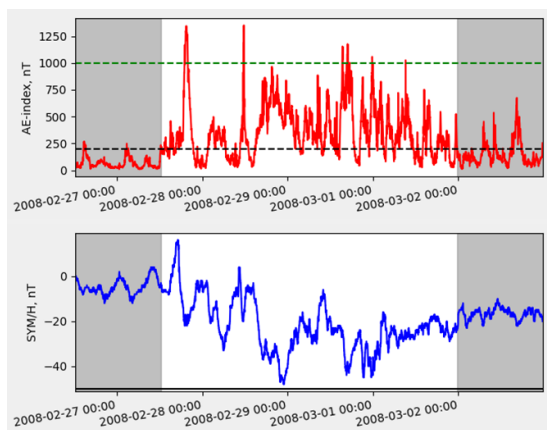
(a) 05 de Janeiro, 08:14 UT e 07 de Janeiro, 13:52 UT.



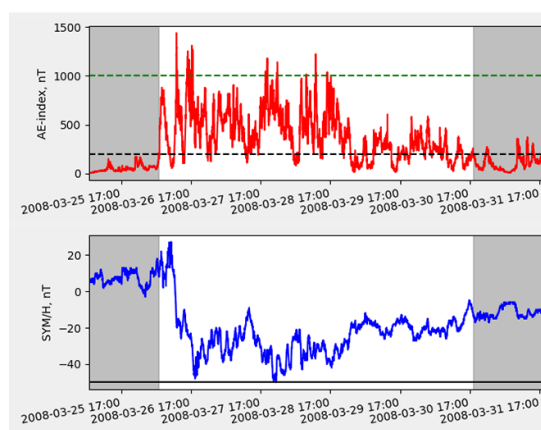
(b) 31 de Janeiro, 17:52 UT e 04 Fevereiro, 15:19 UT.



(c) 27 de Fevereiro, 12:18 UT e 01 de Março, 23:43 UT.



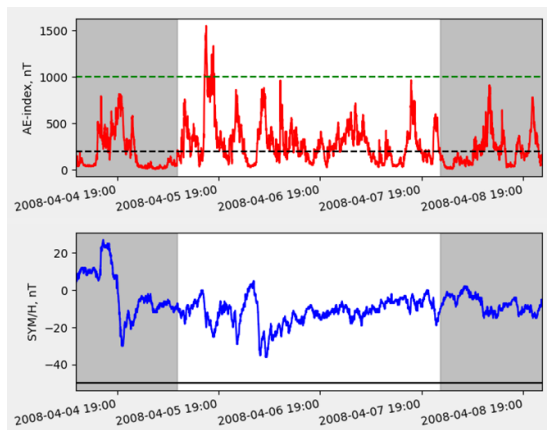
(d) 26 de Março, 05:58 UT e 30 de Março, 18:12 UT.



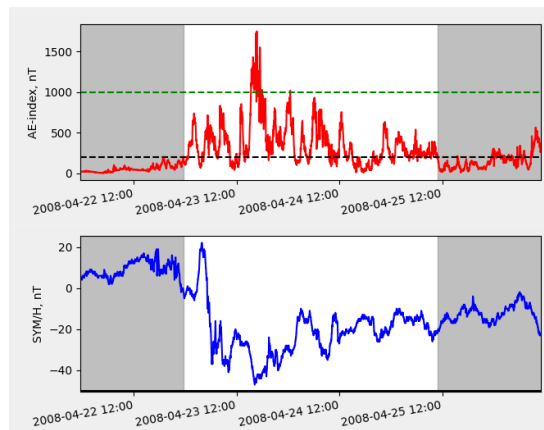
Fonte: O autor.

Figura 100 – Gráficos dos índices AE e SYM-H referentes aos eventos HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2008 (cont.).

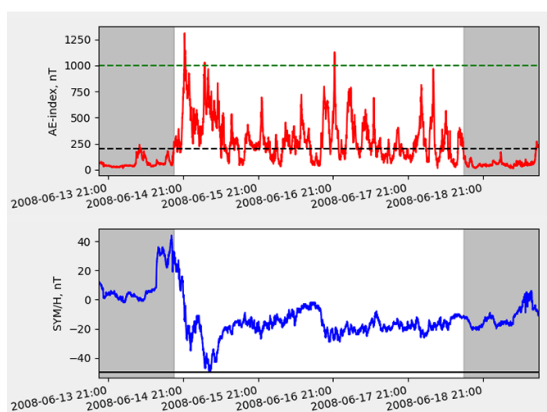
(e) 05 de Abril, 09:18 UT e 07 de Abril, 23:20 UT.



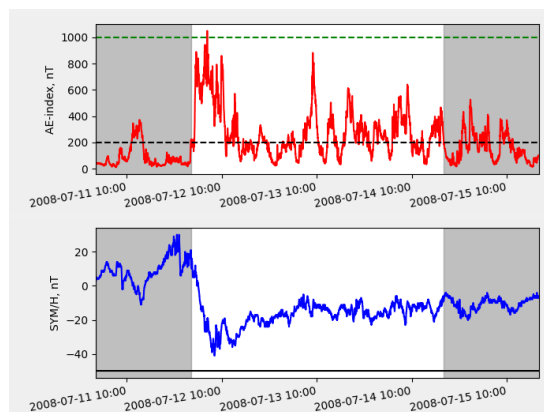
(f) 22 de Abril, 23:33 UT e 25 de Abril, 10:53 UT.



(g) 14 de Junho, 17:58 UT e 18 de Junho, 14:40 UT.



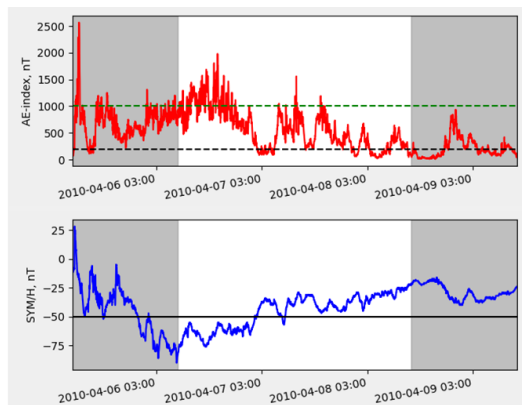
(h) 12 de Julho, 02:09 UT e 14 de Julho, 18:00 UT.



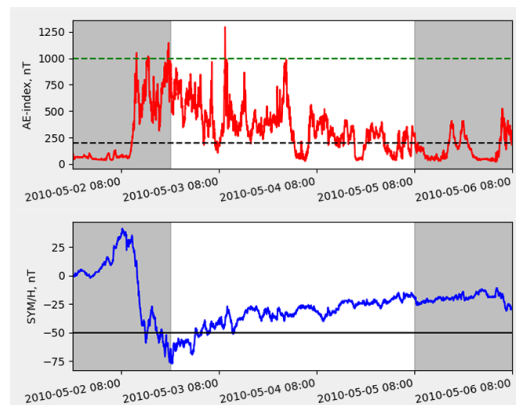
Fonte: O autor.

Figura 101 – Gráficos dos índices AE e SYM-H referentes aos eventos HILDCAA* identificados pelo Hilda em 2010.

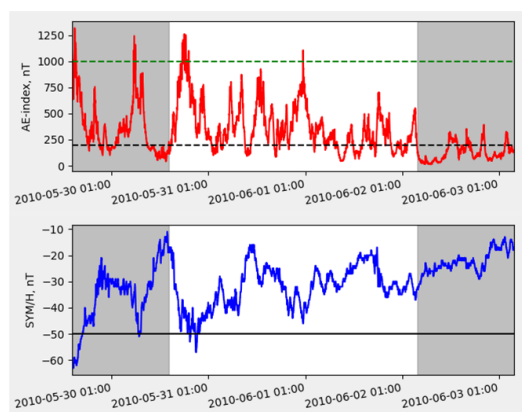
(a) 06 de Abril, 08:00 UT e 08 de Abril, 13:00 UT.



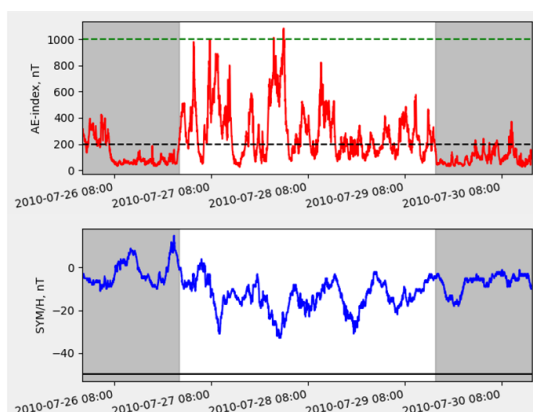
(b) 02 de Maio, 20:00 UT e 05 de Maio, 08:00 UT.



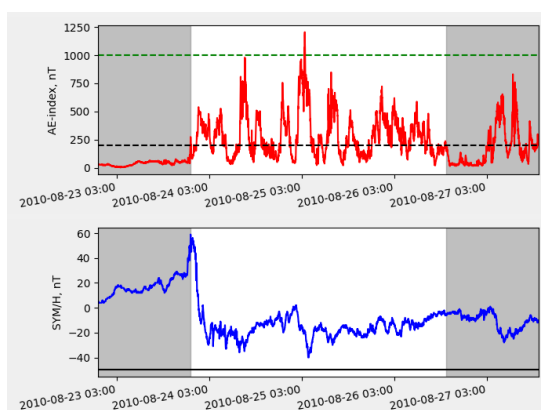
(c) 30 de Maio, 15:10 UT e 02 de Junho, 04:42 UT.



(d) 27 de Julho, 00:05 UT e 29 de Julho, 15:29 UT.



(e) 23 de Agosto, 22:11 e 26 de Agosto, 16:24 UT.



Fonte: O autor.

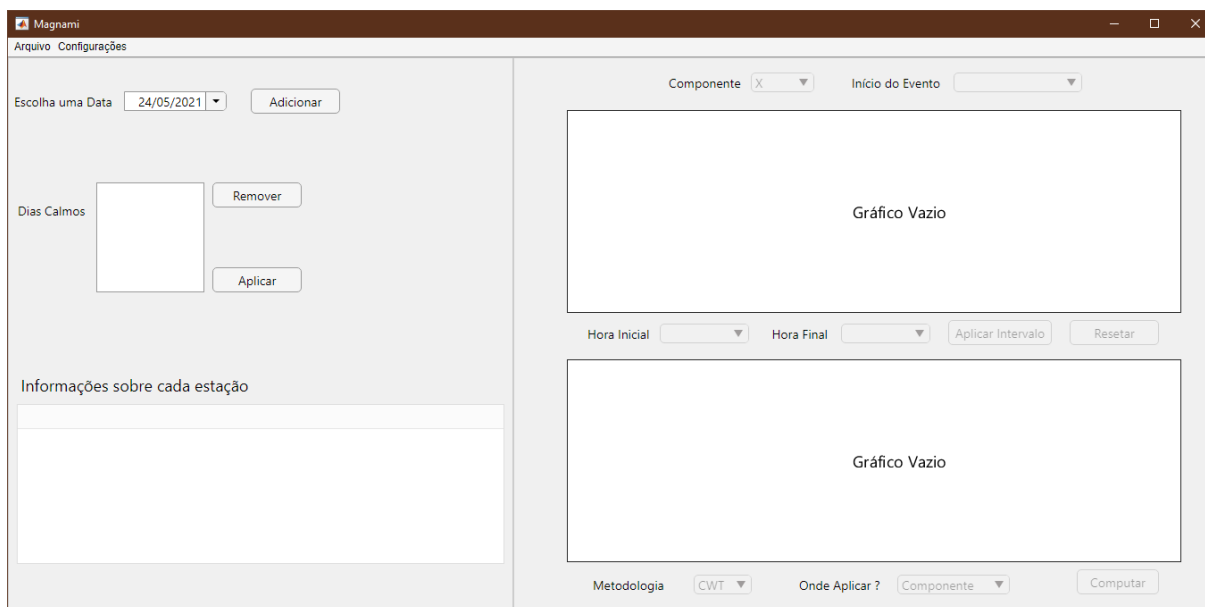
10 MAGNAMI

O MAGNAMI é um *software* com interface gráfica amigável escrito em MATLAB, cujo propósito é analisar dados de magnetômetro (séries temporais dos elementos geomagnéticos) para a identificação de variações geomagnéticas causadas por tsunamis. O nome MAGNAMI faz alusão a esse fato, pois é um acrônimo para *MAGNetogram Analysis during tsunaMI*. O MAGNAMI dispõe de todas as metodologias matemáticas discutidas neste texto (ver Parte II). Especificamente, a SSA é utilizada para determinar a linha de base S_q de um determinado mês a partir de seus 5 dias geomagneticamente mais calmos. A ideia é subtraí-la das componentes do campo geomagnético a fim de remover a tendência relacionada à influência solar. A análise *wavelet* (CWT e DWT) é aplicada nas séries temporais das componentes do campo geomagnético com o intuito de determinar a localização temporal e as periodicidades (ou frequências) características das variações geomagnéticas produzidas por tsunamis. Por fim, a EMD também é utilizada para identificar as assinaturas magnéticas de natureza tsunamigênica. Elas possuem formato de N-invertido e são usualmente identificadas nas IMFs das componentes horizontal e vertical do campo geomagnético. O capítulo está redigido da seguinte forma. A seção 10.1 discute sobre como o MAGNAMI deve ser utilizado pelo usuário. A seção 10.2 mostra uma aplicação do MAGNAMI para identificar as variações geomagnéticas causadas pelo tsunami associado ao sismo do Chile de 2010. A ideia é validar a ferramenta comparando suas saídas com resultados encontrados por Klausner et al. (2021). A Figura 102 ilustra a tela principal do MAGNAMI.

10.1 Uso do Programa

Os dados de magnetômetro requeridos pelo MAGNAMI são registrados pela rede de observatórios INTERMAGNET e disponibilizados no endereço [Dados INTERMAGNET](#). Esses dados correspondem às séries temporais das componentes do campo geomagnético, que podem ser registradas com um período de amostragem de 1 segundo ou 1 minuto (RASSON, 2007). As séries temporais são armazenadas em arquivos com extensão `.min` quando o período de amostragem é de 1 minuto ou `.sec` caso o período de amostragem seja de 1 segundo. Em todo caso, os arquivos estão estruturadas de acordo com o formato IAGA 2002. As Figuras 103a e 103b ilustram a estrutura interna de um arquivo com extensão `.min` associado ao observatório de Huancayo (HUA) no Peru. A Figura 103a ilustra a estrutura do cabeçalho, que é composto por vários campos cujos significados estão descritos na Tabela 6. A Figura 103b ilustra os dados propriamente ditos, os quais estão dispostos em 7 colunas, a saber: DATE, TIME, DOY, HUAX, HUAY, HUAZ e HUAG. As três primeiras colunas identificam, respectivamente, a data, os horários e o dia do ano

Figura 102 – Ilustração da tela principal do MAGNAMI. Nessa tela, o usuário pode inserir os 5 dias geomagneticamente mais calmos, obter informações das estações relativas aos arquivos fornecidos e visualizar os gráficos dos elementos do campo geomagnético junto de seus respectivos resíduos. Além disso, o usuário também pode aplicar alguma metodologia matemática (CWT, DWT ou EMD) nos elementos geomagnéticos e em seus respectivos resíduos.



Fonte: O autor.

nos quais os valores das séries temporais foram registrados¹. As quatro colunas restantes dizem respeito às séries temporais das componentes do campo geomagnético indicadas no campo *Reported*. Tais colunas são nomeadas por meio da junção do código IAGA do observatório (3 letras) com a letra que identifica uma componente. Esse é o padrão para todos os arquivos no formato IAGA 2002.

Na tela principal do MAGNAMI, o usuário pode interagir com praticamente todos os recursos da aplicação. Ela é dividida em dois painéis, um à esquerda e outro à direita (ver Figura 102). No painel esquerdo, o usuário pode adicionar/remover as estações que desejar e fornecer os 5 dias geomagneticamente mais calmos de um dado mês. No painel direito, ele pode visualizar os gráficos das componentes do campo geomagnético e dos respectivos resíduos gerados após a remoção da linha de base S_q . Para ilustrar a forma como o MAGNAMI deve ser utilizado, esta discussão considera o sismo do Chile de 2010 como evento interesse, que ocorreu na região de Maule no dia 27 de fevereiro de 2010 com um subsequente tsunami.

O primeiro passo consiste em fornecer os 5 dias geomagneticamente mais calmos do mês de ocorrência do evento. No caso em questão, o mês é fevereiro (de 2010) e os dias calmos são 5, 9, 20, 21 e 26 (KLAUSNER et al., 2021). Para escolher um dia calmo, o

¹ Cada arquivo, seja com extensão `.min` ou `.sec`, armazena dados de um único dia.

Figura 103 – Ilustração da estrutura interna de um arquivo com extensão `.min` no formato IAGA 2002 relativo ao observatório de Huancayo (HUA) no Peru.

- (a) O cabeçalho é a primeira parte de um arquivo no formato IAGA 2002. Ele é composto por vários campos que identificam o observatório, as séries temporais no arquivo e o período de amostragem em que foram registradas.
- (b) As séries temporais correspondem à segunda parte de um arquivo no formato IAGA 2002. Elas são organizadas em 7 colunas com os instantes de registro e com as intensidades das componentes do campo geomagnético reportadas.

| | | | | | | | | | |
|---|--------------------------------|------------|--------------|-----|----------|---------|--------|------|-----|
| Format | IAGA-2002 | DATE | TIME | DOY | HUAX | HUAY | HUAZ | HUAG | |
| Source of Data | Instituto Geofisico del Peru | 2010-02-27 | 00:00:00.000 | 058 | 25393.10 | -794.50 | 203.70 | | .70 |
| Station Name | Huancayo | 2010-02-27 | 00:01:00.000 | 058 | 25393.00 | -794.50 | 203.70 | 1.10 | |
| IAGA CODE | HUA | 2010-02-27 | 00:02:00.000 | 058 | 25392.80 | -794.40 | 203.80 | | .70 |
| Geodetic Latitude | -12.038 | 2010-02-27 | 00:03:00.000 | 058 | 25392.70 | -794.40 | 203.80 | | .90 |
| Geodetic Longitude | 284.682 | 2010-02-27 | 00:04:00.000 | 058 | 25392.60 | -794.40 | 203.80 | | .70 |
| Elevation | 3336 | 2010-02-27 | 00:05:00.000 | 058 | 25392.60 | -794.30 | 203.90 | | .90 |
| Reported | XYZG | 2010-02-27 | 00:06:00.000 | 058 | 25392.60 | -794.20 | 204.00 | | .80 |
| Sensor Orientation | HDEF | 2010-02-27 | 00:07:00.000 | 058 | 25392.60 | -794.20 | 204.10 | | .70 |
| Digital Sampling | 1.0 seconds | 2010-02-27 | 00:08:00.000 | 058 | 25392.50 | -794.20 | 204.10 | | .80 |
| Data Interval Type | Average 1-Minute (00:30-01:29) | 2010-02-27 | 00:09:00.000 | 058 | 25392.40 | -794.20 | 204.20 | | .80 |
| Data Type | Definitive | 2010-02-27 | 00:10:00.000 | 058 | 25392.40 | -794.20 | 204.20 | | .90 |
| # D-conversion factor | 10000 | 2010-02-27 | 00:11:00.000 | 058 | 25392.30 | -794.10 | 204.20 | | .80 |
| # K9-limit | 241 | 2010-02-27 | 00:12:00.000 | 058 | 25392.30 | -794.00 | 204.30 | | .80 |
| # Format binary data. | | 2010-02-27 | 00:13:00.000 | 058 | 25392.20 | -794.00 | 204.30 | 1.00 | |
| # A complete set is available on the INTERMAGNET CD-ROM/DVD. | | 2010-02-27 | 00:14:00.000 | 058 | 25392.00 | -794.00 | 204.40 | | .80 |
| # Go to www.intermagnet.org for details on obtaining this product. | | 2010-02-27 | 00:15:00.000 | 058 | 25392.00 | -793.90 | 204.50 | | .60 |
| # CONDITIONS OF USE: The Conditions of Use for data provided | | 2010-02-27 | 00:16:00.000 | 058 | 25392.00 | -793.90 | 204.50 | | .80 |
| # through INTERMAGNET and acknowledgement templates can be found | | 2010-02-27 | 00:17:00.000 | 058 | 25391.90 | -793.90 | 204.60 | | .70 |
| # at www.intermagnet.org | | 2010-02-27 | 00:18:00.000 | 058 | 25391.80 | -793.90 | 204.60 | 1.00 | |
| # D conversion factor is a fixed value used to allow | | 2010-02-27 | 00:19:00.000 | 058 | 25391.80 | -793.80 | 204.70 | | .90 |
| # Declination to be converted from minutes of arc to equivalent | | 2010-02-27 | 00:20:00.000 | 058 | 25391.80 | -793.90 | 204.80 | | .70 |
| # nanoteslas. Set to H/3438*10000 where H is the annual mean | | 2010-02-27 | 00:21:00.000 | 058 | 25391.80 | -793.80 | 204.80 | | .80 |
| # value of horizontal intensity. | | 2010-02-27 | 00:22:00.000 | 058 | 25391.90 | -793.80 | 204.90 | | .70 |

Fonte: O autor.

usuário deve pressionar a seta ao lado da data no rótulo **Escolha uma Data**. Assim, um calendário suspenso será exibido (ver Figura 104a). Este calendário apresenta duas caixas de combinação em sua parte superior, uma para a escolha do ano e outra para a escolha do mês. O ano também pode ser escolhido utilizando as setas no canto superior direito. Entre elas há um losango para definir o dia corrente como um dia calmo. O usuário deve escolher um dia calmo na parte inferior do calendário. Para que ele seja adicionado à lista dos dias calmos, basta pressionar o botão **Adicionar**. Se, porventura, o usuário adicionar um dia errado, ele pode removê-lo da lista. Para isso, basta selecionar o respectivo dia na lista e pressionar o botão **Remover**. A Figura 104b ilustra a lista dos dias calmos após a inserção de todos os dias calmos supracitados. Por fim, para que o MAGNAMI os armazene, o usuário deve pressionar o botão **Aplicar**. Ao fazer isso, uma mensagem de aviso é emitida para que ele se certifique que os dias fornecidos estão corretos (ver Figura 104c). Em caso afirmativo, os elementos gráficos referentes à entrada dos dias calmos são desabilitados e a tabela **Informações sobre cada estação** é habilitada para que os arquivos das estações de interesse possam ser introduzidos. Uma mensagem de erro é emitida se o usuário tentar fornecer os arquivos antes de aplicar os dias calmos (ver Figura 104d).

Após a aplicação dos 5 dias mais calmos, o MAGNAMI permite que usuário forneça os arquivos com extensão `.min`² das estações de interesse. Há duas maneiras de fazer isso. A primeira maneira consiste em selecionar o menu **Arquivo** >> **Abrir** no canto superior esquerdo da tela ou em utilizar a combinação de teclas **Ctrl** + **O**. Dessa forma, o MAGNAMI abrirá uma caixa de diálogo para a seleção dos arquivos (ver Figura 105a). Note que

² Na versão atual, o MAGNAMI só trabalha com arquivos com extensão `.min`.

Tabela 6 – Descrição sucinta do significado de cada um dos campos que compõem o cabeçalho de um arquivo no formato IAGA 2002.

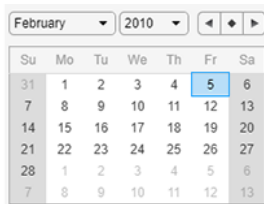
| Campos | Descrição |
|---------------------------|---|
| Format | É o formato do arquivo (IAGA 2002). |
| Source of Data | É o nome do instituto responsável por coletar os dados. |
| Station name | É o nome do observatório geomagnético escrito sem abreviações e com a primeira letra em maiúsculo. |
| IAGA Code | É um código composto por 3 letras maiúsculas que identifica um observatório geomagnético presente na lista de observatórios da IAGA. |
| Geodetic Latitude | É a latitude geodésica do observatório. Ela é dada em graus no intervalo entre -90° e 90° , com valores positivos ao norte. |
| Geodetic Longitude | É a longitude geodésica do observatório. Ela é dada em graus no intervalo entre -180° e 180° ou 0° e 360° , com valores positivos à leste. |
| Elevation | É a elevação em metros da localização do observatório mensurada com relação ao nível médio do mar. |
| Reported | São os elementos do campo geomagnético contidos no arquivo na ordem indicada. Valores válidos podem ser DHIF, DHZF e XYZF, bem como DHIG, DHZG e XYZG. |
| Sensor Orientation | É a orientação física dos instrumentos de observação, que pode ser XYZF, HDZ e assim por diante. |
| Digital Sampling | É a taxa (em segundos) de amostragem de dados do sensor de campo magnético (instrumento) ou o intervalo de digitalização para dados analógicos. |
| Data Type | Descreve o estado alcançado pelos dados no processo de publicação. Ele pode ser <i>variation</i> (V), <i>provisional</i> (P), <i>quasi-definitive</i> (Q) ou <i>definitive</i> (D). |
| Publication Date | É a data de publicação dos dados. A inclusão dessa informação é opcional. |

Fonte: Adaptado de [St-Louis \(2020\)](#).

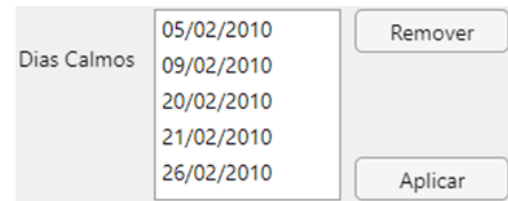
somente arquivos com extensão `.min` são listados. Isso evita que o usuário tente fornecer arquivos com outras extensões. A segunda maneira consiste em pressionar o botão direito do *mouse* em qualquer parte da tabela **Informações sobre cada estação** e escolher a opção **Adicionar Estações** do menu suspenso (ver Figura 105b). A combinação de teclas `Ctrl+S` também tem essa funcionalidade. Quanto a opção **Remover Estações**, ela será explanada mais adiante. Os arquivos de todas as estações de interesse precisam estar pareados. Isso significa que para uma estação em particular, o primeiro arquivo deve corresponder ao dia do evento, enquanto o segundo arquivo deve corresponder ao dia subsequente. É por este motivo que os arquivos de cada uma das estações na Figura 105a se referem aos dias 27 e 28 de fevereiro de 2010. O MAGNAMI permite a escolha simultânea de até 10 arquivos (5 pares de arquivos) e faz a validação dos mesmos para

Figura 104 – O MAGNAMI fornece um calendário para a escolha dos 5 dias geomagneticamente mais calmos do mês e ano de ocorrência de um evento. Eles são adicionados à lista dos dias calmos por meio do botão **Adicionar**, removidos com o botão **Remover** e armazenados com o botão **Aplicar**. Uma mensagem de aviso é emitida antes que os dias calmos sejam realmente aplicados. Por outro lado, uma mensagem de erro é emitida se o usuário tentar fornecer os arquivos das estações antes de aplicar os dias calmos.

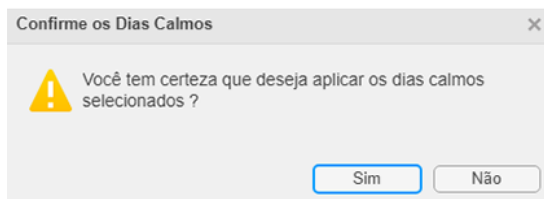
- (a) Calendário para a escolha dos 5 dias calmos do mês e ano de ocorrência do evento. Na parte superior, é possível escolher o ano e o mês, enquanto na parte inferior é possível escolher o dia.



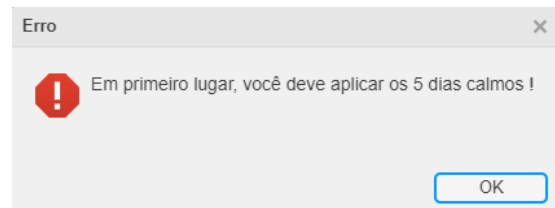
- (b) Lista com os 5 dias calmos referentes ao mês e ano de ocorrência do sismo do Chile de 2010. O usuário pode removê-los com o botão **Remover** ou aplicá-los com o botão **Aplicar**.



- (c) Mensagem de aviso para que o usuário se certifique que os dias calmos informados estão corretos.



- (d) Mensagem de erro caso o usuário tente fornecer os arquivos das estações antes de aplicar os 5 dias calmos.



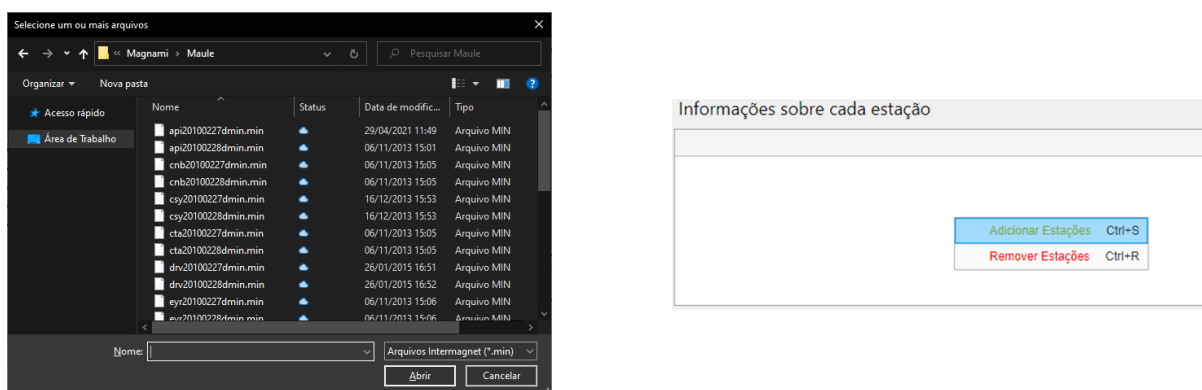
Fonte: O autor.

evitar que usuário tente violar essa regra.

Suponha que o usuário tenha fornecido ao MAGNAMI os arquivos com extensão `.min` das estações API, CSY, HUA, IPM e SIT. Então, o processo de leitura dos mesmos é iniciado. O andamento da leitura é indicado pela barra de progresso ilustrada na Figura 106a. Durante a leitura, o MAGNAMI realiza uma série de validações e armazena internamente o conteúdo dos arquivos caso nenhum erro ocorra. Com o término da leitura, a tabela **Informações sobre cada estação** é preenchida com os dados das estações contidos nos arquivos fornecidos (ver Figura 106b). Essa tabela é composta por 8 colunas, a saber: **Computar**, **Componente**, **Sq**, **Código IAGA**, **Nome da Estação**, **Fonte dos Dados**, **Latitude Geodésica** e **Longitude Geodésica**. O significado da coluna **Computar** será explanado mais adiante. As colunas **Componente** e **Sq** possuem caixas de seleção em suas células para que o usuário indique se os gráficos das componentes do campo geomagnético e de suas respectivas linhas de base **Sq** devem ser mostrados na parte superior do painel direito na Figura 102. As 5 colunas restantes possuem apenas informações sobre as estações dos arquivos fornecidos, tais como código IAGA, nome e localização.

Figura 105 – O MAGNAMI fornece uma caixa de diálogo para a seleção dos arquivos com extensão `.min` pertinentes às estações de interesse. A caixa de diálogo é aberta por meio do menu **Arquivo** > **Abrir** ou pela opção **Adicionar Estações** no menu suspenso da tabela **Informações sobre cada estação**.

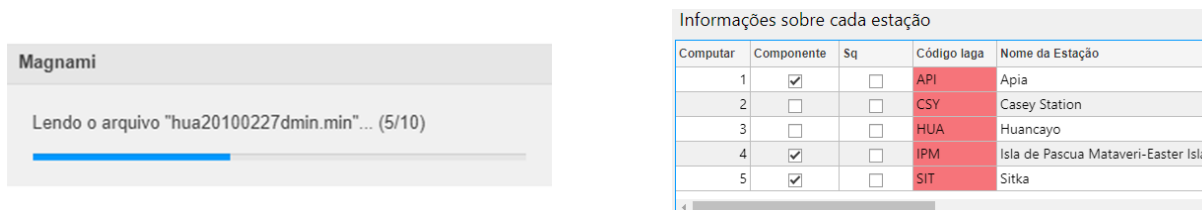
- (a) Caixa de diálogo para a escolha dos arquivos com extensão `.min` das estações de interesse. O MAGNAMI permite a escolha simultânea de até 10 arquivos.
- (b) Ao pressionar o botão direito do *mouse* na tabela, um menu suspenso com as opções de adição e remoção de estações é exibido ao usuário.



Fonte: O autor.

Figura 106 – Assim que o usuário fornece os arquivos com extensão `.min` ao MAGNAMI, o processo de leitura se inicia. Se a leitura for bem-sucedida, a tabela **Informações sobre cada estação** é preenchida com informações relativas às estações dos arquivos.

- (a) Barra de progresso indicando o andamento da leitura dos arquivos.
- (b) Tabela preenchida com as informações das estações.



Fonte: O autor.

A cor vermelha em uma célula da coluna **Código Iaga** serve para indicar que os arquivos relativos aos 5 dias calmos da estação em questão ainda não foram inseridos pelo usuário. A caixa de seleção correspondente na coluna **Sq** só pode ser marcada após o fornecimento dos mesmos. Para inseri-los, basta selecionar a célula em vermelho que contém o código IAGA da estação desejada. Suponha que seja a estação HUA. Então, uma caixa de diálogo será aberta para que os arquivos possam ser selecionados (ver Figura 107a). Os arquivos do diretório são filtrados para que eles correspondam apenas aos arquivos da estação selecionada. Os dias nesses arquivos devem coincidir com os dias calmos informados pelo usuário, caso contrário uma mensagem de erro será emitida pelo MAGNAMI (ver Figura 107b). Além disso, o número de arquivos inseridos tem que ser exatamente 5, pois de outro modo uma mensagem de erro semelhante também será emitida. Se a leitura dos

arquivos for bem-sucedida, então a cor da célula é alterada para verde e o usuário se torna apto a marcar a respectiva caixa de seleção na coluna **Sq**.

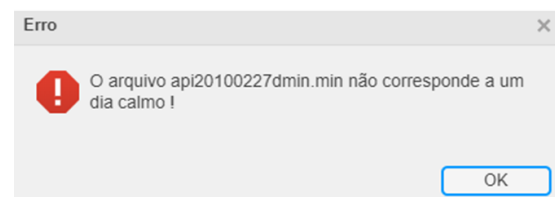
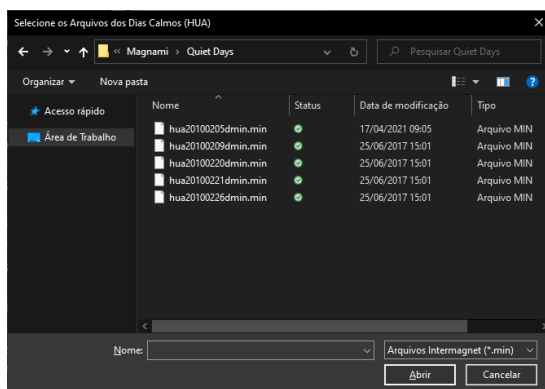
Por conta do limite de 5 estações simultâneas imposto pelo MAGNAMI, o usuário pode desejar remover uma ou mais estações a fim de adicionar outras. Esse procedimento pode ser feito por meio da opção **Remover Estações** no menu suspenso ilustrado na Figura 105b. Se o usuário escolher esta opção ou utilizar a combinação de teclas **[Ctrl] + [R]**, então a tela ilustrada na Figura 108 será exibida. Nessa tela, há uma lista com o código IAGA de todas as estações inseridas, onde é possível escolher uma ou mais estações para serem removidas. Feito isso, a tabela e os gráficos da tela principal serão atualizados.

Logo após a inserção dos dias calmos e das estações geomagnéticas, o usuário pode visualizar os gráficos dos elementos geomagnéticos, das respectivas linhas de base **Sq** e dos resíduos correspondentes para cada uma das estações. Para tanto, ele deve marcar as caixas de seleção referentes às estações desejadas nas células das colunas **Componente** e **Sq**. Procedendo desta forma, os gráficos poderão ser visualizados no painel direito da tela principal do MAGNAMI. As Figuras 109a e 109b ilustram os gráficos da componente **H**, da respectiva linha de base **Sq** e do resíduo associado para a estação **HUA**. O resíduo é gerado pela subtração da linha de base **Sq** do elemento geomagnético correspondente. O usuário pode alterar o gráfico do elemento geomagnético sendo exibido utilizando a caixa de combinação **Componente** ilustrada na Figura 110a, que contém os elementos geomagnéticos **X**, **Y**, **Z**, **H**, **F** e **D** como opções. Os gráficos abrangem o período de tempo de 1 dia (24h) a partir do horário de início do evento sendo analisado (06:34 UT para o sismo do Chile de 2010). Esse horário é configurado por meio da caixa de combinação

Figura 107 – Para cada uma das estações, o MAGNAMI permite que o usuário insira 5 arquivos relativos aos 5 dias calmos informados anteriormente. Isso é feito por meio de uma caixa de diálogo. Caso o dia de algum arquivo não corresponda a um dia calmo, o MAGNAMI emite uma mensagem de erro.

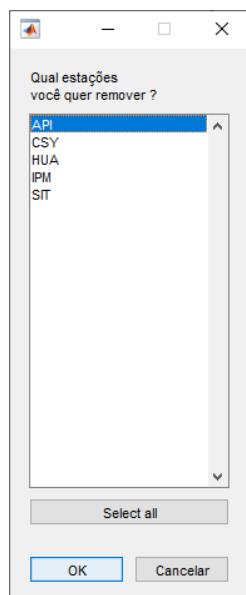
(a) Caixa de diálogo para a seleção dos 5 arquivos **.min** da estação **HUA** referentes aos 5 dias calmos.

(b) Mensagem de erro emitida ao usuário caso o dia associado a um arquivo não corresponda a um dia calmo.



Fonte: O autor.

Figura 108 – A tela ilustrada nesta figura permite que o usuário remova uma ou mais estações de forma simultânea. Elas são indicadas por meio de seus códigos IAGA em uma lista na qual múltiplos itens podem ser selecionados simultaneamente.



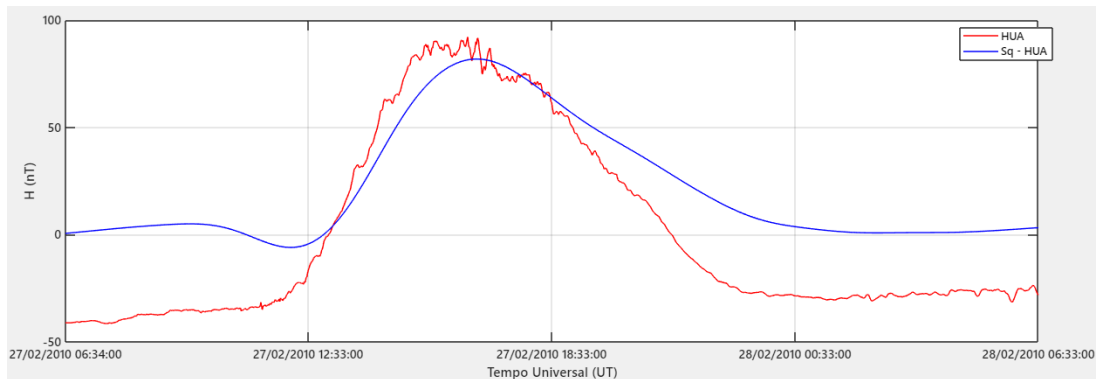
Fonte: O autor.

Início do Evento ilustrada na Figura 110b. Analogamente, o usuário pode alterar os horários inicial e final do gráfico do resíduo utilizando as caixas de combinação **Hora Inicial** e **Hora Final**, respectivamente. Elas contêm as 24 horas a partir do horário de início do evento em intervalos de 1 minuto (ver Figura 110c). Observe que a data também é indicada junto aos horários. Para que o gráfico do resíduo seja atualizado para abranger o período de tempo entre os novos horários inicial e final, o usuário deve pressionar o botão **Aplicar Intervalo**. Vale destacar que o horário inicial deve ser inferior ao horário final e que o intervalo de tempo entre eles deve ser de no mínimo 2 h. Se o usuário tentar violar essa restrição, então a mensagem de erro ilustrada na Figura 110d será emitida. O intervalo original de 24 horas pode ser restaurado por meio do botão **Resetar**. Suponha que os horários inicial e final sejam 12:33:00 e 18:33:00 UT, respectivamente. Então, ao pressionar o botão **Aplicar Intervalo** o gráfico ilustrado na Figura 109b assume a forma ilustrada na Figura 111.

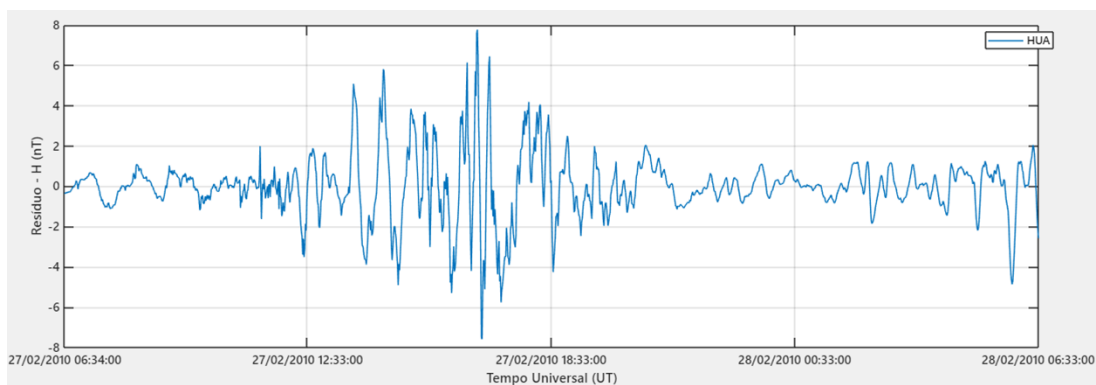
Posteriormente à visualização e configuração das séries temporais dos elementos geomagnéticos e dos respectivos resíduos, o usuário tem a liberdade de aplicar as metodologias matemáticas (CWT, EMD ou EWC) em cada uma delas. Para tanto, ele deve selecionar a metodologia desejada na caixa de combinação **Metodologia** e definir sobre que tipo de série temporal (componente ou resíduo) ela deverá ser aplicada na caixa de combinação **Onde Aplicar ?**. Veja as Figuras 112a e 112b, respectivamente. Em seguida, o usuário deve pressionar o botão **Computar**. Para ilustrar como esse recurso do MAGNAMI funciona, suponha que o usuário tenha selecionado as opções CWT e resíduo nas respectivas caixas

Figura 109 – Na tela principal do MAGNAMI, o usuário pode visualizar os gráficos dos elementos geomagnéticos, das respectivas linhas de base Sq e dos resíduos associados para cada uma das estações selecionadas.

(a) Ilustração dos gráficos da componente H e da respectiva linha de base Sq para a estação HUA.



(b) Ilustração do gráfico do resíduo da componente H para a estação HUA.



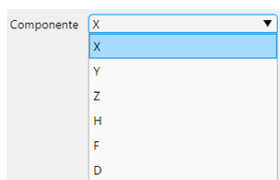
Fonte: O autor.

de combinação. Além disso, suponha também que as estações API, HUA e IPM tenham sido selecionadas na tabela **Informações sobre cada estação** e que a componente H tenha sido escolhida na caixa de combinação **Componente**. Assim sendo, o MAGNAMI mostrará os gráficos dos resíduos da componente H para cada uma dessas estações no intervalo de tempo entre os horários definidos em **Hora Inicial** e **Hora Final** (ver Figura 113a). Nesse cenário, se o usuário pressionar o botão **Computar**, então três periódogramas serão gerados pelo MAGNAMI, um para cada resíduo (ver Figura 113b). A ordem na qual os periódogramas aparecem pode ser alterada por intermédio da coluna **Computar**, cujas células são editáveis. Basta pressionar duas vezes sobre uma célula e digitar o número da posição desejada. Feito isso, o MAGNAMI atualizará automaticamente a ordem das estações na tabela a fim de que os novos periódogramas sejam mostrados respeitando a nova ordem.

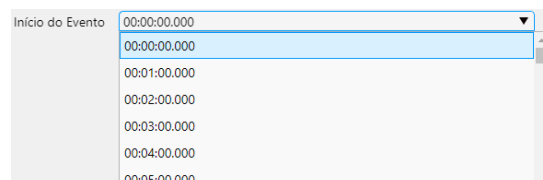
Para a CWT, os periódogramas são mostrados diretamente sem qualquer tipo de configuração prévia além da ordem em que eles aparecem. No entanto, para a EMD uma nova tela é exibida ao usuário para que ele configure de forma mais detalhada como os

Figura 110 – O MAGNAMI permite que o usuário altere o gráfico do elemento geomagnético por meio da caixa de combinação **Componente**, assim como o horário inicial desse gráfico por meio da caixa de combinação **Início do Evento**. Os horários inicial e final do gráfico do resíduo também podem ser alterados, mas por intermédio das caixas de combinação **Hora Inicial** e **Hora Final**. O intervalo de tempo entre esses horários deve ser de no mínimo 2 h.

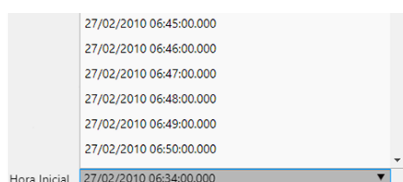
(a) Caixa de combinação **Componente** para definir o elemento geomagnético que será exibido.



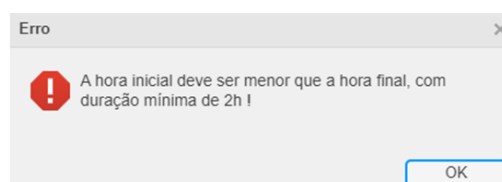
(b) Caixa de combinação **Início do Evento** para definir o horário de início do evento analisado.



(c) Caixa de combinação **Hora Inicial** para definir o horário de início do gráfico do resíduo.



(d) Mensagem de erro exibida caso o intervalo de tempo entre os horários inicial e final do resíduo seja inferior a 2 horas.

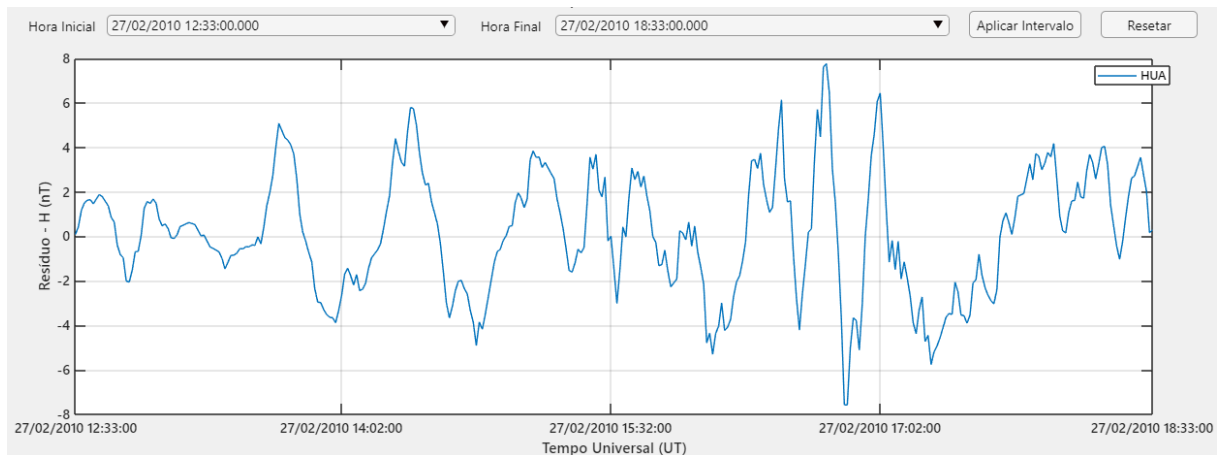


Fonte: O autor.

gráficos devem aparecer. A tela pode estar no modo componente ou no modo resíduo, a depender da opção escolhida em **Onde Aplicar ?**. As Figuras 114a e 114b ilustram essa tela para ambas as situações. Para entender o funcionamento dessa tela, considere que ela esteja no modo resíduo. Vale destacar que essa tela atua sobre um único resíduo por vez. A caixa de combinação **Código Iaga** especifica de qual estação é o resíduo, enquanto o rótulo **Componente** indica o elemento geomagnético que o resíduo está associado. Os rótulos **Data e Hora Inicial** e **Data e Hora Final** indicam os horários inicial e final do gráfico do resíduo. Se o usuário alterar qualquer informação contida nos elementos gráficos dessa tela, estes serão atualizados automaticamente pelo MAGNAMI. Para efetuar a EMD sobre o resíduo selecionado, o usuário deve pressionar o botão **Construir IMFs**. Assim, as IMFs serão geradas e a caixa de lista **Mostrar as IMFs selecionadas** populada (ver Figura 114b). Nessa lista, o usuário é capaz de especificar quais IMFs devem ser mostradas nos gráficos a serem gerados. Por fim, a tela também contém as caixas de seleção **Mostrar Sinal**, **Mostrar Residual** e **Mostrar Soma**. Elas permitem que o usuário determine se os gráficos do resíduo selecionado, do residual obtido da EMD e da soma das IMFs selecionadas, devem ser mostrados na tela que será aberta ao pressionar o botão **Plotar**. A Figura 115 ilustra os gráficos relativos à EMD do resíduo da componente *H* para a estação HUA. A descrição da tela no modo componente é análoga a do modo resíduo.

O cômputo do índice EWC exige uma configuração prévia assim como a aplicação

Figura 111 – Resíduo da componente H para a estação HUA no intervalo de tempo entre os horários 12:33:00 e 18:33:00 UT especificados em Hora Inicial e Hora Final, respectivamente.



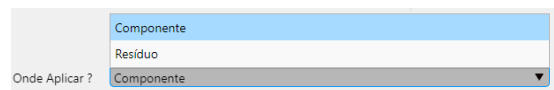
Fonte: O autor.

Figura 112 – Nas caixas de combinação Metodologia e Onde Aplicar ?, o usuário especifica, respectivamente, a metodologia matemática (CWT, EMD ou EWC) que deseja utilizar e onde ela deverá ser aplicada (componente ou resíduo).

(a) Caixa de combinação Metodologia.



(b) Caixa de combinação Onde Aplicar ?.

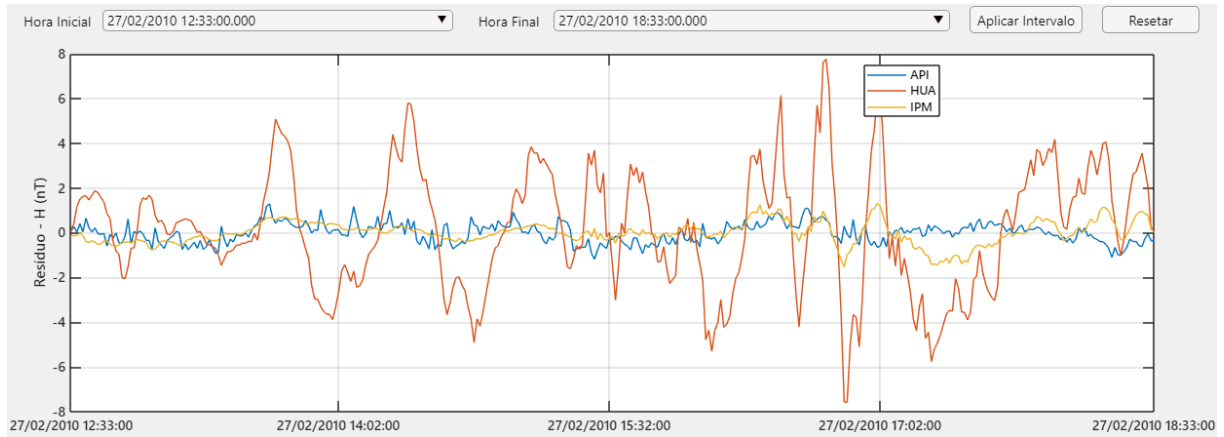


Fonte: O autor.

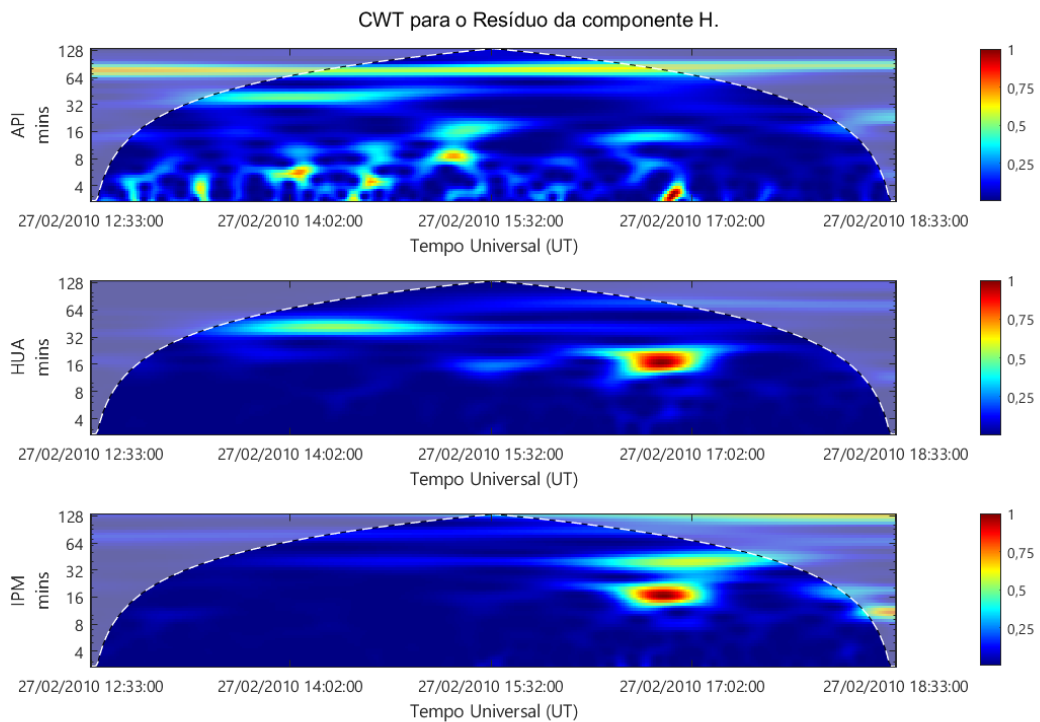
da EMD. A tela referente ao índice EWC apresenta um aspecto bastante semelhante ao da tela relativa à EMD. Ela também opera em dois modos (componente e resíduo) e exibe alguns elementos gráficos em comum. Veja as Figuras 116a e 116b. Apesar disso, nesse caso tem-se os grupos de botões de opção **Computar** e **Escolha uma Resolução**, bem como a caixa de combinação **Escolha uma Wavelet**. O grupo **Computar** têm as opções **Todas** e **Apenas uma**, que definem, respectivamente, se o cômputo do índice EWC deve ser feito para o resíduo ou componente de todas as estações selecionadas ou apenas da estação indicada na caixa de combinação **Código Iaga**. O grupo **Escolha uma Resolução** têm as opções **Baixa** e **Alta**, que especificam, respectivamente, se o índice EWC deve ser calculado a cada 1 hora ou a cada 8 minutos. O cálculo é feito no intervalo de tempo entre os horários indicados nos rótulos **Data e Hora Inicial** e **Data e Hora Final**. Por fim, a caixa de combinação **Escolha uma Wavelet** serve para especificar a *wavelet* utilizada no cálculo do índice EWC. Há 4 opções, a saber: **db1**, **db2**, **db3** e **db4**. Com as devidas configurações realizadas, o usuário deve pressionar o botão **Plotar** para gerar os gráficos de barras dos índices EWC relativos aos resíduos (ou componentes) selecionados utilizando a resolução e *wavelet* indicadas (ver Figura 117).

Figura 113 – O MAGNAMI gera os periódogramas relativos aos resíduos de um elemento geomagnético para cada uma das estações selecionadas na tabela. Em vez dos resíduos, o mesmo pode ser feito para os elementos geomagnéticos.

- (a) Gráficos dos resíduos da componente H para as estações API, HUA e IPM. O intervalo de tempo dos gráficos está entre os horários estipulados em Hora Inicial e Hora Final. Nesse caso, os horários são 12:33:00 e 18:33:00 UT, respectivamente.



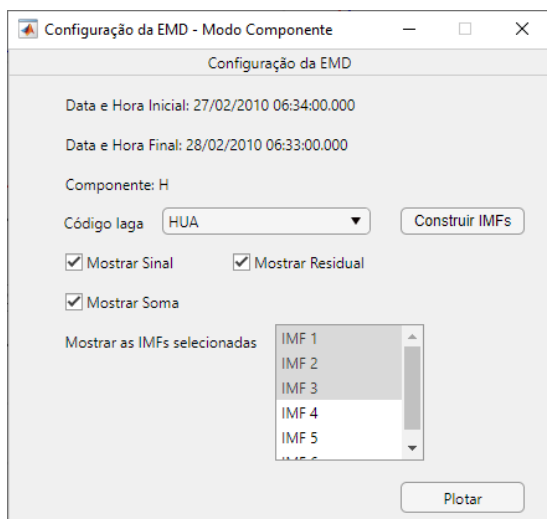
- (b) Periódogramas dos resíduos ilustrados na Figura 113a.



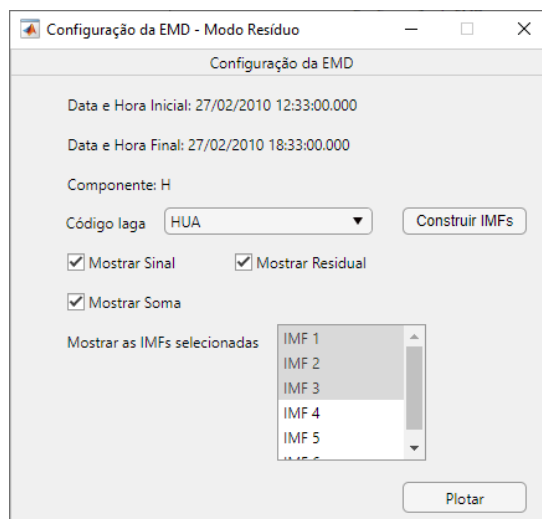
Fonte: O autor.

Figura 114 – A aplicação da EMD nos elementos geomagnéticos e respectivos resíduos exige uma configuração prévia mais aprofundada. O MAGNAMI dispõe de uma tela para que o usuário realize essa configuração. Ela pode operar nos modos componente e resíduo.

(a) Tela para a configuração da EMD em modo componente.



(b) Tela para a configuração da EMD em modo resíduo.



Fonte: O autor.

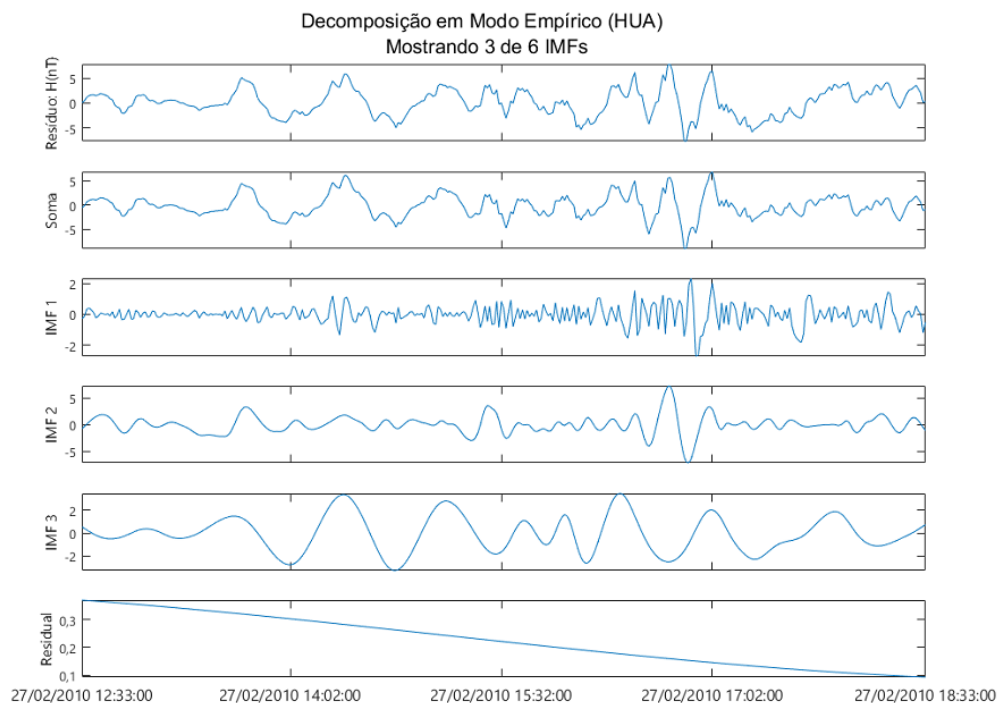
10.2 Aplicação do Programa

A fim de validar a capacidade do MAGNAMI em identificar variações geomagnéticas induzidas por tsunamis, foram consideradas as séries temporais das componentes H e Z do campo geomagnético, oriundas de 13 observatórios geomagnéticos espalhados pelo Oceano Pacífico, nas 24 h a partir do início do sismo tsunamigênico do Chile de 2010. O sismo ocorreu em 27 de fevereiro de 2010 ao longo da costa da região de Maule às 06:34 UT. A Tabela 7 lista todos os observatórios, os quais estão ordenados de acordo com suas respectivas distâncias epicentrais. A hora de chegada do tsunami em cada observatório é indicada na coluna “Hora de Chegada (UT)”. Considerando as séries temporais obtidas por esses observatórios no período indicado, a ideia era comparar as saídas produzidas pelo MAGNAMI com os resultados obtidos por Klausner et al. (2021). Estes últimos³ aplicaram 4 métodos espaço-temporais para a detecção das variações geomagnéticas induzidas pelo tsunami de Maule de 2010 nas componentes H e Z para os mesmos observatórios indicados na Tabela 7. Dentre os métodos utilizados, três deles estão implementados no MAGNAMI, a saber: CWT, EMD e EWC. Assim, a comparação é feita tendo como referência as linhas de base Sq (e os respectivos resíduos), os periodogramas obtidos com a CWT, as IMFs obtidas com a EMD e, por fim, os índices EWC obtidos com a DWT. Devido ao excesso de imagens, todas as saídas produzidas pelo MAGNAMI encontram-se no apêndice B.

Para um dado observatório, tem-se uma linha de base Sq para cada uma das

³ A propósito, o autor deste texto também é um dos autores do artigo.

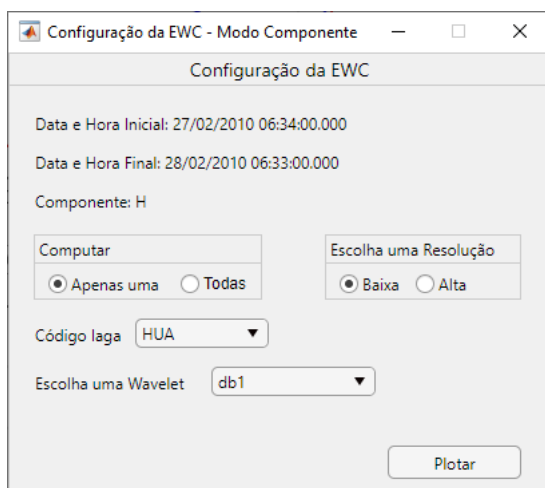
Figura 115 – Ilustração dos gráficos da EMD do resíduo da componente H associado à estação HUA no intervalo de tempo entre 12:33:00 e 18:33:00 UT. Especificamente, tem-se o gráfico do resíduo, de suas três primeiras IMFs, da soma dessas IMFs e do residual obtido com a EMD.



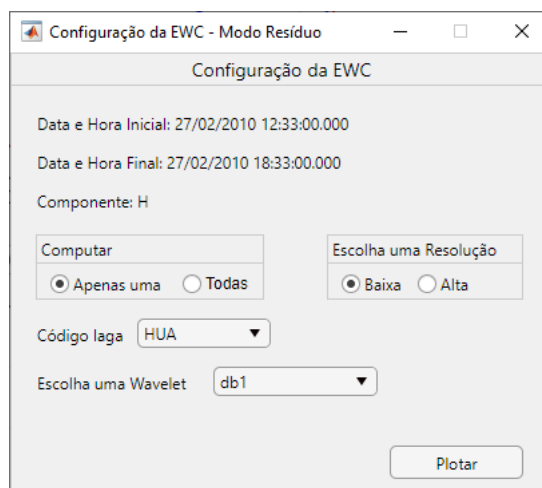
Fonte: O autor.

Figura 116 – O cômputo dos índices EWC relativos aos elementos geomagnéticos e seus respectivos resíduos também exige uma configuração prévia. O MAGNAMI dispõe de uma tela para isso, que opera nos modos componente e resíduo.

(a) Tela para a configuração do índice EWC em modo componente.

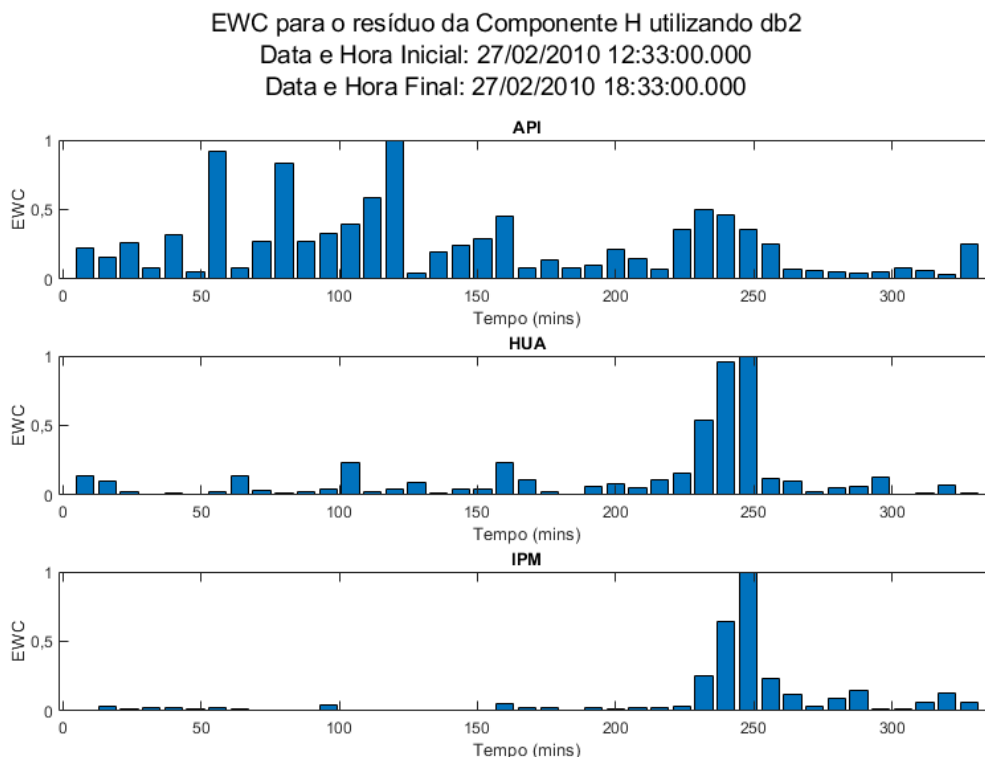


(b) Tela para a configuração do índice EWC em modo resíduo.



Fonte: O autor.

Figura 117 – Ilustração dos gráficos de barras dos índices EWC referentes aos resíduos da componente H para as estações API, HUA e IPM. Os gráficos compreendem o intervalo de tempo entre 12:33:00 e 18:33:00 UT, e os índices foram calculados em alta resolução utilizando a *wavelet db2*.



Fonte: O autor.

componentes do campo geomagnético. Elas são calculadas mensalmente a partir das séries temporais de suas respectivas componentes nos 5 dias geomagneticamente mais calmos do mês de interesse (CAMPBELL, 1989). Neste trabalho, as linhas de base S_q são subtraídas das séries temporais para gerar um resíduo que enfatize as variações geomagnéticas induzidas pelo tsunami (KLAUSNER et al., 2021). Para o evento tratado, o mês é fevereiro (de 2010) e as componentes de interesse são as componentes H e Z . Os 5 dias geomagneticamente mais calmos desse mês são: 5, 9, 20, 21 e 26. As Figuras 118a e 118b ilustram, respectivamente, os gráficos das linhas de base S_q e de seus respectivos resíduos obtidos pelo MAGNAMI e por Klausner et al. (2021) para a componente Z (HUA). Os gráficos começam às 06:34UT e possuem duração de 24 h. O MAGNAMI utiliza a SSA para a obtenção de uma curva suave para a linha de base S_q , enquanto Klausner et al. (2021) utilizam um ajuste polinomial. Apesar disso, é evidente a semelhança entre as linhas de base S_q e, conseqüentemente, dos resíduos. De acordo com a Tabela 7, o tsunami chega ao observatório HUA às 10:34 UT. Antes disso, nota-se variações pequenas nos resíduos. Poucas horas depois, tem-se uma amplificação considerável das variações na forma de N-invertido em ambos os resíduos. As Figuras 119a e 119b também fazem um

Tabela 7 – Lista dos observatórios geomagnéticos utilizados para identificar as variações geomagnéticas induzidas pelo tsunami causado pelo sismo do Chile de 2010.

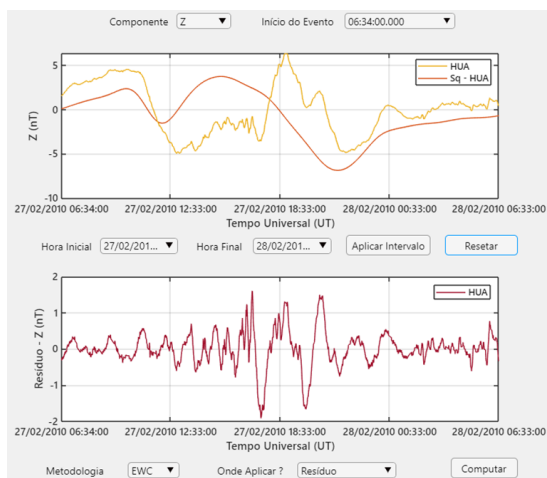
| Observatório Geomagnético | Código IAGA | Distância Epicentral (km) | Data | Hora de Chegada (UT) |
|---------------------------|-------------|---------------------------|-----------------|----------------------|
| Huancayo | HUA | 2658,96 | 27 de Fevereiro | 10:34 |
| Easter Island | IPM | 3586,16 | 27 de Fevereiro | 11:34 |
| Scott Base | SBA | 6774,95 | 27 de Fevereiro | 15:36 |
| Pamatai | PPT | 7712,84 | 27 de Fevereiro | 17:33 |
| Dumont d'Urville | DRV | 8281,12 | 27 de Fevereiro | 18:34 |
| Macquarie Island | MCQ | 8823,28 | 27 de Fevereiro | 19:34 |
| Eyrewell | EYR | 9013,74 | 27 de Fevereiro | 19:34 |
| Apia | API | 9907,42 | 27 de Fevereiro | 19:48 |
| Honolulu | HON | 10 971,27 | 27 de Fevereiro | 21:34 |
| Canberra | CNB | 10 981,86 | 27 de Fevereiro | 21:34 |
| Sitka | SIT | 11 873,41 | 28 de Fevereiro | 00:30 |
| Charters Towers | CTA | 12 561,17 | 28 de Fevereiro | 01:04 |
| Shumagin | SHU | 13 078,56 | 28 de Fevereiro | 01:30 |

Fonte: Adaptado de Klausner et al. (2021).

comparativo, mas agora para a componente H (HUA).

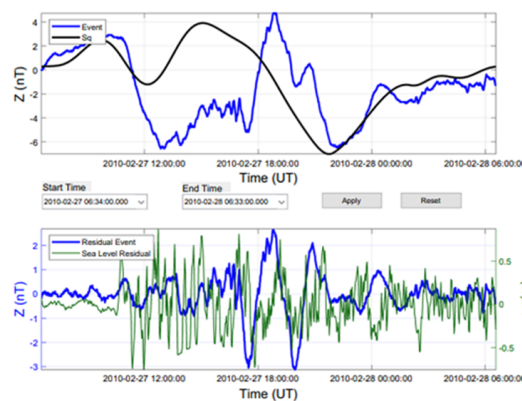
Figura 118 – Comparação dos gráficos das linhas de base S_q (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente Z (HUA). A curva em verde denota o resíduo obtido com dados do nível do mar, mas esse recurso ainda não está disponível na versão atual do MAGNAMI.

(a) MAGNAMI.



Fonte: O autor.

(b) Klausner et al. (2021).

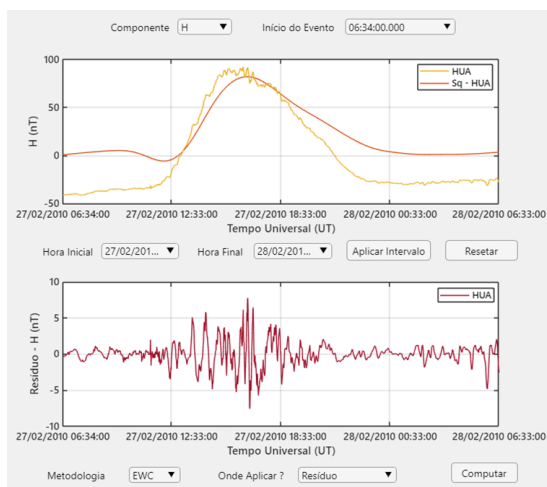


Fonte: Klausner et al. (2021).

O próximo comparativo diz respeito aos periodogramas obtidos aplicando a CWT sobre os resíduos gerados com a subtração das linhas de base S_q . A CWT é empregada para a localização temporal de periodicidades (ou frequências) características de um determinado fenômeno nas séries temporais em que ele se manifesta. Dessa forma, Klausner et al. (2021) aplicaram a CWT nos resíduos das componentes Z e H dos observatórios listados na Tabela 7 a fim de identificar as periodicidades de pequenas variações geomagnéticas induzidas pelo tsunami. Como descrito no artigo, essas variações são provocadas por correntes elétricas oriundas de duas fontes, a saber: correntes elétricas ionosféricas produzidas pelas

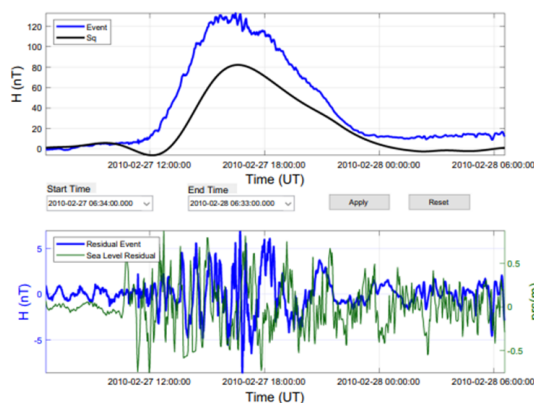
Figura 119 – Comparação dos gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente H (HUA).

(a) MAGNAMI.



Fonte: O autor.

(b) Klausner et al. (2021).



Fonte: Klausner et al. (2021).

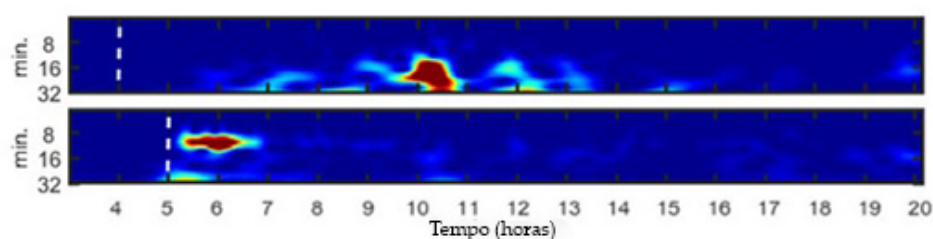
GWs/AGWs oriundas do tsunami (acoplamento TAI) e correntes elétricas produzidas pelo mecanismo de indução por movimento (movimento das águas oceânicas através do campo geomagnético). Assim, eles enfatizaram o intervalo de períodos entre 8 e 32 min, pois ele está relacionado com frentes de onda se propagando na atmosfera e com o acoplamento TAI. As Figuras 120 e 121 ilustram, respectivamente, os períodos obtidos aplicando a CWT nos resíduos das componentes Z e H (HUA e IPM). Para o observatório HUA, ambos os períodos (Figuras 120a e 120b) mostram a presença de periodicidades entre 16 e 32 min cerca de 10 h após o início do evento ou 6 h após a chegada no observatório. Para o observatório IPM, ambos os períodos (Figuras 120a e 120c) mostram periodicidades entre 8 e 16 min cerca de 6 h após o início do evento ou ~ 1 h após a chegada do tsunami. Uma análise semelhante dos períodos relativos ao resíduo da componente H na Figura 121 também permite concluir que eles são condizentes.

A detecção de variações geomagnéticas também pode ser realizada utilizando a DWT na forma dos índices EWC. Klausner et al. (2016) mostraram que estes índices aumentam de valor na presença de variações geomagnéticas induzidas por tsunamis. De fato, a Figura 122a ilustra os índices EWC para os resíduos da componente Z (HUA e IPM) computados utilizando a *wavelet* db2. No primeiro caso (HUA), os índices apresentam um aumento cerca de 10 h após o início do evento, o que está consistente com o período correspondente na Figura 120a. Esse aumento também aparece nos índices EWC gerados pelo MAGNAMI após 600 min = 10 h do início do evento, conforme Figura 122b. Para o segundo caso (IPM), os índices aumentam após 6 h a partir do início do evento. Novamente, isso também é indicado nos índices EWC gerados pelo MAGNAMI pouco antes dos 400 min (ver Figura 122c). Por meio da Figura 123, chega-se na mesma conclusão

para os resíduos da componente H . Em verdade, os índices EWC do MAGNAMI estão mais localizados e aumentam de valor praticamente nos mesmos intervalos de tempo indicados nos periógramas correspondentes.

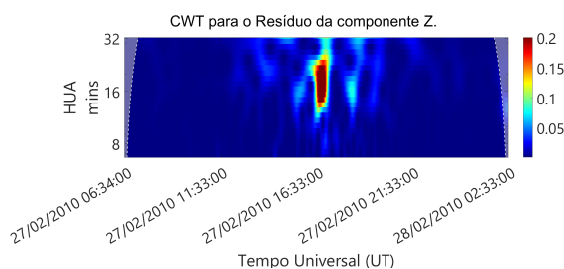
Figura 120 – Comparação dos periógramas dos resíduos da componente Z (HUA E IPM). A linha branca tracejada indica a hora de chegada do tsunami no observatório: após 4 h em HUA e após 5 h em IPM. Os periógramas compreendem as 20 h após o início do sismo (06:34 UT).

(a) Klausner et al. (2021): HUA (superior) e IPM (inferior).



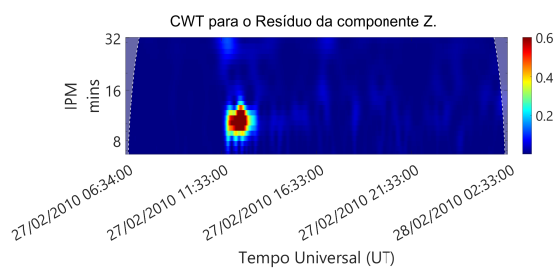
Fonte: Adaptado de Klausner et al. (2021).

(b) MAGNAMI: HUA.



Fonte: O autor.

(c) MAGNAMI: IPM.

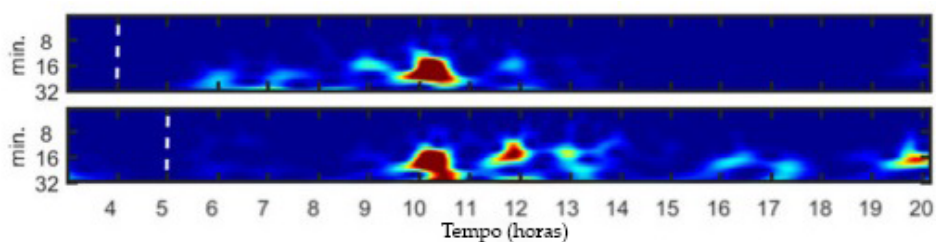


Fonte: O autor.

A fim de procurar pelas variações geomagnéticas em N-invertido relacionadas com a chegada do tsunami em cada observatório geomagnético, Klausner et al. (2021) construíram um diagrama de tempo de viagem do tsunami (TTT, do inglês *Tsunami Travel Time*) utilizando as IMFs dos resíduos das componentes Z e H de todos os observatórios (ver Figura 124). Em particular, na IMF do resíduo da componente Z (IPM) é possível observar nitidamente uma variação em N-invertido cerca de 5 h após o início evento. A Figura 125a ilustra essencialmente a mesma variação para o mesmo intervalo de tempo, mas agora para a soma da segunda e terceira IMFs do resíduo da componente Z (IPM) obtidas com o MAGNAMI. Analogamente, na Figura 124 também é possível observar uma variação em N-invertido na IMF do resíduo da componente H (EYR) cerca de 10 h após o início do evento. A variação também foi observada na saída produzida pelo MAGNAMI, porém houve a necessidade de somar três IMFs (terceira, quarta e quinta) do resíduo da componente H (EYR) para que a variação ficasse evidente (ver Figura 125b).

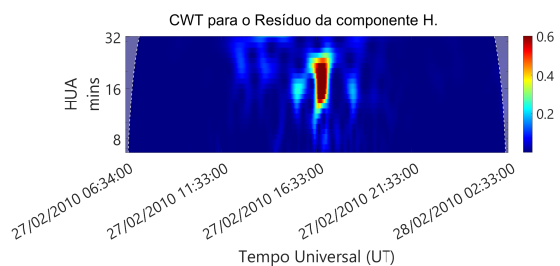
Figura 121 – Comparação dos periódogramas dos resíduos da componente H (HUA e IPM).

(a) Klausner et al. (2021): HUA (superior) e IPM (inferior).



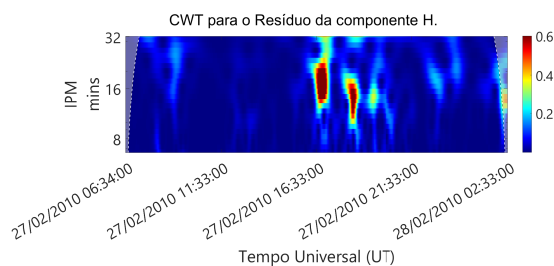
Fonte: Adaptado de Klausner et al. (2021).

(b) MAGNAMI: HUA.



Fonte: O autor.

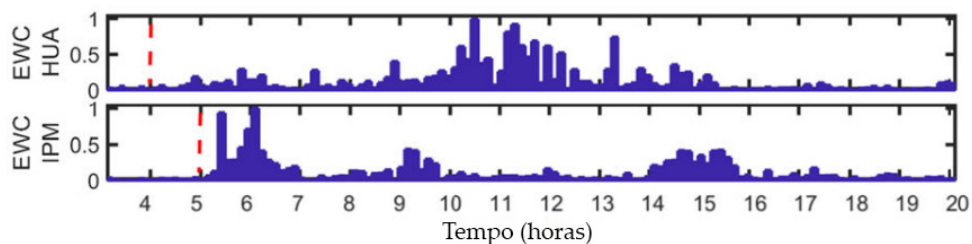
(c) MAGNAMI: IPM.



Fonte: O autor.

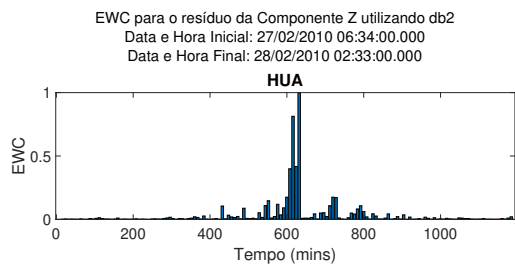
Figura 122 – Comparação dos índices EWC para os resíduos da componente Z (HUA e IPM). A linha vermelha tracejada indica a hora de chegada do tsunami no observatório.

(a) Klausner et al. (2021): HUA (superior) e IPM (inferior).



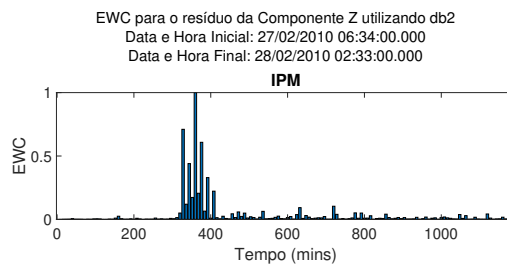
Fonte: Adaptado de Klausner et al. (2021).

(b) MAGNAMI: HUA.



Fonte: O autor.

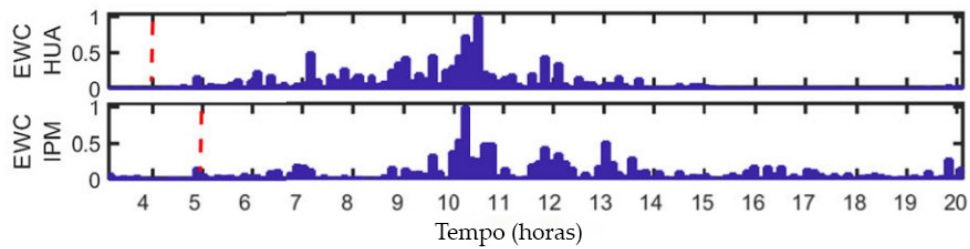
(c) MAGNAMI: IPM.



Fonte: O autor.

Figura 123 – Comparação dos índices EWC para os resíduos da componente H (HUA e IPM).

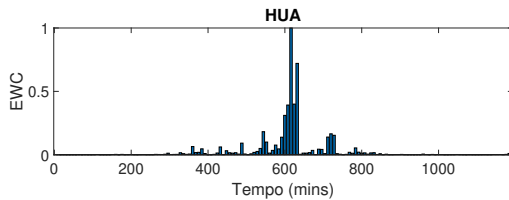
(a) Klausner et al. (2021): HUA (superior) e IPM (inferior).



Fonte: Adaptado de Klausner et al. (2021).

(b) MAGNAMI: HUA.

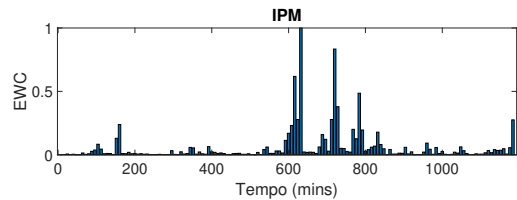
EWC para o resíduo da Componente H utilizando db2
Data e Hora Inicial: 27/02/2010 06:34:00.000
Data e Hora Final: 28/02/2010 02:33:00.000



Fonte: O autor.

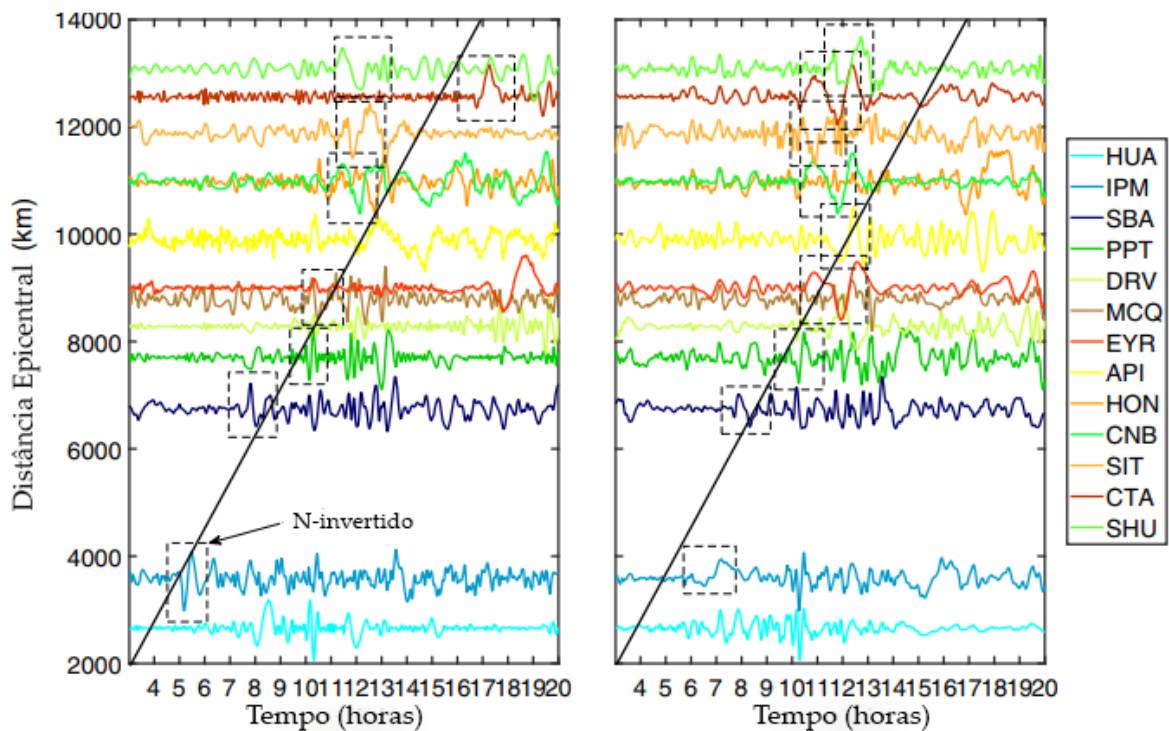
(c) MAGNAMI: IPM.

EWC para o resíduo da Componente H utilizando db2
Data e Hora Inicial: 27/02/2010 06:34:00.000
Data e Hora Final: 28/02/2010 02:33:00.000



Fonte: O autor.

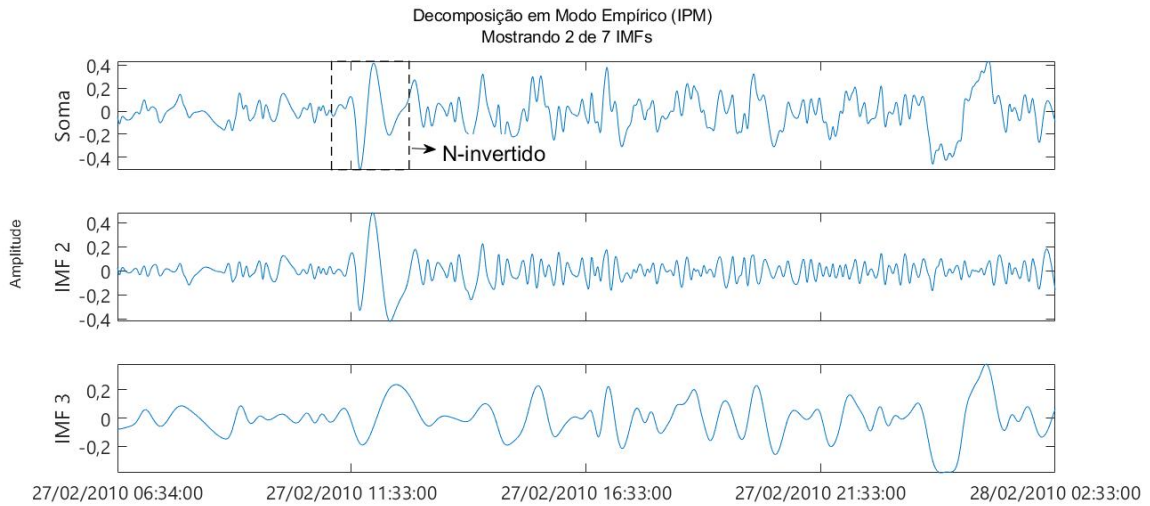
Figura 124 – O diagrama TTT à esquerda contém as IMFs obtidas dos resíduos da componente Z de todos os observatórios, enquanto o diagrama TTT da direita contém as IMFs relacionadas aos resíduos da componente H . O eixo vertical é a distância entre o epicentro e o observatório. O eixo horizontal é o tempo em horas a partir do início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam as variações em N-invertido.



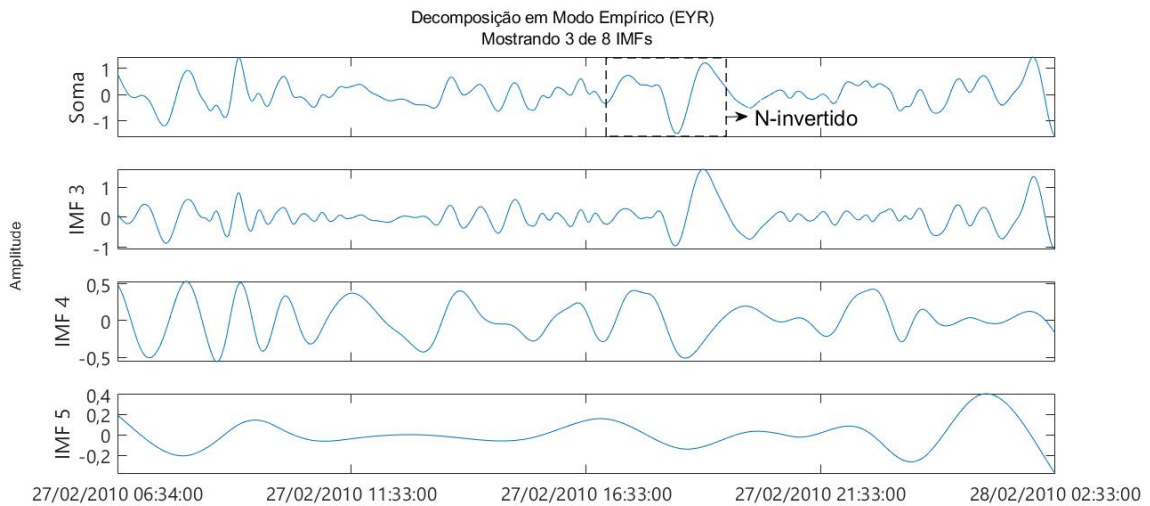
Fonte: Adaptado de Klausner et al. (2021).

Figura 125 – Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos das componentes Z e H (IPM e EYR). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido.

- (a) Gráficos da segunda e terceira IMFs, bem como da soma, associadas ao resíduo da componente Z (IPM).



- (b) Gráficos da terceira, quarta e quinta IMFs, bem como da soma, associadas ao resíduo da componente H (EYR).



11 TESSA

O Tessa é um *software* com interface gráfica amigável escrito em Python, cujo objetivo é gerar mapas de TEC para a identificação de TIDs causados por terremotos tsunamigênicos. Nesta discussão, um mapa de TEC se refere a um vídeo com extensão `.mp4` que retrata a variação dos valores de TEC ao longo de um intervalo de tempo especificado pelo usuário. O intervalo de tempo deve ser especificado tanto no dia do terremoto quanto no dia subsequente (quando aplicável). O Tessa utiliza a SSA para a remoção da tendência dos dados de TEC. O presente capítulo está redigido da seguinte forma. A seção 11.1 mostra como obter os arquivos com os dados de TEC requeridos pelo Tessa, enquanto a seção 11.2 mostra como ele deve ser utilizado para gerar os mapas de TEC.

11.1 Obtenção dos arquivos

O primeiro passo para a obtenção dos dados de TEC consiste em obter os dados GPS coletados por receptores GPS nas estações de interesse do usuário. Essas estações devem pertencer aos países que o Tessa está apto a trabalhar. Os fabricantes de receptores GPS possuem seus próprios formatos proprietários para o armazenamento de dados GPS. Esses formatos são principalmente binários para economizar espaço de armazenamento e, portanto, não são diretamente legíveis quando exibidos (EL-RABBANY, 2002). Dessa forma, dados oriundos de diferentes receptores GPS não podem ser combinados para serem processados de forma conjunta. Em 1989, a fim de promover o intercâmbio de dados GPS, Gurtner, Mader e MacArthur (1989) introduziram um formato de arquivo de dados, internacionalmente aceito, que independe do fabricante e do modelo do receptor. O formato é chamado de RINEX (do inglês *Receiver Independent Exchange Format*). Ele vem sendo atualizado constantemente desde sua introdução e apresenta diversas versões (HOFMANN-WELLENHOF; LICHTENEGGER; COLLINS, 2001). A segunda versão foi publicada por Gurtner e Estey (1990). Em 1997, algumas mudanças foram adotadas e o formato estendido para incluir dados GLONASS. Uma descrição detalhada da terceira versão pode ser encontrada em Gurtner e Estey (2007).

O formato RINEX é composto por vários tipos diferentes de arquivo a depender de sua versão. Dentre eles, destacam-se três arquivos em ASCII (do inglês *American Standard Code for Information Interchange*), a saber: arquivo de observação, arquivo de mensagem de navegação e arquivo meteorológico. Cada um deles é composto por uma seção de cabeçalho e uma seção de dados (HOFMANN-WELLENHOF; LICHTENEGGER; COLLINS, 2001). A seção de cabeçalho contém informações genéricas sobre o arquivo, enquanto a seção de dados contém os dados propriamente ditos. Um arquivo de observação é composto por diversas informações, tais como o nome da estação, suas coordenadas













aproximadas e detalhes técnicos da antena (EL-RABBANY, 2002). Por conseguinte, um arquivo de mensagem de navegação contém, junto com outras informações, as coordenadas dos satélites em função do tempo e dados atmosféricos. Por fim, um arquivo meteorológico contém informações de temperatura, pressão e umidade. Tanto o arquivo de observação quanto o meteorológico se referem a uma estação e a uma sessão de observação. Os arquivos em formato RINEX são nomeados de acordo com a convenção “ssssdddf.yyt”. Os quatro primeiros caracteres (ssss) representam o nome da estação, os três caracteres seguintes (ddd) indicam o dia do ano e o oitavo caractere (f) representa o número de sequência do arquivo dentro do dia. Os dois primeiros caracteres na extensão (yy) denotam os dois últimos dígitos do ano corrente, enquanto o tipo de arquivo (t) é indicado pelo último caractere. O tipo de arquivo pode assumir vários símbolos, entre os quais: “o” para o arquivo de observação, “n” para o arquivo de mensagem de navegação e “m” para o arquivo meteorológico.

No endereço [Lista de Provedores RINEX](#), é possível encontrar uma lista com os endereços de diversos provedores de dados GPS em formato RINEX coletados por estações de vários países. Na maioria dos casos, os arquivos devem ser baixados utilizando um cliente FTP (do inglês *File Transfer Protocol*), tais como [WinSCP](#) e [FileZilla](#). Em outras, é possível o utilizar o próprio navegador. Para ilustrar a obtenção dos dados, suponha que sejam necessários dados GPS da data 16/09/2015 (dia 259 do ano) relativos às estações da RBMC (Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo dos Sistemas GNSS) mantidas pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). Os dados são disponibilizados pelo IBGE no endereço [Dados RBMC](#). Neste endereço, há uma lista de pastas cujos nomes correspondem aos anos entre 2010 e 2022 (ver Figura 126a). Como o ano de interesse é 2015, basta selecionar a pasta correspondente. No interior desta, há uma pasta para cada dia do ano (ver Figura 126b). Ao selecionar a pasta 259, obtém-se uma lista de arquivos compactados em formato .zip classificados em ordem alfabética, um para cada estação (ver Figura 126c). A descompactação dos arquivos pode ser feita por meio dos programas [WinRar](#) e [WinZip](#). Ao descompactar um arquivo, tal como o arquivo `alar2591.zip` ilustrado na Figura 126c, obtém-se os arquivos de observação `alar2591.15o`, de mensagem de navegação `alar2591.15n` e o meteorológico `alar2591.15m` (ver Figura 126d). Um procedimento análogo deve ser feito para obter os arquivos em formato RINEX de estações em outros países. Por exemplo, a UNAVCO (do inglês *University NAVSTAR Consortium*) é um consórcio internacional de instituições de ensino sem fins lucrativos que promove e apoia estudos em geociência utilizando geodésia. Ela fornece dados GPS de estações ao redor do mundo no endereço [Dados UNAVCO](#).













Após a obtenção dos arquivos em formato RINEX, eles devem ser processados utilizando o programa de análise GPS-TEC desenvolvido pelo Dr. Gopi K. Seemala em *Boston College* a fim de obter os dados de TEC (SEEMALA; VALLADARES, 2011; ELMUNIM; ABDULLAH, 2021). O programa é disponibilizado no endereço [GPS-TEC](#),

Figura 126 – O IBGE disponibiliza dados GPS em formato RINEX das estações da RBMC no endereço [Dados RBMC](#). Neste endereço, é preciso escolher a pasta referente ao ano desejado, o dia do ano e os arquivos em formato `.zip` das estações de interesse.













(a) Lista de pastas referente aos anos entre 2010 e 2022.

| | |
|---|------------------|
|  2010/ | 2016-06-02 15:47 |
|  2011/ | 2012-01-04 12:43 |
|  2012/ | 2013-01-01 06:51 |
|  2013/ | 2014-01-01 06:56 |
|  2014/ | 2015-01-01 06:54 |
|  2015/ | 2016-01-01 05:31 |
|  2016/ | 2017-01-01 05:32 |
|  2017/ | 2018-01-01 05:42 |
|  2018/ | 2019-01-01 05:43 |
|  2019/ | 2020-01-01 04:40 |
|  2020/ | 2021-01-01 04:40 |
|  2021/ | 2021-06-30 04:40 |




(b) Na pasta de um dado ano, há uma pasta para cada dia do ano.

| | |
|--|------------------|
|  250/ | 2016-06-29 14:19 |
|  251/ | 2016-06-29 14:19 |
|  252/ | 2016-06-29 14:19 |
|  253/ | 2016-06-29 14:19 |
|  254/ | 2016-06-29 14:19 |
|  255/ | 2016-06-29 14:19 |
|  256/ | 2016-06-29 14:19 |
|  257/ | 2016-06-29 14:19 |
|  258/ | 2016-06-29 14:19 |
|  259/ | 2016-06-29 14:19 |
|  260/ | 2016-06-29 14:19 |
|  261/ | 2016-06-29 14:19 |

(c) Na pasta de um dia, tem-se os arquivos em formato RINEX de cada estação.

| | |
|--|-----------------------|
|  alar2591.zip | 2016-06-02 07:06 1.7M |
|  amco2591.zip | 2016-06-02 07:06 2.6M |
|  amha2591.zip | 2015-12-16 17:41 2.9M |
|  ammu2591.zip | 2015-12-16 18:06 2.4M |
|  ampr2591.zip | 2016-06-02 07:06 2.5M |
|  amta2591.zip | 2015-12-16 18:03 2.8M |
|  amte2591.zip | 2016-06-02 07:06 2.3M |
|  amua2591.zip | 2016-06-02 07:06 2.9M |
|  aplj2591.zip | 2016-06-02 07:06 2.8M |
|  apsa2591.zip | 2016-06-02 07:06 2.9M |
|  babr2591.zip | 2016-06-02 07:06 2.6M |
|  bail2591.zip | 2016-06-02 07:06 2.8M |

(d) Os arquivos em formato RINEX referentes a uma estação da RBMC encontram-se compactados em formato `.zip`. A presente figura ilustra o conteúdo do arquivo `alar2591.zip`, onde é possível identificar os arquivos de observação (`.15o`), de mensagem de navegação (`.15n`) e meteorológico (`.15m`).

| Nome | Data de modificação | Tipo | Tamanho |
|---|---------------------|-------------|----------|
|  <code>alar2591.15m</code> | 17/09/2015 07:25 | Arquivo 15M | 97 KB |
|  <code>alar2591.15n</code> | 17/09/2015 19:30 | Arquivo 15N | 248 KB |
|  <code>alar2591.15o</code> | 17/09/2015 07:25 | Arquivo 15O | 4.448 KB |

Fonte: O autor.

onde é possível encontrar informações sobre o mesmo, assim como atualizações divulgadas periodicamente. Basicamente, o programa converte arquivos em formato RINEX em arquivos ASCII com extensões `.Cmn` e `.Std` (SENGODAN; MURUGAPPAN; MISRA, 2020). A Figura 127a ilustra a saída do programa para os arquivos ilustrados na Figura 126d. O arquivo com extensão `.Cmn` contém os valores instantâneos de TEC (STEC e VTEC) discriminados por satélite, enquanto o arquivo com extensão `.Std` contém a variação diurna do TEC médio com os respectivos desvios-padrão. As Figuras 127b e 127c ilustram, respectivamente, a estrutura desses arquivos. Note que os dados no arquivo com extensão `.Cmn` estão dispostos em 10 colunas. Na presente discussão, as colunas de interesse são `Time`, `PRN`, `Ele`, `Lat`, `Long`, `Stec` e `Vtec`. A coluna `Time` contém os instantes de tempo para os valores nas colunas restantes. O período de amostragem é de 15 segundos, resultando em 240 pontos por hora. As colunas `PRN` e `Ele` identificam os satélites e fornecem seus ângulos de elevação, respectivamente. As colunas `Lat` e `Long` contém, respectivamente, as latitudes e longitudes dos pontos subionosféricos. Por fim, as colunas `Stec` e `Vtec` contém os valores de STEC e VTEC, nesta ordem. O Tessa só precisa dos arquivos com extensão `.Cmn` para

Figura 127 – O programa do Dr. Gopi produz dois arquivos ASCII, um com extensão **.Cmn** e outro com extensão **.Std**.

(a) Arquivos produzidos pelo programa do Dr. Gopi para os arquivos observação e mensagem de navegação ilustrados na Figura 126d.

| Nome | Data de modificação | Tipo | Tamanho |
|------------------------|---------------------|-------------|----------|
| alar259-2015-09-16.Cmn | 01/07/2021 18:01 | Arquivo CMN | 4.631 KB |
| alar259-2015-09-16.Std | 01/07/2021 18:01 | Arquivo STD | 39 KB |

(b) Estrutura interna de um arquivo com extensão **.Cmn**.

| Mdatset | Time | PRN | Az | Ele | Lat | Lon | Sec | Vtec | S4 |
|--------------|----------|-----|--------|------|---------|---------|-------|------|---------|
| 57281.317882 | 7.629167 | 1 | 254.16 | 3.21 | -40.963 | 279.665 | 21.66 | 4.97 | -99.000 |
| 57281.318056 | 7.633333 | 1 | 254.09 | 3.28 | -40.980 | 279.747 | 21.43 | 4.89 | -99.000 |
| 57281.318229 | 7.637500 | 1 | 254.02 | 3.35 | -40.995 | 279.828 | 21.40 | 4.89 | -99.000 |
| 57281.318403 | 7.641667 | 1 | 253.95 | 3.43 | -41.011 | 279.909 | 21.43 | 4.90 | -99.000 |
| 57281.318576 | 7.645833 | 1 | 253.87 | 3.50 | -41.027 | 279.990 | 21.37 | 4.89 | -99.000 |
| 57281.318750 | 7.650000 | 1 | 253.80 | 3.57 | -41.042 | 280.070 | 21.22 | 4.84 | -99.000 |
| 57281.318924 | 7.654167 | 1 | 253.73 | 3.65 | -41.057 | 280.151 | 21.09 | 4.81 | -99.000 |
| 57281.319097 | 7.658333 | 1 | 253.66 | 3.72 | -41.072 | 280.231 | 21.10 | 4.81 | -99.000 |
| 57281.319271 | 7.662500 | 1 | 253.59 | 3.79 | -41.087 | 280.311 | 20.87 | 4.75 | -99.000 |
| 57281.319444 | 7.666667 | 1 | 253.52 | 3.86 | -41.101 | 280.390 | 20.86 | 4.75 | -99.000 |
| 57281.319618 | 7.670833 | 1 | 253.44 | 3.94 | -41.116 | 280.470 | 20.89 | 4.76 | -99.000 |
| 57281.319792 | 7.675000 | 1 | 253.37 | 4.01 | -41.130 | 280.549 | 20.78 | 4.73 | -99.000 |
| 57281.319965 | 7.679167 | 1 | 253.30 | 4.08 | -41.144 | 280.628 | 20.76 | 4.73 | -99.000 |
| 57281.320139 | 7.683333 | 1 | 253.23 | 4.16 | -41.158 | 280.706 | 20.69 | 4.71 | -99.000 |
| 57281.320313 | 7.687500 | 1 | 253.16 | 4.23 | -41.171 | 280.785 | 20.61 | 4.69 | -99.000 |
| 57281.320486 | 7.691667 | 1 | 253.09 | 4.30 | -41.185 | 280.863 | 20.54 | 4.67 | -99.000 |
| 57281.320660 | 7.695833 | 1 | 253.01 | 4.38 | -41.199 | 280.940 | 20.48 | 4.66 | -99.000 |
| 57281.320833 | 7.700000 | 1 | 252.94 | 4.45 | -41.211 | 281.018 | 20.37 | 4.63 | -99.000 |
| 57281.321007 | 7.704167 | 1 | 252.87 | 4.52 | -41.224 | 281.095 | 20.36 | 4.63 | -99.000 |

(c) Estrutura interna de um arquivo com extensão **.Std**.

| | | | |
|-------|------|------|-------|
| 0.000 | 6.46 | 6.46 | -9.75 |
| 0.017 | 6.44 | 6.55 | -9.75 |
| 0.033 | 6.43 | 6.90 | -9.75 |
| 0.050 | 6.42 | 5.81 | -9.75 |
| 0.067 | 6.40 | 6.47 | -9.75 |
| 0.083 | 6.38 | 5.30 | -9.75 |
| 0.100 | 6.37 | 5.99 | -9.75 |
| 0.117 | 6.35 | 5.91 | -9.75 |
| 0.133 | 6.33 | 5.71 | -9.75 |
| 0.150 | 6.32 | 5.47 | -9.75 |
| 0.167 | 6.30 | 5.88 | -9.75 |
| 0.183 | 6.28 | 4.71 | -9.75 |
| 0.200 | 6.26 | 5.41 | -9.75 |
| 0.217 | 6.24 | 5.08 | -9.75 |
| 0.233 | 6.22 | 5.11 | -9.75 |
| 0.250 | 6.20 | 5.22 | -9.75 |
| 0.267 | 6.18 | 4.37 | -9.75 |
| 0.283 | 6.17 | 4.84 | -9.75 |
| 0.300 | 6.15 | 4.56 | -9.75 |
| 0.317 | 6.13 | 4.53 | -9.75 |

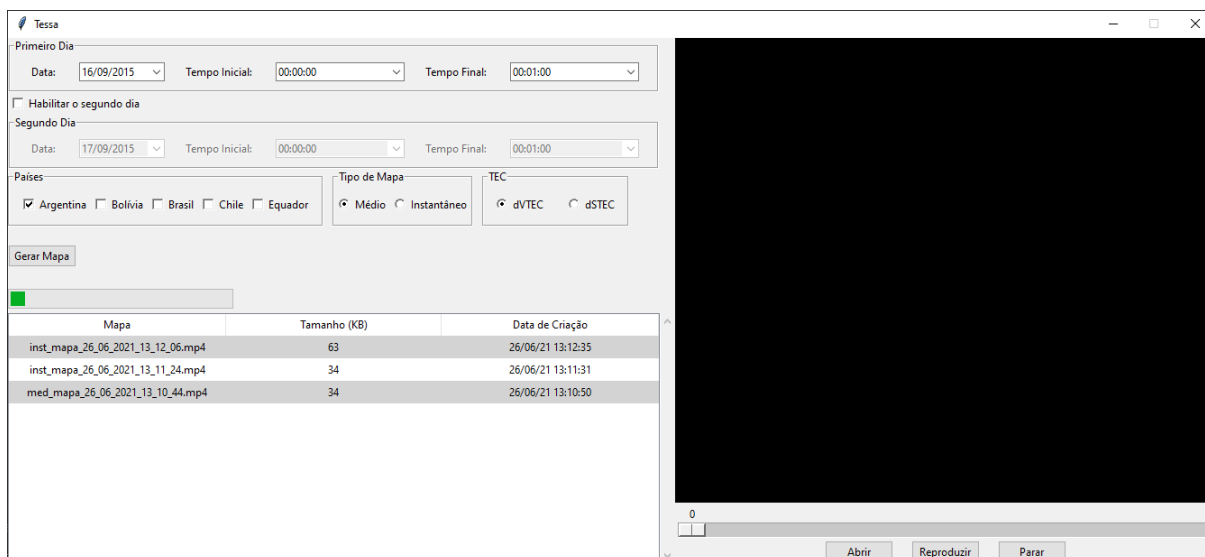
Fonte: O autor.

a construção de mapas. A tendência dos valores de TEC contidos nesses arquivos são removidas por meio da SSA para a obtenção dos valores de dTEC (dVTEC ou dSTEC), em que “d” advém da palavra *detrended*. Quanto ao arquivo com extensão **.Std**, ele apresenta apenas quatro colunas. A primeira se refere aos instantes de tempo em UT, a segunda aos valores de TEC médio e a terceira aos respectivos desvios-padrão. A quarta coluna contém apenas a latitude da estação.

11.2 Uso do Programa

A Figura 128 ilustra a única tela do Tessa, na qual o usuário deve fornecer as informações necessárias para a concepção de um mapa de TEC. Ela é composta por dois painéis, um à esquerda para a entrada das informações e outro à direita para a visualização dos mapas gerados. No painel esquerdo, é possível escolher a data assim como os tempos inicial e final do primeiro dia utilizando os elementos gráficos no subpainel **Primeiro Dia**. Se o usuário pressionar a caixa de combinação **Data**, então um calendário suspenso será exibido para a escolha da data referente ao primeiro dia (ver Figura 129a). As setas na parte superior permitem a escolha do ano e do mês, enquanto o dia é escolhido na parte inferior. Posteriormente, o usuário deve fornecer os tempos inicial e final por meio das caixas de combinação **Tempo Inicial** e **Tempo Final**, respectivamente. Se a caixa **Tempo Inicial** for pressionada, então uma lista suspensa contendo as 24 horas do dia subdivididas em intervalos de 1 minuto será exibida (ver Figura 129b). Após a escolha do tempo inicial, a lista suspensa na caixa **Tempo Final** é automaticamente atualizada para conter apenas os instantes de tempo superiores ao inicial. Caso o evento analisado

Figura 128 – O Tessa apresenta uma única tela dividida em dois painéis, um à esquerda e outro à direita. No painel esquerdo, o usuário fornece as informações para gerar um mapa, enquanto no direito ele visualiza os vídeos dos mapas gerados nos dias e intervalos de tempo indicados nos subpainéis **Primeiro Dia** e **Segundo Dia** (quando aplicável). Os mapas podem conter apenas os países indicados no subpainel **Países** e podem ser do tipo **Médio** e **Instantâneo** para valores de STEC e VTEC sem tendência (dSTEC e dVTEC, respectivamente).



Fonte: O autor.

ocorra próximo ao fim do primeiro dia, o usuário pode desejar gerar um mapa que envolva o começo do dia subsequente. Para isso, ele deve marcar a caixa de seleção **Habilitar o segundo dia** para habilitar o subpainel **Segundo Dia**. O Tessa não permite a escolha da data do segundo dia, pois ela é sempre adjacente à data do primeiro. Assim, resta ao usuário apenas informar os tempos inicial e final do segundo dia.

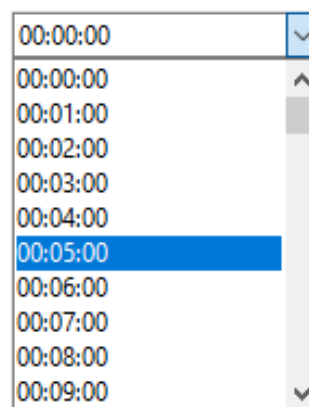
Após a configuração dos dias, o usuário deve selecionar os países que irão aparecer no mapa de TEC a ser gerado. Isso é feito por meio das caixas de seleção no subpainel **Países**. Ao menos um país sempre deve estar selecionado. O Tessa emite uma mensagem de aviso caso o usuário tente violar essa regra (ver Figura 130a). Na versão atual, o Tessa só permite trabalhar com alguns países da América Latina, a saber: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile e Equador. Esses países foram escolhidos porque o Tessa foi originalmente desenvolvido para estudar os TIDs associados ao terremoto que ocorreu no Chile em 16 de setembro de 2015. Ao selecionar um país, todas as estações disponíveis para o mesmo serão incluídas no mapa. Depois de selecionar os países, o usuário precisa indicar qual é o tipo de mapa a ser gerado. O Tessa trabalha com dois tipos de mapa, cujos respectivos significados são explanados mais adiante. O primeiro é chamado de mapa instantâneo, enquanto o segundo é chamado de mapa médio. A indicação do tipo de mapa é feita com os botões de rádio **Médio** e **Instantâneo** no subpainel **Tipo de Mapa** (ver Figura 128). O usuário também precisa escolher o tipo de TEC utilizando os botões de rádio **dVTEC**

Figura 129 – O Tessa provê um calendário suspenso para a escolha da data do primeiro dia. A data do segundo dia é configurada automaticamente para ser a data subsequente à data do primeiro dia. Há também um par de listas suspensas para especificar os tempos inicial e final de um intervalo de tempo em ambas as datas.

(a) Calendário suspenso para a escolha da data do primeiro dia.



(b) Lista suspenso para a escolha do tempo inicial ou final em uma data.



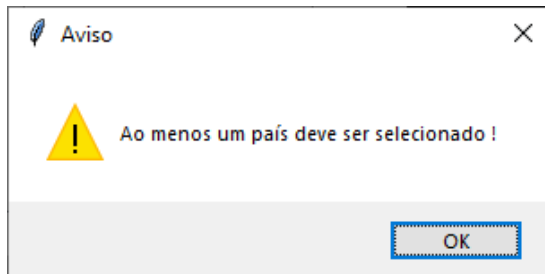
Fonte: O autor.

e dSTEC no subpainel TEC. Eles correspondem, respectivamente, ao VTEC e STEC sem tendência. Por fim, basta pressionar o botão **Gerar Mapa** para iniciar a sua construção (ver Figura 130b). Dependendo do número de estações em cada país selecionado, bem como do intervalo de tempo escolhido em cada dia, esse processo pode levar horas para ser concluído. Se ele for bem-sucedido, então uma mensagem de informação será emitida ao usuário (ver Figura 130c). Caso contrário, uma mensagem de erro será emitida (ver Figura 130d).

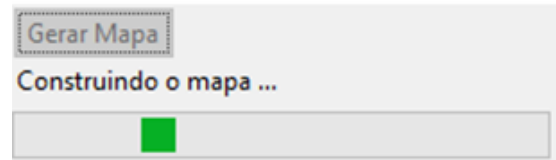
Como comentado anteriormente, o Tessa é capaz de gerar um mapa instantâneo e um mapa médio. Um mapa instantâneo mostra a evolução temporal dos valores de TEC sem tendência (dSTEC ou dVTEC) utilizando os pontos subionosféricos associados aos satélites visíveis pelas estações fornecidas pelo usuário. Cada um dos pontos é representado no mapa por um disco colorido, cuja coloração indica a intensidade do valor de TEC sem tendência em um instante de tempo. De um instante para o outro, a posição antiga dos pontos é mantida a fim de que seja possível visualizar a variação dos valores de TEC sem tendência à medida que o tempo passa. Na concepção de um mapa instantâneo, o Tessa considera apenas os satélites com elevação superior a 30° a fim de minimizar o efeito do multicaminho nos dados GPS. As Figuras 131a e 131b mostram os tempos inicial e final de um mapa instantâneo gerado a partir de dados GPS de 5 estações da RBMC para a data 16/09/2015 entre 11:00:00 e 12:58:00 UT. Por outro lado, um mapa médio mostra a evolução temporal dos valores médios de TEC para cada uma das estações fornecidas pelo usuário. Neste tipo de mapa, as estações são posicionadas de acordo com suas respectivas latitudes e longitudes, as quais são mantidas internamente pelo Tessa. Cada estação é representada por um disco estático colorido, cuja coloração indica a intensidade do valor

Figura 130 – O Tessa faz a validação das informações fornecidas pelo usuário, bem como dos arquivos utilizados internamente para a construção dos mapas de TEC.

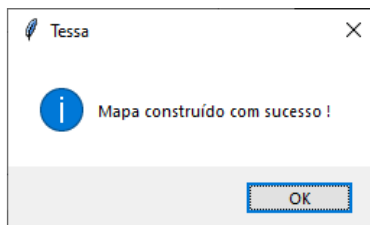
(a) Mensagem de aviso emitida pelo Tessa caso o usuário tente desmarcar todas as caixas de seleção no subpainel **Países**.



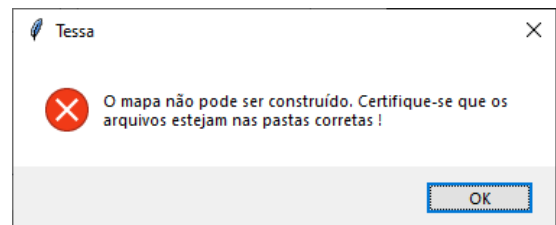
(b) Após fornecer as informações requeridas, o usuário deve pressionar o botão **Gerar Mapa** para dar início a sua construção.



(c) Mensagem de informação emitida pelo Tessa caso a construção do mapa seja bem-sucedida.



(d) Mensagem de erro emitida pelo Tessa caso haja algum problema na construção do mapa.



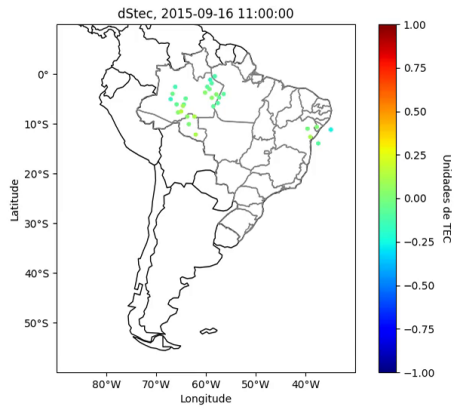
Fonte: O autor.

médio de TEC em um dado instante. As Figuras 131c e 131d ilustram, nesta ordem, os tempos inicial e final de um mapa médio para as mesmas estações, intervalo de tempo e data do mapa instantâneo exemplificado anteriormente.

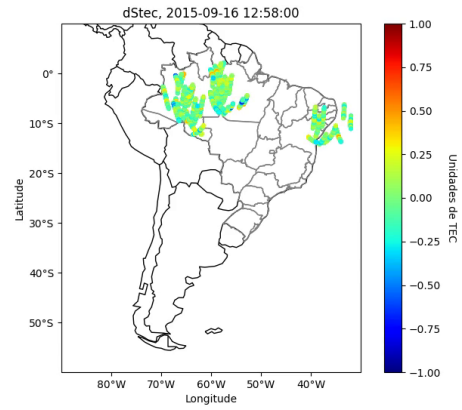
Os mapas gerados pelo Tessa são vídeos com extensão **.mp4**, os quais são salvos automaticamente pela aplicação em seu diretório corrente. Para cada vídeo gerado, o Tessa também cria um diretório para armazenar todos os quadros (imagens) que compõem o vídeo. Os vídeos são listados na tabela ilustrada na Figura 128. Ela é composta por três colunas, a saber: **Mapa**, **Tamanho (KB)** e **Data de criação**. O conteúdo nas células de cada coluna é autoexplicativo. Os mapas médios são salvos com o prefixo “med”, enquanto os instantâneos com o prefixo “inst”. É possível classificar as linhas da tabela em ordem crescente ou decrescente com base no tamanho do arquivo, ao pressionar o cabeçalho da coluna **Tamanho (KB)**, ou em sua data de criação, ao pressionar o cabeçalho da coluna **Data de criação**. Para reproduzir um vídeo, o usuário deve pressionar duas vezes sobre a linha correspondente na tabela. Assim, ele será reproduzido no reproduzidor de vídeo ilustrado na Figura 132a. Na parte inferior, há um controle deslizante para indicar em qual parte (em segundos) está a reprodução de um vídeo e três botões, a saber: **Abrir**, **Reproduzir** e **Parar**. O botão **Abrir** permite que o usuário escolha um vídeo para ser reproduzido que não está no diretório padrão (ver Figura 132b). Os botões **Reproduzir** e **Parar** servem para manipular um vídeo em reprodução e suas respectivas funções são

Figura 131 – Ilustração dos tempos inicial e final dos mapas instantâneo e médio gerados pelo Tessa para 5 estações da RBMC entre 11:00:00 e 12:58:00 UT.

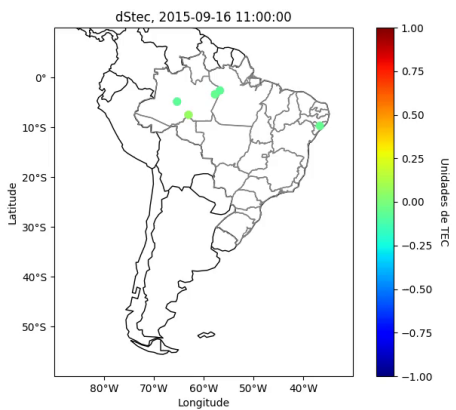
(a) Mapa instantâneo de dSTEC no tempo inicial 11:00:00 UT.



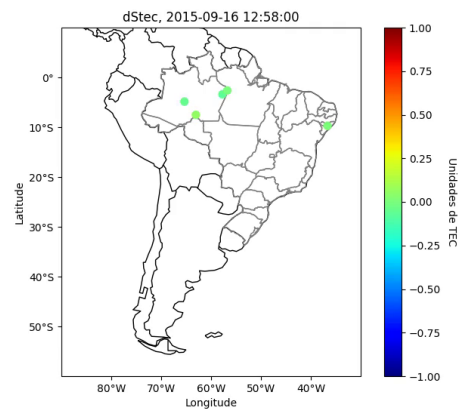
(b) Mapa instantâneo de dSTEC no tempo final 12:58:00 UT.



(c) Mapa médio de dSTEC no tempo inicial 11:00:00 UT.



(d) Mapa médio de dSTEC no tempo final 12:58:00 UT.

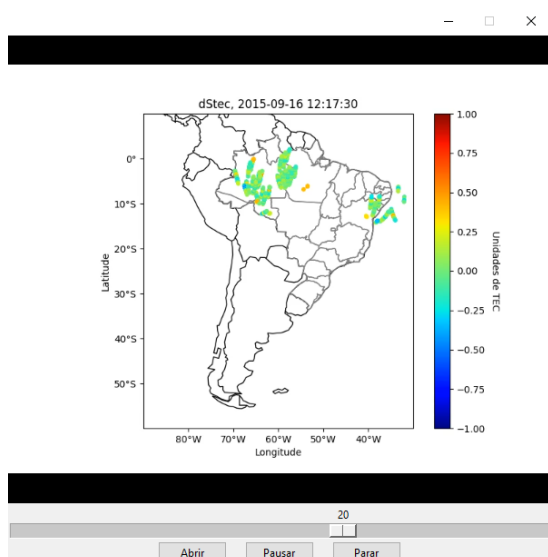


Fonte: O autor.

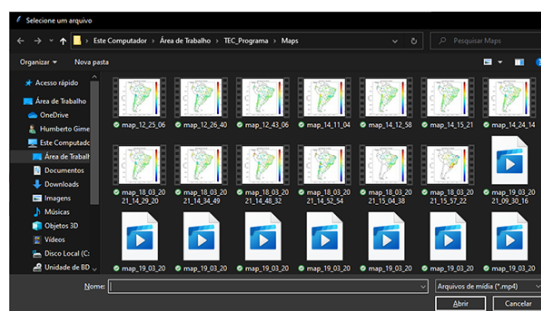
autoexplicativas. Durante a reprodução de um vídeo, o botão Reproduzir adquire a função de pausá-lo e, portanto, seu rótulo é alterado para Pausar.

Figura 132 – No painel direito do Tessa, o usuário é capaz de reproduzir os vídeos com extensão .mp4 gerados pela aplicação. Para um reproduzir um vídeo, ele deve pressionar duas vezes na linha correspondente da tabela ou pressionar o botão **Abrir** para selecionar um vídeo por meio de uma caixa de diálogo.

(a) O Tessa dispõe de um reprodutor de vídeo para a reprodução dos vídeos gerados pelo usuário. Ele consiste de uma barra deslizante e de três botões para manipulá-los.



(b) Um caixa de diálogo é aberta quando o botão **Abrir** é pressionado. Este recurso permite que o usuário reproduza vídeos que não estão no diretório padrão definido pela aplicação.



Fonte: O autor.

12 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação apresentou ferramentas computacionais desenvolvidas em MATLAB e Python para a identificação e análise de variações geomagnéticas e distúrbios ionosféricos (TIDs) associados a eventos solares, sísmicos e oceânicos. Especificamente, três ferramentas foram desenvolvidas, a saber: Hilda, MAGNAMI e Tessa. A ideia das ferramentas é facilitar a etapa de processamento e análise das séries temporais para que o enfoque dos pesquisadores seja na interpretação dos resultados e na extração de conclusões, ou seja, em fazer ciência. Em particular, as ferramentas visam atender os pesquisadores atuando na área de Física Espacial que têm interesse em estudar as assinaturas magnéticas e ionosféricas produzidas pela atividade solar e por sismos tsunamigênicos. As principais contribuições deste trabalho em termos de suas ferramentas foram:

- **Hilda:** O Hilda é um *software* dotado de interface gráfica amigável que permite identificar eventos HILDCAA utilizando versões mais relaxadas ou restritas dos critérios propostos por [Tsurutani e Gonzalez \(1987\)](#). Ele pode ser utilizado pelos pesquisadores para catalogar de forma automatizada a ocorrência de eventos HILDCAA em um intervalo de tempo de interesse. A grande vantagem do Hilda é que ele permite relaxar ou restringir os critérios a fim de ampliar ou reduzir a quantidade de eventos identificados, remover a fase principal das tempestades geomagnéticas e analisar as condições do meio interplanetário durante a ocorrência dos eventos HILDCAA identificados. Para validar as saídas do Hilda, foram consideradas as séries temporais dos índices geomagnéticos AE, Dst e SYM/H ao longo dos anos de 2008 e 2010. Os resultados obtidos mostraram-se condizentes com os encontrados por [Klausner et al. \(2021\)](#), os quais identificaram eventos HILDCAA e HILDCAA* durante o mínimo solar dos ciclos 23 e 24; em particular, nos anos de 2008, 2009 e 2010. Na maioria dos eventos HILDCAA identificados pelo Hilda, houve uma diferença de apenas 1 min nos instantes de início e fim dos eventos em relação aos identificados por [Klausner et al. \(2021\)](#). Uma diferença um pouco maior foi observada em eventos nos quais havia a necessidade de remover a fase principal de uma tempestade geomagnética.
- **MAGNAMI:** O MAGNAMI é um *software* munido de interface gráfica que permite detectar variações geomagnéticas induzidas por tsunamis utilizando três metodologias matemáticas, a saber: CWT, DWT na forma dos índices EWC e EMD. Ele pode ser utilizado pelos pesquisadores para processar e analisar séries temporais das componentes do campo geomagnético coletadas por observatórios da rede INTERMAGNET. A grande vantagem do MAGNAMI é que ele permite trabalhar com séries temporais de até 5 observatórios geomagnéticos simultaneamente, introduzir

as séries temporais dos 5 dias geomagneticamente calmos de um dado mês para cada observatório, calcular as linhas de base S_q por meio da SSA, gerar resíduos das componentes para enfatizar as variações geomagnéticas e, por fim, analisar os resíduos por meio de ferramentas matemáticas consagradas. Para validar as saídas do MAGNAMI, foram consideradas as séries temporais das componentes H e Z de 13 observatórios espalhados pelo Oceano Pacífico nas 24h após o sismo tsunamigênico do Chile de 2010. O sismo ocorreu na região de Maule no dia 27 de fevereiro de 2010. Os resultados obtidos com o MAGNAMI mostraram-se condizentes com os encontrados por [Klausner et al. \(2021\)](#). Em particular, os periódogramas (CWT) gerados pelo MAGNAMI indicaram periodicidades entre 8 e 32 min essencialmente nos mesmos intervalos de tempo dos periódogramas encontrados em [Klausner et al. \(2021\)](#). Analogamente, os índices EWC apresentaram um aumento de valor praticamente nos mesmos intervalos de tempo indicados nos periódogramas. [Klausner et al. \(2016\)](#) mostraram que estes índices aumentam de valor na presença de variações geomagnéticas produzidas por tsunamis e, portanto, podem ser utilizados para identificá-las. Por fim, as IMFs dos resíduos das componentes H e Z geradas pelo MAGNAMI mostraram as mesmas assinaturas em N-invertido após a chegada do tsunami nos observatórios praticamente nos mesmos intervalos de tempo encontrados em [Klausner et al. \(2021\)](#). Isso mostra a capacidade do MAGNAMI em encontrar variações geomagnéticas.

- **Tessa:** O Tessa é um *software* com interface gráfica amigável que permite construir mapas de TEC para identificar TIDs causados por sismos tsunamigênicos. Ele foi originalmente desenvolvido para estudar os TIDs produzidos pelo sismo tsunamigênico do Chile de 2015, que ocorreu na região de Coquimbo no dia 16 de setembro de 2015. Os resultados obtidos não foram satisfatórios e, portanto, não foram descritos neste texto. O Tessa ainda está em uma versão muito preliminar e requer melhorias. Na verdade, as séries temporais de TEC utilizadas pelo Tessa na construção dos mapas são oriundas do programa do Dr. Gopi. Os valores das séries no fim do dia do sismo e no começo do dia subsequente apresentaram transições abruptas, as quais ficaram muito evidentes nos mapas gerados e prejudicaram as análises.

Em trabalhos futuros, pretende-se aprimorar as ferramentas supracitadas. Em particular, no caso do Hilda a ideia é implementar a CWT e DWT para analisar as séries temporais dos parâmetros do vento solar, como em [Klausner et al. \(2014b\)](#). Para o MAGNAMI, o propósito é deixá-lo compatível com as séries temporais do nível do mar, pois a comparação destas últimas com as séries temporais do campo geomagnético permite determinar a associação existente entre elas durante a ocorrência de tsunamis. Por fim, quanto ao Tessa a prioridade é realizar as melhorias necessárias para que ele possa ser utilizado na prática. Em versões futuras, essas ferramentas serão disponibilizadas para o

público em geral. Ademais, a extensa revisão bibliográfica deste trabalho é um ponto que merece destaque, pois isso não é muito usual na maioria das dissertações e/ou teses da área. Ela é uma contribuição para a comunidade científica, em especial para os discentes da área de Física Espacial.

REFERÊNCIAS

- ABBATE, A.; DECUSATIS, C. M.; DAS, P. K. *Wavelets and Subbands: Fundamentals and Applications*. Boston, MA: Birkhauser Boston : Imprint : Birkhauser, 2002. OCLC: 840277694. ISBN 9781461201137 9781461266181. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0113-7>>. Citado 2 vezes nas páginas 136 e 138.
- ABE, K. Dominant periods of the 2004 Sumatra tsunami and the estimated source size. *Earth, Planets and Space*, v. 58, n. 2, p. 217–221, fev. 2006. ISSN 1880-5981. Disponível em: <<http://earth-planets-space.springeropen.com/articles/10.1186/BF03353381>>. Citado na página 5.
- ADDISON, P. S. *The illustrated wavelet transform handbook: introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. Second edition. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017. ISBN 9781482251326. Citado 3 vezes nas páginas 124, 128 e 130.
- AHRENS, C. D. *Essentials of meteorology: an invitation to the atmosphere*. 6th ed. ed. Belmont, CA: Brooks/Cole, 2011. OCLC: ocn651905769. ISBN 9780840049339. Citado 6 vezes nas páginas 65, 66, 69, 70, 71 e 77.
- AKANSU, A. N.; HADDAD, R. A. *Multiresolution signal decomposition: transforms, subbands, and wavelets*. 2nd ed. ed. San Diego: Academic Press, 2001. ISBN 9780120471416. Citado na página 133.
- AKANSU, A. N.; SMITH, M. J. T. *Subband and Wavelet Transforms: Design and Applications*. Boston: Springer US, 1995. OCLC: 958528241. ISBN 9781461304838. Citado na página 138.
- AKASOFU, S. *Polar and Magnetospheric Substorms*. Springer Netherlands, 1968. (Astrophysics and Space Science Library). ISBN 9789027701084. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=yM5-AAAAIAAJ>>. Citado na página 59.
- AKASOFU, S. The scientific legacy of Sydney Chapman. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, v. 92, n. 34, p. 281–282, ago. 2011. ISSN 0096-3941, 2324-9250. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2011EO340001>>. Citado na página 40.
- AKUJUOBI, C. M. *Wavelets and wavelet transform systems and their applications: a digital signal processing approach*. [s.n.], 2022. OCLC: 1295379350. ISBN 978-3-030-87528-2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-030-87528-2>>. Citado na página 118.
- AKYILMAZ, O.; ARSLAN, N. An experiment of predicting Total Electron Content (TEC) by fuzzy inference systems. *Earth, Planets and Space*, v. 60, n. 9, p. 967–972, set. 2008. ISSN 1880-5981. Disponível em: <<https://earth-planets-space.springeropen.com/articles/10.1186/BF03352852>>. Citado na página 114.
- ALESSIO, S. M. *Digital Signal Processing and Spectral Analysis for Scientists: Concepts and Applications*. 1st ed. 2016. ed. Cham: Springer International Publishing : Imprint: Springer, 2016. (Signals and Communication Technology). ISBN 9783319254685. Citado 4 vezes nas páginas 133, 134, 135 e 136.

- ALFVÉN, H. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Nature*, v. 150, n. 3805, p. 405–406, out. 1942. ISSN 0028-0836, 1476-4687. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/150405d0>>. Citado na página 55.
- ALLABY, M.; GARRATT, R. *Atmosphere: a scientific history of air, weather, and climate*. New York, NY: Facts on File, 2009. (Discovering the Earth). OCLC: ocn226984713. ISBN 978-0-8160-6098-6. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.
- ALLEN, J. H.; ABSTON, C. C.; MORRIS, L. D. *Auroral electrojet magnetic activity indices AE (11) for 1971*. 1975. Unknown. Citado na página 45.
- ALTADILL, D. et al. A method for real-time identification and tracking of traveling ionospheric disturbances using ionosonde data: first results. *Journal of Space Weather and Space Climate*, v. 10, p. 2, 2020. ISSN 2115-7251. Disponível em: <<https://www.swsc-journal.org/10.1051/swsc/2019042>>. Citado na página 115.
- ANTOINE, J.-P. et al. *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives*. 1. ed. Cambridge University Press, 2004. ISBN 9780521624060 9780521065191 9780511543395. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511543395/type/book>>. Citado 4 vezes nas páginas 133, 136, 137 e 138.
- APPLETON, E. V.; BARNETT, M. A. F. Local Reflection of Wireless Waves from the Upper Atmosphere. *Nature*, v. 115, n. 2888, p. 333–334, mar. 1925. ISSN 0028-0836, 1476-4687. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/115333a0>>. Citado na página 89.
- APPLETON, E. V.; BARNETT, M. a. F.; LARMOR, J. On some direct evidence for downward atmospheric reflection of electric rays. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 109, n. 752, p. 621–641, dez. 1925. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1925.0149>>. Citado na página 89.
- ARNY, T.; SCHNEIDER, S. E. *Explorations: an introduction to astronomy*. Eighth edition. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2017. ISBN 9780073513911. Citado 3 vezes nas páginas 63, 65 e 66.
- ARTRU, J. et al. Ionospheric detection of gravity waves induced by tsunamis. *Geophysical Journal International*, v. 160, n. 3, p. 840–848, mar. 2005. ISSN 0956540X, 1365246X. Disponível em: <<https://academic.oup.com/gji/article-lookup/doi/10.1111/j.1365-246X.2005.02552.x>>. Citado na página 81.
- ASHMEAD, J. Morlet Wavelets in Quantum Mechanics. *Quanta*, v. 1, n. 1, p. 58–70, nov. 2012. ISSN 1314-7374. Disponível em: <<http://quanta.ws/ojs/index.php/quanta/article/view/5>>. Citado na página 126.
- BALAN, N.; BAILEY, G. J. Equatorial plasma fountain and its effects: Possibility of an additional layer. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 100, n. A11, p. 21421–21432, nov. 1995. ISSN 01480227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/95JA01555>>. Citado na página 108.
- BALAN, N. et al. F₃ layer during penetration electric field: F3 LAYER DURING PENETRATION ELECTRIC FIELD. *Journal of Geophysical Research: Space*

Physics, v. 113, n. A3, p. n/a–n/a, mar. 2008. ISSN 01480227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2008JA013206>>. Citado na página 108.

BALEANU, D. (Ed.). *Advances in Wavelet Theory and Their Applications in Engineering, Physics and Technology*. InTech, 2012. ISBN 978-953-51-0494-0. Disponível em: <<http://www.intechopen.com/books/advances-in-wavelet-theory-and-their-applications-in-engineering-physics-and-technology>>. Citado na página 181.

BANKS, P.; KOCKARTS, G. *Aeronomy*. Elsevier Science, 2013. ISBN 9781483260068. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5BXgBAAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 104.

BARRY, R. G.; CHORLEY, R. J. *Atmosphere, weather and climate*. London: Routledge, 2009. OCLC: 1191037092. ISBN 9780203871027 9780203428238 9781282377578. Disponível em: <<http://www.vlebooks.com/vleweb/product/openreader?id=none&isbn=9780203871027>>. Citado 4 vezes nas páginas 63, 64, 69 e 70.

BASAVIAH, N. *Geomagnetism: solid earth and upper atmosphere perspectives*. Dordrecht: Springer, 2011. OCLC: 731757870. ISBN 9789400704022 9789400704039. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 20 e 21.

BATTLE, G. A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions. *Communications in Mathematical Physics*, v. 110, n. 4, p. 601–615, 1987. Publisher: Springer. Citado na página 145.

BATTLE, G. *Wavelets And Renormalization*. [S.l.]: World Scientific, 1999. Google-Books-ID: WxhtCgAAQBAJ. ISBN 978-981-4499-12-5. Citado na página 144.

BAUER, S. J.; LAMMER, H. *Planetary aeronomy: atmosphere environments in planetary systems*. Berlin; London: Springer, 2011. OCLC: 1064384377. ISBN 978-3-642-05990-2. Citado na página 70.

BAUMJOHANN, W.; NAKAMURA, R. Magnetospheric Contributions to the Terrestrial Magnetic Field. In: *Treatise on Geophysics*. Elsevier, 2007. p. 79–90. ISBN 978-0-444-53803-1. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B978044453802400097X>>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

BEER, T. Atmospheric waves and the ionosphere. *Contemporary Physics*, v. 13, n. 3, p. 247–271, maio 1972. ISSN 0010-7514, 1366-5812. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00107517208205680>>. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 77.

BEER, T.; TOLSTOY, I. *Atmospheric Waves*. *Physics Today*, v. 28, n. 11, p. 70–71, nov. 1975. ISSN 0031-9228, 1945-0699. Disponível em: <<http://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.3069210>>. Citado na página 81.

BELCHER, J. W.; DAVIS, L. J. Large-amplitude alfvén waves in the interplanetary medium, 2. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, v. 76, n. 16, p. 3534–3563, 1971. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JA076i016p03534>>. Citado na página 57.

- BELEHAKI, A. et al. An overview of methodologies for real-time detection, characterisation and tracking of traveling ionospheric disturbances developed in the TechTIDE project. *Journal of Space Weather and Space Climate*, v. 10, p. 42, 2020. ISSN 2115-7251. Disponível em: <<https://www.swsc-journal.org/10.1051/swsc/2020043>>. Citado na página 114.
- BELLANGER, E. et al. The irregular variations of the external geomagnetic field from Intermagnet data. *Earth, Planets and Space*, v. 55, n. 4, p. 173–181, abr. 2003. ISSN 1880-5981. Disponível em: <<http://earth-planets-space.springeropen.com/articles/10.1186/BF03351746>>. Citado na página 2.
- BERBERAN-SANTOS, M. N.; BODUNOV, E. N.; POGLIANI, L. On the barometric formula inside the Earth. *Journal of Mathematical Chemistry*, v. 47, n. 3, p. 990–1004, abr. 2010. ISSN 0259-9791, 1572-8897. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10910-009-9620-7>>. Citado na página 75.
- BEYNON, W. J. G. The physics of the ionosphere. *Science Progress (1933-)*, v. 57, n. 227, p. 415–433, 1969. ISSN 0036-8504. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/43419882>>. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.
- BJELICA, B. et al. Complex empirical decomposition method in radar signal processing. In: *2012 Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO)*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 88–91. Citado na página 197.
- BLAKELY, R. J. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. 1. ed. Cambridge University Press, 1995. ISBN 978-0-521-41508-8 978-0-521-57547-8 978-0-511-54981-6. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511549816/type/book>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 29 e 34.
- BLOXHAM, J.; GUBBINS, D. The secular variation of earth's magnetic field. *Nature*, v. 317, n. 6040, p. 777–781, Oct 1985. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/317777a0>>. Citado na página 1.
- BOASHASH, B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. i. fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, v. 80, n. 4, p. 520–538, 1992. Citado na página 192.
- BOASHASH, B. (Ed.). *Time frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference*. 1st ed. ed. Amsterdam ; Boston: Elsevier, 2003. ISBN 9780080443355. Citado na página 192.
- BOGGESE, A.; NARCOWICH, F. J. *A first course in wavelets with Fourier analysis*. 2nd ed. ed. Hoboken, N.J: John Wiley & Sons, 2009. OCLC: ocn317698655. ISBN 978-0-470-43117-7. Citado 2 vezes nas páginas 181 e 186.
- BOROVSKY, J. E.; SHPRITS, Y. Y. Is the Dst Index Sufficient to Define All Geospace Storms? *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 122, n. 11, nov. 2017. ISSN 2169-9380, 2169-9402. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/2017JA024679>>. Citado na página 51.
- BOROVSKY, J. E.; VALDIVIA, J. A. The earth's magnetosphere: A systems science overview and assessment. *Surveys in Geophysics*, v. 39, n. 5, p. 817–859, Sep 2018. ISSN

1573-0956. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10712-018-9487-x>>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

BOTELER, D. The super storms of August/September 1859 and their effects on the telegraph system. *Advances in Space Research*, v. 38, n. 2, p. 159–172, jan. 2006. ISSN 02731177. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0273117706000214>>. Citado na página 50.

BOURDEAU, R. E. Research within the Ionosphere: We have revised our understanding of this atmospheric region by using remotely controlled laboratories. *Science*, v. 148, n. 3670, p. 585–594, abr. 1965. ISSN 0036-8075, 1095-9203. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/10.1126/science.148.3670.585>>. Citado 3 vezes nas páginas 106, 107 e 108.

BREIT, G.; TUVE, M. A. A Radio Method of Estimating the Height of the Conducting Layer. *Nature*, v. 116, n. 2914, p. 357–357, set. 1925. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/116357a0>>. Citado na página 90.

BREIT, G.; TUVE, M. A. A Test of the Existence of the Conducting Layer. *Physical Review*, v. 28, n. 3, p. 554–575, set. 1926. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.28.554>>. Citado na página 90.

BRETT, L. Methods of spherical harmonic analysis. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 29, p. 129, jun. 1988. Citado na página 29.

BRITTAIN, J. E. Electrical Engineering Hall of Fame: Edward V. Appleton [Scanning Our Past]. *Proceedings of the IEEE*, v. 98, n. 9, p. 1681–1682, set. 2010. ISSN 0018-9219, 1558-2256. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/5552245/>>. Citado 3 vezes nas páginas 87, 89 e 90.

BRONZINO, J. D. *The biomedical engineering handbook. [Vol. 2], [Vol. 2]*. Boca Raton: CRC/Taylor & Francis, 2006. OCLC: 749500549. ISBN 978-1-4200-0386-4. Disponível em: <<http://ecztyt.bg.pw.edu.pl/han/Ebrary/site.ebrary.com/id/10143949>>. Citado na página 131.

BROOMHEAD, D.; KING, G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 20, n. 2, p. 217–236, 1986. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727898690031X>>. Citado na página 206.

BROOMHEAD, D. S.; KING, G. P. On the qualitative analysis of experimental dynamical systems. In: _____. [S.l.: s.n.], 1986. v. 11, p. 113–144. Citado na página 206.

BURLAGA, L. et al. Magnetic loop behind an interplanetary shock: Voyager, helios, and imp 8 observations. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 86, n. A8, p. 6673–6684, 1981. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JA086iA08p06673>>. Citado na página 53.

BURLAGA, L. F. E. Magnetic clouds. In: _____. *Physics of the Inner Heliosphere II: Particles, Waves and Turbulence*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991. p. 1–22. ISBN 978-3-642-75364-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-75364-0_1>. Citado na página 53.

BUSSE, F. HUMBOLDT, ALEXANDER VON (1759–1859). In: GUBBINS, D.; HERRERO-BERVERA, E. (Ed.). *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2007. p. 402–404. ISBN 9781402039928. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4020-4423-6_140>. Citado na página 21.

BUZULUKOVA, N. *Extreme events in geospace: origins, predictability, and consequences*. Amsterdam: Elsevier, 2018. OCLC: ocn991706305. ISBN 978-0-12-812700-1. Citado na página 116.

CALAIS, E.; MINSTER, J. B. Gps detection of ionospheric perturbations following the january 17, 1994, northridge earthquake. *Geophysical Research Letters*, v. 22, n. 9, p. 1045–1048, 1995. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/95GL00168>>. Citado na página 6.

CAMPBELL, W. H. An introduction to quiet daily geomagnetic fields. *Pure and Applied Geophysics PAGEOPH*, v. 131, n. 3, p. 315–331, 1989. ISSN 0033-4553, 1420-9136. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF00876831>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 259.

CAMPBELL, W. H. *Earth magnetism: a guided tour through magnetic fields*. San Diego: Harcourt/Academic Press, 2001. (Complementary science series). ISBN 9780121581640. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 17 e 18.

CAMPBELL, W. H. *Introduction to geomagnetic fields*. 2nd. ed. ed. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521822060. Citado 10 vezes nas páginas 1, 14, 16, 22, 35, 43, 49, 50, 51 e 104.

CANDIDO, C. M. N. et al. Statistical analysis of the occurrence of medium-scale traveling ionospheric disturbances over Brazilian low latitudes using OI 630.0 nm emission all-sky images. *Geophysical Research Letters*, v. 35, n. 17, p. L17105, set. 2008. ISSN 0094-8276. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2008GL035043>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 116.

CARMONA, R.; HWANG, W.-L.; TORRESANI, B. *Practical Time-Frequency Analysis: Gabor and Wavelet Transforms, with an Implementation in S*. Burlington: Elsevier, 1998. OCLC: 476103527. ISBN 9780080539423. Disponível em: <http://www.123library.org/book_details/?id=39454>. Citado na página 124.

CAVICCHI, E. Nineteenth-Century Developments in Coiled Instruments and Experiences with Electromagnetic Induction. *Annals of Science*, v. 63, n. 3, p. 319–361, jul. 2006. ISSN 0003-3790, 1464-505X. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00033790600741018>>. Citado na página 21.

CHANDRASEKHAR, E.; DIMRI, V.; GADRE, V. M. *Wavelets and fractals in earth system sciences*. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2014. OCLC: 874412740. ISBN 978-1-4665-5359-0 978-1-4665-5360-6. Citado na página 118.

CHAPMAN, S. The absorption and dissociative or ionizing effect of monochromatic radiation in an atmosphere on a rotating earth. *Proceedings of the Physical Society*, v. 43, n. 1, p. 26–45, jan. 1931. ISSN 0959-5309. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0959-5309/43/1/305>>. Citado 4 vezes nas páginas 14, 88, 91 e 92.

- CHAPMAN, S. The absorption and dissociative or ionizing effect of monochromatic radiation in an atmosphere on a rotating earth part II. grazing incidence. *Proceedings of the Physical Society*, IOP Publishing, v. 43, n. 5, p. 483–501, sep 1931. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0959-5309/43/5/302>>. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 99.
- CHAPMAN, S. William Gilbert and the Science of his Time*. *Nature*, v. 154, n. 3900, p. 132–136, jul. 1944. ISSN 0028-0836, 1476-4687. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/154132a0>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 20.
- CHAPMAN, S. Upper atmospheric nomenclature. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, v. 55, n. 4, p. 395–399, 1950. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JZ055i004p00395>>. Citado na página 66.
- CHAPMAN, S.; FERRARO, V. C. A. A new theory of magnetic storms. *Journal of Geophysical Research*, v. 36, n. 2, p. 77, 1931. ISSN 0148-0227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/TE036i002p00077>>. Citado na página 43.
- CHAPMAN, S.; ZIRIN, H. Notes on the solar corona and the terrestrial ionosphere. *Smithsonian Contributions to Astrophysics*, v. 2, n. 1, p. 1–14, 1957. ISSN 00810231. Disponível em: <<https://repository.si.edu/handle/10088/6598>>. Citado na página 40.
- CHATTERJEE, P. *Wavelet analysis in civil engineering*. [s.n.], 2017. OCLC: 1100876397. ISBN 978-1-4822-1056-9 978-1-351-23152-7 978-1-351-23038-4 978-1-351-22913-5. Disponível em: <<http://www.vlebooks.com/vleweb/product/openreader?id=none&isbn=9781482210569>>. Citado na página 118.
- CHEN, B.; ZHAO, S.-l.; LI, P.-y. Application of hilbert-huang transform in structural health monitoring: A state-of-the-art review. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, p. 317954, Jun 2014. ISSN 1024-123X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2014/317954>>. Citado na página 187.
- CHRISTENSEN, L. Robot Navigation in Distorted Magnetic Fields. 2019. Disponível em: <<http://rgdoi.net/10.13140/RG.2.2.15407.89769>>. Citado na página 16.
- CHRISTENSEN, O. *Functions, spaces, and expansions: mathematical tools in physics and engineering*. Boston, Mass: Birkhauser, 2010. (Applied and numerical harmonic analysis). OCLC: ocn495780915. ISBN 9780817649791 9780817649807. Citado na página 156.
- CLANCEY, K. F. On finite Hilbert transforms. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 212, p. 347–347, 1975. ISSN 0002-9947. Disponível em: <<http://www.ams.org/jourcgi/jour-getitem?pii=S0002-9947-1975-0377598-5>>. Citado na página 188.
- COHEN, L. What is a multicomponent signal? In: *[Proceedings] ICASSP-92: 1992 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 1992. v. 5, p. 113–116 vol.5. Citado 2 vezes nas páginas 192 e 193.
- COLEBROOK, J. M. Continuous plankton records: zooplankton and environment, north east atlantic and north sea, 1948-1975. *Oceanol. Acta*, v. 1, p. 9–23, 1978. Citado na página 206.

- COLLIN, R. E. *Antennas and radiowave propagation*. New York: McGraw-Hill, 1985. (McGraw-Hill series in electrical engineering). ISBN 978-0-07-011808-9. Citado na página 104.
- CRAIG, R. A. *The upper atmosphere meteorology and physics*. Amsterdam: Academic Press, 1965. OCLC: 428101813. ISBN 9781114571556. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/book/9781114571556>>. Citado 14 vezes nas páginas 67, 68, 72, 74, 83, 84, 87, 88, 91, 92, 98, 101, 103 e 104.
- CRANMER, S. R. Coronal Holes. *Living Reviews in Solar Physics*, v. 6, 2009. ISSN 1614-4961. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.12942/lrsp-2009-3>>. Citado na página 55.
- CRAVENS, T. E. *Physics of Solar System Plasmas*. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 1997. (Cambridge atmospheric and space science series). ISBN 978-0-521-35280-2. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 83.
- CURRY, M. J.; MURTY, R. C. Thunderstorm-Generated Gravity Waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 31, n. 5, p. 1402–1408, jul. 1974. ISSN 0022-4928, 1520-0469. Disponível em: <https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/31/5/1520-0469_1974_031_1402_tggw_2_0_co_2.xml>. Citado na página 81.
- DABAS, R. S. Ionosphere and its influence on radio communications. *Resonance*, v. 5, n. 7, p. 28–43, Jul 2000. ISSN 0973-712X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02867245>>. Citado na página 86.
- DAS, I. et al. An Improved Hilbert–Huang Transform for Vibration-Based Damage Detection of Utility Timber Poles. *Applied Sciences*, v. 11, n. 7, p. 2974, mar. 2021. ISSN 2076-3417. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2076-3417/11/7/2974>>. Citado 2 vezes nas páginas 197 e 199.
- DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 41, n. 7, p. 909–996, out. 1988. ISSN 00103640, 10970312. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cpa.3160410705>>. Citado 5 vezes nas páginas 144, 145, 146, 181 e 182.
- DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. [S.l.]: SIAM, 1992. Citado na página 124.
- DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. Citado 12 vezes nas páginas 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 144, 145, 146, 172 e 182.
- DAUBECHIES, I. Where do wavelets come from? A personal point of view. *Proceedings of the IEEE*, v. 84, n. 4, p. 510–513, abr. 1996. ISSN 00189219. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/488696/>>. Citado na página 118.
- DAUBECHIES, I.; LAGARIAS, J. C. Two-Scale Difference Equations. I. Existence and Global Regularity of Solutions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, v. 22, n. 5, p. 1388–1410, set. 1991. ISSN 0036-1410, 1095-7154. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0522089>>. Citado na página 182.

- DAVIS, M. J. On polar substorms as the source of large-scale traveling ionospheric disturbances. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, v. 76, n. 19, p. 4525–4533, 1971. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JA076i019p04525>>. Citado na página 115.
- DAVIS, M. J.; ROSA, A. V. d. Traveling ionospheric disturbances originating in the auroral oval during polar substorms. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, v. 74, n. 24, p. 5721–5735, 1969. ISSN 2156-2202. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JA074i024p05721>>. Citado na página 115.
- DAVIS, T. N.; SUGIURA, M. Auroral electrojet activity index *AE* and its universal time variations. *Journal of Geophysical Research*, v. 71, n. 3, p. 785–801, fev. 1966. ISSN 01480227. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/JZ071i003p00785>>. Citado 3 vezes nas páginas 3, 45 e 47.
- DEBNATH, L.; MIKUSIŃSKI, P. *Hilbert spaces with applications*. 3rd. ed. ed. Amsterdam ; Boston: Elsevier Academic Press, 2005. ISBN 978-0-12-208438-6. Citado 2 vezes nas páginas 118 e 119.
- DEBNATH, L.; SHAH, F. A. *Wavelet transforms and their applications*. Second edition. New York: Birkhauser/Springer, 2015. ISBN 9780817684174. Citado 3 vezes nas páginas 128, 134 e 140.
- DELECHELLE, E.; LEMOINE, J.; NIANG, O. Empirical mode decomposition: an analytical approach for sifting process. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 12, n. 11, p. 764–767, 2005. Citado na página 194.
- DENG, Y. et al. Boundary-processing-technique in EMD method and Hilbert transform. *Chinese Science Bulletin*, v. 46, n. 11, p. 954–960, jun. 2001. ISSN 1001-6538, 1861-9541. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF02900475>>. Citado na página 199.
- DONNELLY, D.; ROGERS, E. Time series analysis with the Hilbert–Huang transform. *American Journal of Physics*, v. 77, n. 12, p. 1154–1161, dez. 2009. ISSN 0002-9505, 1943-2909. Disponível em: <<http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3226852>>. Citado na página 203.
- DUFFY, D. G. The Application of Hilbert–Huang Transforms to Meteorological Datasets. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, v. 21, n. 4, p. 599–611, abr. 2004. ISSN 0739-0572, 1520-0426. Disponível em: <[http://journals.ametsoc.org/doi/10.1175/1520-0426\(2004\)021<0599:TAOHTT>2.0.CO;2](http://journals.ametsoc.org/doi/10.1175/1520-0426(2004)021<0599:TAOHTT>2.0.CO;2)>. Citado na página 187.
- DUNGEY, J. W. Interplanetary Magnetic Field and the Auroral Zones. *Physical Review Letters*, v. 6, n. 2, p. 47–48, jan. 1961. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.6.47>>. Citado na página 42.
- DUNKERTON, T. GRAVITY WAVES | Buoyancy and Buoyancy Waves. In: *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*. Elsevier, 2015. p. 160–163. ISBN 9780123822253. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780123822253000220>>. Citado na página 80.

- EBIHARA, Y. Simulation study of near-Earth space disturbances: 2. Auroral substorms. *Progress in Earth and Planetary Science*, v. 6, n. 1, p. 24, dez. 2019. ISSN 2197-4284. Disponível em: <<https://progearthplanetsci.springeropen.com/articles/10.1186/s40645-019-0273-2>>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.
- ECCLES, W. H. On the diurnal variations of the electric waves occurring in nature, and on the propagation of electric waves round the bend of the earth. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 87, n. 593, p. 79–99, ago. 1912. ISSN 0950-1207, 2053-9150. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1912.0061>>. Citado na página 88.
- ECCLES, W. H. Wireless communication and terrestrial magnetism. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 119, n. 2987, p. 157–157, jan. 1927. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/119157a0>>. Citado na página 88.
- ECHER, E.; ALVES, M.; GONZALEZ, W. Ondas de choque não colisionais no espaço interplanetário. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 1, p. 51–66, 2006. ISSN 1806-9126. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172006000100008&lng=pt&nrm=iso&tlng=en>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- ECHER, E.; GONZALEZ, W. D.; TSURUTANI, B. T. Interplanetary conditions leading to superintense geomagnetic storms ($Dst \leq -250$ nT) during solar cycle 23. *Geophysical Research Letters*, v. 35, n. 6, 2008. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2007GL031755>>. Citado na página 51.
- EGAÑA, A. A. *Geophysics, realism, and industry: how commercial interests shaped geophysical conceptions, 1900-1960*. First edition. Oxford: Oxford University Press, 2016. OCLC: ocn915509124. ISBN 978-0-19-875515-9. Citado na página 84.
- EL-RABBANY, A. *Introduction to GPS: the Global Positioning System*. Boston, MA: Artech House, 2002. (Artech House mobile communications series). ISBN 978-1-58053-183-2. Citado 7 vezes nas páginas 109, 110, 111, 113, 114, 266 e 267.
- ELIAS, S. A.; ALDERTON, D. *Encyclopedia of geology*. [s.n.], 2021. OCLC: 1203054865. ISBN 9780081029091. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/referenceworks/9780081029091>>. Citado na página 1.
- ELMUNIM, N. A.; ABDULLAH, M. *Ionospheric delay investigation and forecasting*. Singapore: Springer, 2021. OCLC: 1268205784. ISBN 9789811650451. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-981-16-5045-1>>. Citado 4 vezes nas páginas 109, 110, 111 e 267.
- ELSNER, J. B.; TSONIS, A. A. *Singular Spectrum Analysis: a New Tool in Time Series Analysis*. Boston, MA: Springer US, 1996. OCLC: 851754528. ISBN 9781475725148. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2514-8>>. Citado 2 vezes nas páginas 206 e 207.
- EXCELL, P. Sir Edward Appleton and Joseph Priestley: two giants of electrical science. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 56, n. 6, p. 693–704, maio 1994. ISSN 00219169. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021916994901260>>. Citado na página 89.

- FARADAY, M. I. The Bakerian Lecture. - Experimental researches in electricity. - Twenty-second series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 139, p. 1–18, dez. 1849. ISSN 0261-0523, 2053-9223. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1849.0001>>. Citado na página 5.
- FELDMAN, M. *Hilbert transform applications in mechanical vibration*. Chichester: Wiley, 2011. OCLC: ocn676728906. ISBN 9780470978276 9781119991649 9781119991656 9781119991526. Citado 2 vezes nas páginas 188 e 190.
- FENG, Z.; ZHANG, D.; ZUO, M. J. Adaptive Mode Decomposition Methods and Their Applications in Signal Analysis for Machinery Fault Diagnosis: A Review With Examples. *IEEE Access*, v. 5, p. 24301–24331, 2017. ISSN 2169-3536. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/8082757/>>. Citado na página 191.
- FIGUEIREDO, C. A. O. B. et al. Large-scale traveling ionospheric disturbances observed by GPS dTEC maps over North and South America on Saint Patrick's Day storm in 2015: LSTIDs Observed in America Sector. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 122, n. 4, p. 4755–4763, abr. 2017. ISSN 21699380. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/2016JA023417>>. Citado na página 116.
- FIŠER, J.; CHUM, J.; LIU, J.-Y. Medium-scale traveling ionospheric disturbances over Taiwan observed with HF Doppler sounding. *Earth, Planets and Space*, v. 69, n. 1, p. 131, dez. 2017. ISSN 1880-5981. Disponível em: <<http://earth-planets-space.springeropen.com/articles/10.1186/s40623-017-0719-y>>. Citado na página 114.
- FLANDRIN, P. *Time-frequency/time scale analysis*. San Diego: Academic Press, 1999. (Wavelet analysis and its applications, v. 10). ISBN 9780122598708. Citado na página 187.
- FLANDRIN, P.; RILLING, G.; GONCALVES, P. Empirical mode decomposition as a filter bank. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 11, n. 2, p. 112–114, 2004. Citado na página 195.
- FOUFOULA-GEORGIU, E.; KUMAR, P. (Ed.). *Wavelets in geophysics*. San Diego: Academic Press, 1994. (Wavelet analysis and its applications, v. 4). ISBN 9780122628504. Citado na página 138.
- FOWLER, C. M. R. *The solid earth: an introduction to global geophysics*. 2nd ed. ed. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521893077 9780521584098. Citado 5 vezes nas páginas 1, 13, 23, 24 e 28.
- FRAEDRICH, K. Estimating the dimensions of weather and climate attractors. *Journal of The Atmospheric Sciences*, v. 43, p. 419–432, 03 1986. Citado na página 206.
- FRANCIS, S. H. Lower-atmospheric gravity modes and their relation to medium-scale traveling ionospheric disturbances. *Journal of Geophysical Research*, v. 78, n. 34, p. 8289–8295, dez. 1973. ISSN 01480227. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/JA078i034p08289>>. Citado na página 115.
- FRANCIS, S. H. Global propagation of atmospheric gravity waves: A review. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 37, n. 6, p. 1011–1054, 1975. ISSN 0021-9169. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021916975900124>>. Citado 2 vezes nas páginas 114 e 115.

- FRAZIER, M. W. *An introduction to wavelets through linear algebra*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 145.
- FREEDEN, W. *Handbook of geomathematics*. 2nd edition. ed. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2015. ISBN 978-3-642-54550-4 978-3-642-54551-1 978-3-642-54552-8. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 14 e 15.
- FRENZEL, L. *Principles of electronic communication systems*. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2016. ISBN 9780073373850. Citado 2 vezes nas páginas 110 e 112.
- GABOR, D. *Theory of Communication*. Institution of Electrical Engineering, 1946. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=kvJSAAAAMAAJ>>. Citado na página 189.
- GALL, R. L.; WILLIAMS, R. T.; CLARK, T. L. Gravity waves generated during frontogenesis. *Journal of Atmospheric Sciences*, American Meteorological Society, Boston MA, USA, v. 45, n. 15, p. 2204 – 2219, 1988. Disponível em: <https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/45/15/1520-0469_1988_045_2204_gwgdf_2_0_co_2.xml>. Citado na página 81.
- GALVAN, D. A. et al. Ionospheric signatures of Tohoku-Oki tsunami of March 11, 2011: Model comparisons near the epicenter: TSUNAMI IONOSPHERIC SIGNATURES NEAR EPICENTER. *Radio Science*, v. 47, n. 4, ago. 2012. ISSN 00486604. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2012RS005023>>. Citado na página 6.
- GEORGES, T. Hf doppler studies of traveling ionospheric disturbances. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 30, n. 5, p. 735–746, 1968. ISSN 0021-9169. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021916968800297>>. Citado na página 115.
- GHOSH, S. N. *Neutral Upper Atmosphere*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2010. OCLC: 961064605. ISBN 9789401700719. Disponível em: <<https://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=4713029>>. Citado na página 69.
- GILLMOR, C. S. The history of the term ‘ionosphere’. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 262, n. 5567, p. 347–348, jul. 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/262347a0>>. Citado na página 90.
- GJERLOEV, J. W. et al. Substorm behavior of the auroral electrojet indices. *Annales Geophysicae*, v. 22, n. 6, p. 2135–2149, jun. 2004. ISSN 1432-0576. Disponível em: <<https://angeo.copernicus.org/articles/22/2135/2004/>>. Citado na página 3.
- GLICK, T. F.; LIVESEY, S. J.; WALLIS, F. *Medieval science, technology and medicine (2006): an encyclopedia*. [S.l.: s.n.], 2017. OCLC: 1064637780. ISBN 9781138056701. Citado na página 17.
- GODIN, O. A. Acoustic-gravity waves in atmospheric and oceanic waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 132, n. 2, p. 657–669, ago. 2012. ISSN 0001-4966. Disponível em: <<http://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.4731213>>. Citado na página 77.

- GOLD, T. Motions in the magnetosphere of the earth. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, v. 64, n. 9, p. 1219–1224, 1959. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JZ064i009p01219>>. Citado na página 40.
- GOLYANDINA, N. et al. *Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with the Rssa Package*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. ISBN 9781500874339. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=M6IprgEACAAJ>>. Citado na página 217.
- GOLYANDINA, N.; NEKRUTKIN, V.; ZHIGLJAVSKY, A. *Analysis of time series structure: SSA and related techniques*. Boca Raton, Fla: Chapman & Hall/CRC, 2001. (Monographs on statistics and applied probability, 90). ISBN 9781584881940. Citado na página 206.
- GOLYANDINA, N.; ZHIGLJAVSKY, A. *Singular spectrum analysis for time series*. Heidelberg ; New York: Springer, 2013. (SpringerBriefs in statistics). OCLC: ocn837505932. ISBN 9783642349126. Citado 9 vezes nas páginas 206, 209, 212, 214, 217, 219, 220, 221 e 224.
- GOMBOSI, T. I. *Physics of the Space Environment*. 1. ed. Cambridge University Press, 1998. ISBN 978-0-521-59264-2 978-0-521-60768-1 978-0-511-52947-4. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511529474/type/book>>. Citado 3 vezes nas páginas 40, 83 e 107.
- GONZALEZ, W. D. et al. What is a geomagnetic storm? *Journal of Geophysical Research*, v. 99, n. A4, p. 5771, 1994. ISSN 0148-0227. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/93JA02867>>. Citado 5 vezes nas páginas 2, 52, 57, 59 e 60.
- GONZALEZ, W. D.; TSURUTANI, B. T.; GONZALEZ, A. L. Clúa de. Interplanetary origin of geomagnetic storms. *Space Science Reviews*, v. 88, n. 3, p. 529–562, Apr 1999. ISSN 1572-9672. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1005160129098>>. Citado na página 2.
- GOODMAN, J. M. *Space Weather and Telecommunications*. Heidelberg Boulder: Physica-Verlag NetLibrary, Inc. [distributor], 2005. (The Kluwer international series in engineering and computer science, SECS 782). ISBN 978-0-387-23671-1. Citado na página 104.
- GOODY, R. M. *The Physics of the Stratosphere*. Cambridge: Cambridge University Press, 1954. OCLC: 892819873. ISBN 9781107696068. Citado na página 67.
- GOPALSWAMY, N. Relation Between Coronal Mass Ejections and their Interplanetary Counterparts. In: *COSPAR Colloquia Series*. Elsevier, 2002. v. 14, p. 157–164. ISBN 9780080441108. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0964274902801482>>. Citado 3 vezes nas páginas 52, 53 e 54.
- GOSLING, J. T. et al. Solar wind stream interfaces. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 83, n. A4, p. 1401–1412, 1978. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JA083iA04p01401>>. Citado na página 56.

GREEN, A. Early history of the ionosphere. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 36, n. 12, p. 2159–2165, 1974. ISSN 0021-9169. Fifty Years of the Ionosphere. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021916974901469>>. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 87.

GRIFFITHS, H. Oliver heaviside and the heaviside layer. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 376, n. 2134, p. 20170459, out. 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rsta.2017.0459>>. Citado 4 vezes nas páginas 85, 86, 87 e 88.

GROSSMANN, A.; KRONLAND-MARTINET, R.; MORLET, J. Reading and Understanding Continuous Wavelet Transforms. In: COMBES, J.-M.; GROSSMANN, A.; TCHAMITCHIAN, P. (Ed.). *Wavelets*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1990. p. 2–20. ISBN 9783540530145 9783642759888. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-75988-8_1>. Citado na página 138.

GRÖCHENIG, K. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2001. (Applied and Numerical Harmonic Analysis). ISBN 9781461265689 9781461200031. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0003-1>>. Citado na página 187.

GUARNIERI, F. et al. Icme and cir storms with particular emphasis on hildcaa events. 01 2006. Citado 5 vezes nas páginas 52, 54, 55, 57 e 62.

GUARNIERI, F. L. The nature of auroras during High-Intensity Long-Duration Continuous AE Activity (HILDCAA) events: 1998 to 2001. In: TSURUTANI, B. et al. (Ed.). *Geophysical Monograph Series*. Washington, D. C.: American Geophysical Union, 2006. v. 167, p. 235–243. ISBN 9780875904320. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/167GM19>>. Citado na página 60.

GUBBINS, D.; HERRERO-BERVERA, E. (Ed.). *Encyclopedia of geomagnetism and paleomagnetism*. Dordrecht: Springer, 2007. (Encyclopedia of earth sciences series). OCLC: ocn159554151. ISBN 978-1-4020-3992-8 978-1-4020-4423-6 978-1-4020-4866-1. Citado 3 vezes nas páginas 30, 34 e 42.

GURTNER, W.; ESTEY, L. Receiver independent exchange format version 2. In: CITESEER. *GPS bulletin*. [S.l.], 1990. Citado na página 266.

GURTNER, W.; ESTEY, L. Rinex-the receiver independent exchange format-version 3.00. *Astronomical Institute, University of Bern and UNAVCO, Bolulder, Colorado., PANGAEA*, 2007. Citado na página 266.

GURTNER, W.; MADER, G.; MACARTHUR, D. A common exchange format for gps data. *CSTG GPS Bulletin*, v. 2, n. 3, p. 21–30, 1989. Citado na página 266.

HAHN, S. L. *Hilbert transforms in signal processing*. Boston: Artech House, 1996. (Artech House signal processing library). ISBN 9780890068861. Citado na página 190.

HAJRA, R. et al. Solar cycle dependence of High-Intensity Long-Duration Continuous AE Activity (HILDCAA) events, relativistic electron predictors?: HILDCAAS. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 118, n. 9, p. 5626–5638, set. 2013. ISSN 21699380. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/jgra.50530>>. Citado na página 61.

HARGREAVES, J. K. *The solar-terrestrial environment: an introduction to geospace—the science of the terrestrial upper atmosphere, ionosphere, and magnetosphere*. Cambridge [England] ; New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1992. (Cambridge atmospheric and space science series, 5). ISBN 9780521327480 9780521427371. Citado 10 vezes nas páginas 58, 69, 70, 81, 91, 93, 94, 97, 98 e 104.

HASSANI, H.; HERAVI, S.; ZHIGLJAVSKY, A. Forecasting european industrial production with singular spectrum analysis. *International Journal of Forecasting*, v. 25, n. 1, p. 103–118, 2009. ISSN 0169-2070. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169207008001040>>. Citado na página 206.

HASSANI, H. et al. ON THE SEPARABILITY BETWEEN SIGNAL AND NOISE IN SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS. *Fluctuation and Noise Letters*, v. 11, n. 02, p. 1250014, jun. 2012. ISSN 0219-4775, 1793-6780. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219477512500149>>. Citado na página 207.

HASSANI, H.; THOMAKOS, D. A review on singular spectrum analysis for economic and financial time series. *Statistics and Its Interface*, v. 3, 01 2010. Citado na página 207.

HAYKIN, S. S. *Communication systems*. 5th ed. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2009. ISBN 978-0-471-69790-9. Citado na página 85.

HINDLEY, N. P. et al. Stratospheric gravity waves over the mountainous island of South Georgia: testing a high-resolution dynamical model with 3-D satellite observations and radiosondes. *Atmospheric Chemistry and Physics*, v. 21, n. 10, p. 7695–7722, maio 2021. ISSN 1680-7316. Disponível em: <<https://acp.copernicus.org/articles/21/7695/2021/>>. Citado na página 81.

HINES, C. O. INTERNAL ATMOSPHERIC GRAVITY WAVES AT IONOSPHERIC HEIGHTS. *Canadian Journal of Physics*, v. 38, n. 11, p. 1441–1481, nov. 1960. ISSN 0008-4204, 1208-6045. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/p60-150>>. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 114.

HINES, C. O. Gravity Waves in the Atmosphere. *Nature*, v. 239, n. 5367, p. 73–78, set. 1972. ISSN 0028-0836, 1476-4687. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/239073a0>>. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 81.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; COLLINS, J. *Global Positioning System: theory and practice*. 5th, rev. ed. ed. New York: Springer-Verlag, 2001. ISBN 978-3-211-83534-0. Citado 4 vezes nas páginas 109, 110, 112 e 266.

HOLDEN, H.; PIENE, R. (Ed.). *The Abel Prize 2013-2017*. Cham, Switzerland: Springer Nature, 2019. ISBN 978-3-319-99028-6 978-3-319-99027-9. Citado na página 118.

HOLLWEG, J. V. Some physical processes in the solar wind. *Reviews of Geophysics*, v. 16, n. 4, p. 689–720, nov. 1978. ISSN 87551209. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/RG016i004p00689>>. Citado na página 57.

HOLTON, J. R.; ALEXANDER, M. J. Gravity waves in the mesosphere generated by tropospheric convection. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, v. 51, n. 1, p. 45–58, jan. 1999. ISSN null. Disponível em: <<https://doi.org/10.3402/tellusa.v51i1.12305>>. Citado na página 81.

HOLTON, J. R.; CURRY, J. A.; PYLE, J. A. *Encyclopedia of atmospheric sciences*. Amsterdam; Boston: Academic Press, 2003. OCLC: 61709500. ISBN 978-0-12-227090-1 978-0-12-227091-8 978-0-12-227092-5 978-0-12-227093-2 978-0-12-227094-9 978-0-12-227095-6 978-0-12-227096-3 978-0-08-052357-6. Disponível em: <<http://find.galegroup.com/gvrl/infomark.do?type=aboutBook&prodId=GVRL&isbn=9780080523576&version=1.0>>. Citado 5 vezes nas páginas 39, 40, 41, 68 e 70.

HOWARD, T. *Coronal mass ejections: an introduction*. New York: Springer, 2011. (Astrophysics and space science library). OCLC: ocn701812621. ISBN 9781441987884 9781441987891. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

HUANG, C.-M.; CHEN, Y.-S. (Ed.). *Telematics communication technologies and vehicular networks: wireless architectures and applications*. Hershey, PA: Information Science Reference, 2010. OCLC: ocn406133273. ISBN 978-1-60566-840-6 978-1-60566-841-3. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 112.

HUANG, N. E.; ATTOH-OKINE, N. O. (Ed.). *The Hilbert-Huang transform in engineering*. New York: Taylor & Francis, 2005. ISBN 9780849334221. Citado 5 vezes nas páginas 187, 192, 197, 201 e 202.

HUANG, N. E.; SHEN, S. S. (Ed.). *Hilbert-Huang transform and its applications*. 2nd edition. ed. [Hackensack] New Jersey: World Scientific, 2014. (Interdisciplinary mathematical sciences, vol. 16). ISBN 9789814508230. Citado 2 vezes nas páginas 187 e 191.

HUANG, N. E.; SHEN, Z.; LONG, S. R. A NEW VIEW OF NONLINEAR WATER WAVES: The Hilbert Spectrum. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 31, n. 1, p. 417–457, jan. 1999. ISSN 0066-4189, 1545-4479. Disponível em: <<https://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev.fluid.31.1.417>>. Citado na página 197.

HUANG, N. E. et al. The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 454, n. 1971, p. 903–995, 1998. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1998.0193>>. Citado 12 vezes nas páginas 187, 188, 189, 190, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 199 e 203.

HUANG, N. E. et al. A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 459, n. 2037, p. 2317–2345, set. 2003. ISSN 1364-5021, 1471-2946. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2003.1123>>. Citado na página 197.

HUANG, N. E.; WU, Z. A review on hilbert-huang transform: Method and its applications to geophysical studies. *Reviews of Geophysics*, v. 46, n. 2, 2008. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2007RG000228>>. Citado 2 vezes nas páginas 195 e 197.

HUNDHAUSEN, A. J. *Coronal Expansion and Solar Wind*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972. OCLC: 1157340066. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 55.

- HUNDHAUSEN, A. J.; BURKEPILE, J. T.; CYR, O. C. S. Speeds of coronal mass ejections: Smm observations from 1980 and 1984-1989. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 99, n. A4, p. 6543–6552, 1994. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/93JA03586>>. Citado na página 53.
- HUNG, R.; PHAN, T.; SMITH, R. Observation of gravity waves during the extreme tornado outbreak of 3 april 1974. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 40, n. 7, p. 831–843, 1978. ISSN 0021-9169. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021916978900338>>. Citado na página 6.
- HUNSUCKER, R. D. Atmospheric gravity waves generated in the high-latitude ionosphere: A review. *Reviews of Geophysics*, v. 20, n. 2, p. 293–315, 1982. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/RG020i002p00293>>. Citado na página 115.
- HUNSUCKER, R. D. The sources of gravity waves. *Nature*, v. 328, n. 6127, p. 204–205, jul. 1987. ISSN 0028-0836, 1476-4687. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/328204a0>>. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 81.
- HUNSUCKER, R. D.; HARGREAVES, J. K. *The high-latitude ionosphere and its effects on radio propagation*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2003. OCLC: 1090483570. ISBN 9780511065293 9780511535758 9786610414499. Disponível em: <<https://apps.uqo.ca/LoginSigparb/LoginPourRessources.aspx?url=http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&AN=120275>>. Citado 2 vezes nas páginas 102 e 103.
- IYEMORI, T. et al. Geomagnetic pulsations caused by the sumatra earthquake on december 26, 2004. *Geophysical Research Letters*, v. 32, n. 20, 2005. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2005GL024083>>. Citado na página 4.
- JUNIOR, E. C. et al. Ondas de Alfvén no meio interplanetário. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, n. 2, jun. 2011. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172011000200003&lng=pt&tlng=pt>. Citado na página 56.
- JUNIOR, E. C. et al. O vento solar e a atividade geomagnética. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 33, p. 4301 – 4301, 12 2011. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172011000400001&nrm=iso>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 51.
- KAISER, G. *A friendly guide to wavelets*. Boston: Birkhauser, 2011. (Modern Birkhauser classics). OCLC: ocn698740399. ISBN 9780817681104. Citado 2 vezes nas páginas 132 e 144.
- KAISER, T. The first suggestion of an ionosphere. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, Elsevier BV, v. 24, n. 10, p. 865, out. 1962. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9169\(62\)90183-6](https://doi.org/10.1016/0021-9169(62)90183-6)>. Citado na página 84.
- KALANTARI, M.; HASSANI, H. Automatic Grouping in Singular Spectrum Analysis. *Forecasting*, v. 1, n. 1, p. 1–16, October 2019. Disponível em: <<https://>>

[//ideas.repec.org/a/gam/jforec/v1y2019i1p13-204d281648.html](http://ideas.repec.org/a/gam/jforec/v1y2019i1p13-204d281648.html)>. Citado 2 vezes nas páginas 217 e 224.

KAMIDE, Y.; ROSTOKER, G. What is the physical meaning of the AE index? *Eos, Transactions American Geophysical Union*, v. 85, n. 19, p. 188, 2004. ISSN 0096-3941. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2004EO190010>>. Citado na página 48.

KAMIDE, Y. et al. Two-step development of geomagnetic storms. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 103, n. A4, p. 6917–6921, abr. 1998. ISSN 01480227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/97JA03337>>. Citado na página 51.

KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *Nonlinear Time Series Analysis*. 2. ed. Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521529020 9780521821506 9780511755798. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511755798/type/book>>. Citado na página 187.

KAPLAN, E.; HEGARTY, C. J. *Understanding GPS/GNSS: Principles and Applications, Third Edition*. 3rd. ed. USA: Artech House, Inc., 2017. ISBN 978-1-63081-058-0. Citado 3 vezes nas páginas 109, 110 e 111.

KASRAN, F. A. M. et al. Geomagnetically Induced Currents (GICs) in Equatorial Region. In: *2018 IEEE 8th International Conference on System Engineering and Technology (ICSET)*. Bandung: IEEE, 2018. p. 112–117. ISBN 9781538691809. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8606391/>>. Citado na página 52.

KELLEY, M. Ionosphere. In: HOLTON, J. R. (Ed.). *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*. Oxford: Academic Press, 2003. p. 1022–1030. ISBN 978-0-12-227090-1. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B0122270908001846>>. Citado na página 83.

KELLEY, M. C. *The earth's ionosphere: plasma physics and electrodynamics*. 2nd ed. ed. Amsterdam ; Boston: Academic Press, 2009. (International geophysics series, v. 96). OCLC: ocn264041552. ISBN 9780120884254. Citado 5 vezes nas páginas 68, 102, 105, 106 e 108.

KENNELLY, A. E. On the elevation of the electrically-conducting strata of the earth's atmosphere. *Electrical world and engineer*, v. 39, n. 11, p. 473, 1902. Citado na página 86.

KHERANI, E. et al. Traveling ionospheric disturbances propagating ahead of the Tohoku-Oki tsunami: a case study. *Geophysical Journal International*, v. 204, n. 2, p. 1148–1158, fev. 2016. ISSN 0956-540X, 1365-246X. Disponível em: <<https://academic.oup.com/gji/article-lookup/doi/10.1093/gji/ggv500>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 6.

KHERANI, E. A. et al. Modelling of the total electronic content and magnetic field anomalies generated by the 2011 Tohoku-Oki tsunami and associated acoustic-gravity waves. *Geophysical Journal International*, v. 191, n. 3, p. 1049–1066, 2012. ISSN 1365-246X. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1365-246X.2012.05617.x>>. Citado na página 5.

KING, F. W. *Hilbert transforms*. Cambridge [Eng.] ; New York: Cambridge University Press, 2009. (Encyclopedia of mathematics and its applications, 124-125). OCLC: ocn299942188. ISBN 9780521887625 9780521517201. Citado na página 189.

KIVELSON, M. G.; RUSSELL, C. T. (Ed.). *Introduction to space physics*. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 1995. ISBN 9780521451048 9780521457149. Citado 11 vezes nas páginas 2, 50, 58, 91, 92, 95, 97, 102, 105, 106 e 107.

KLAUSNER, V. et al. Chile 2015: Induced Magnetic Fields on the Z Component by Tsunami Wave Propagation. *Pure and Applied Geophysics*, v. 173, n. 5, p. 1463–1478, maio 2016. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 9, 261 e 276.

KLAUSNER, V. et al. First report on seismogenic magnetic disturbances over brazilian sector. *Pure and Applied Geophysics*, v. 174, n. 3, p. 737–745, Mar 2017. ISSN 1420-9136. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00024-016-1455-0>>. Citado na página 7.

KLAUSNER, V.; CEZARINI, M. V.; SANTOS, T. d. A. Perturbações no campo geomagnético causadas pelo terremoto e pelo tsunami de maule, chile (2010). *Revista de Geociências do Nordeste*, v. 6, n. 2, p. 283–291, dez. 2020. ISSN 2447-3359. Disponível em: <<https://periodicos.ufrn.br/revistadoregne/article/view/21687>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 82.

KLAUSNER, V. et al. Geomagnetic Disturbances During the Maule (2010) Tsunami Detected by Four Spatiotemporal Methods. *Pure and Applied Geophysics*, v. 178, n. 12, p. 4815–4835, dez. 2021. ISSN 0033-4553, 1420-9136. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s00024-021-02823-x>>. Citado 11 vezes nas páginas 4, 245, 246, 257, 259, 260, 261, 262, 263, 264 e 276.

KLAUSNER, V.; KHERANI, E. A.; MUELLA, M. T. A. H. Near- and far-field tsunamigenic effects on the Z component of the geomagnetic field during the Japanese event, 2011. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, v. 121, n. 2, p. 1772–1779, fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 7.

KLAUSNER, V. et al. Principal component analysis in the modeling of HILDCAAs during the Solar Minimum of Cycle 23/24. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, v. 213, p. 105516, fev. 2021. ISSN 13646826. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1364682620303163>>. Citado 7 vezes nas páginas 27, 3, 227, 238, 239, 241 e 275.

KLAUSNER, V.; MACEDO, H. G.; PRESTES, A. Ahead-of-Tsunami Magnetic Disturbance Detection Using Intrinsic Mode Functions: Tohoku-Oki Earthquake Case Study. *Pure and Applied Geophysics*, jan. 2022. ISSN 0033-4553, 1420-9136. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s00024-021-02919-4>>. Citado na página 4.

KLAUSNER, V. et al. Advantage of wavelet technique to highlight the observed geomagnetic perturbations linked to the chilean tsunami (2010). *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 119, n. 4, p. 3077–3093, 2014. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2013JA019398>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 7.

KLAUSNER, V. et al. Study of local regularities in solar wind data and ground magnetograms. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, v. 112, p. 10–19, 2014. ISSN 1364-6826. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364682614000261>>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 139 e 276.

KNIGHT, R. D. *Physics for scientists and engineers: a strategic approach*. 4/e. ed. Boston: Pearson, 2017. ISBN 9780134081496. Citado na página 65.

- KOGA, D. et al. Electrodynamic coupling processes between the magnetosphere and the equatorial ionosphere during a 5-day hildcaa event. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, v. 73, n. 1, p. 148–155, 2011. ISSN 1364-6826. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364682610002622>>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 61.
- Kondrashov, D.; Ghil, M. Spatio-temporal filling of missing points in geophysical data sets. *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 13, n. 2, p. 151–159, may 2006. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2006NPGeo..13..151K>>. Citado na página 206.
- KOPSINIS, Y.; MCLAUGHLIN, S. Improved EMD Using Doubly-Iterative Sifting and High Order Spline Interpolation. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, v. 2008, n. 1, p. 128293, 2008. ISSN 1687-6180. Disponível em: <<http://asp.eurasipjournals.com/content/2008/1/128293>>. Citado na página 193.
- KOROBAYNIKOV, A. Computation- and space-efficient implementation of ssa. *Stat. Interface*, v. 3, 11 2009. Citado na página 219.
- KOZYRA, J. U. et al. Modeling of the contribution of electromagnetic ion cyclotron (emic) waves to stormtime ring current erosion. In: _____. *Magnetic Storms*. American Geophysical Union (AGU), 1997. p. 187–202. ISBN 9781118664612. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/GM098p0187>>. Citado na página 60.
- KUCERA, T.; CRANNELL, C. J. Solar physics. In: MEYERS, R. A. (Ed.). *Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*. Third edition. New York: Academic Press, 2002. p. 127–147. ISBN 978-0-12-227410-7. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B0122274105007018>>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- KUSKY, T. M. *Earthquakes: plate tectonics and earthquake hazards*. New York: Facts On File, 2008. (The hazardous Earth). OCLC: ocn132681501. ISBN 9780816064625. Citado na página 3.
- LAERTIUS, D.; MENSCH, P.; MILLER, J. *Lives of the eminent philosophers*. [S.l.: s.n.], 2020. OCLC: 1200510659. ISBN 9780197523391. Citado na página 16.
- LAKHINA, G. S. et al. On magnetic storms and substorms. In: Gopalswamy, N.; Bhattacharyya, A. (Ed.). *Proceedings of the ILWS Workshop*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 320. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 45.
- LAKHINA, G. S. et al. Supermagnetic storms: Hazard to society. In: _____. *Extreme Events and Natural Hazards: The Complexity Perspective*. American Geophysical Union (AGU), 2012. p. 267–278. ISBN 9781118670187. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2011GM001073>>. Citado 3 vezes nas páginas 48, 50 e 51.
- LAKHINA, G. S.; TSURUTANI, B. T. Geomagnetic storms: historical perspective to modern view. *Geoscience Letters*, v. 3, n. 1, p. 5, dez. 2016. ISSN 2196-4092. Disponível em: <<https://geoscienceletters.springeropen.com/articles/10.1186/s40562-016-0037-4>>. Citado na página 51.

LANZA, R.; MELONI, A. *The earth's magnetism: an introduction for geologists*. Berlin ; New York: Springer, 2006. OCLC: ocm71227137. ISBN 9783540279792. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 15, 38 e 41.

LARMOR, J. Why Wireless Electric Rays can bend round the Earth. *Nature*, v. 114, n. 2870, p. 650–651, nov. 1924. ISSN 0028-0836, 1476-4687. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/114650a0>>. Citado na página 88.

LEMARIÉ, P.-G. Ondelettes à localisation exponentielle. *J. Math. Pures Appl.*, v. 67, p. 227–236, 1988. Citado na página 145.

LI, W.; HUDSON, M. Earth's Van Allen Radiation Belts: From Discovery to the Van Allen Probes Era. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 124, n. 11, p. 8319–8351, nov. 2019. ISSN 2169-9380, 2169-9402. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2018JA025940>>. Citado na página 43.

LIN, P. et al. Grouping and Selecting Singular Spectrum Analysis Components for Denoising Via Empirical Mode Decomposition Approach. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, v. 38, n. 1, p. 356–370, jan. 2019. ISSN 0278-081X, 1531-5878. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00034-018-0861-1>>. Citado 2 vezes nas páginas 195 e 217.

LIU, P. *Advances in Coastal and Ocean Engineering*. World Scientific, 2000. (Advances in Coastal and Ocean Engineering, v. 6). ISBN 978-981-02-4136-0. Disponível em: <<https://books.google.com/books?id=BPgrpYx-hhsC>>. Citado na página 124.

LOPEZ, R. E. Magnetospheric substorms. *Johns Hopkins APL Technical Digest*, v. 11, p. 264–271, dez. 1990. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.

MAEDA, H. Variation in geomagnetic field. *Space Science Reviews*, v. 8, n. 4, set. 1968. ISSN 0038-6308, 1572-9672. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF00175007>>. Citado na página 1.

MALLAT, S. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 37, n. 12, p. 2091–2110, dez. 1989. ISSN 0096-3518. Conference Name: IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Citado 2 vezes nas páginas 182 e 183.

MALLAT, S. G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $\{L^2(\mathbb{R})\}$. *Transactions of the American mathematical society*, v. 315, n. 1, p. 69–87, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 146 e 149.

MALLAT, S. G. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way*. 3rd ed. ed. Amsterdam ; Boston: Elsevier/Academic Press, 2009. ISBN 9780123743701. Citado 7 vezes nas páginas 119, 123, 132, 136, 142, 145 e 157.

MANOJ, C. et al. Ocean circulation generated magnetic signals. *Earth, Planets and Space*, v. 58, n. 4, p. 429–437, abr. 2006. ISSN 1880-5981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/BF03351939>>. Citado na página 5.

MANOJ, C. et al. Can undersea voltage measurements detect tsunamis? *Earth, Planets and Space*, v. 62, n. 3, p. 353–358, mar. 2010. ISSN 1880-5981. Disponível em: <<https://doi.org/10.5047/eps.2009.10.001>>. Citado na página 5.

MATSUOKA, M. T.; CAMARGO, P. d. O.; BATISTA, I. S. Análise da ionosfera usando dados de receptores GPS durante um período de alta atividade solar e comparação com dados de Digissondas. *Revista Brasileira de Geofísica*, v. 27, p. 565–582, dez. 2009. ISSN 0102-261X. Publisher: Sociedade Brasileira de Geofísica. Disponível em: <<http://www.scielo.br/j/rbg/a/B45cLCkn7jqBPRJR6VFqzC/?lang=pt>>. Citado na página 114.

MAYAUD, P.-N. *Derivation, meaning, and use of geomagnetic indices*. Washington: American Geophysical Union, 1980. (Geophysical monograph ; 22). ISBN 9780875900223. Citado 5 vezes nas páginas 3, 44, 45, 47 e 49.

MCFADDEN, L.-A. A.; WEISSMAN, P. R.; JOHNSON, T. V. (Ed.). *Encyclopedia of the solar system*. 2nd ed. ed. Amsterdam ; Boston: Academic Press, 2007. ISBN 978-0-12-088589-3. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 42.

MCLEAN, W. A. A. M. b. C. H. . J. *Wavelet Analysis And Method by Carmen Hurley & Jaden Mclean*. London: [s.n.], 2018. ISBN 978-1-78882-122-3. Citado na página 144.

MCPHERRON, R. L. Growth phase of magnetospheric substorms. *Journal of Geophysical Research*, v. 75, n. 28, p. 5592–5599, out. 1970. ISSN 01480227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/JA075i028p05592>>. Citado na página 57.

MCPHERRON, R. L. Magnetospheric substorms. *Reviews of Geophysics*, v. 17, n. 4, p. 657, 1979. ISSN 8755-1209. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/RG017i004p00657>>. Citado na página 58.

MENG, H. et al. Time-frequency analysis of Hilbert spectrum of pressure fluctuation time series in a Kenics Static Mixer based on empirical mode decomposition. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, v. 29, n. 1, p. 167–182, mar. 2012. ISSN 0104-6632. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-66322012000100018&lng=en&tlng=en>. Citado na página 187.

MENVIELLE, M. et al. Geomagnetic indices. In: _____. *Geomagnetic Observations and Models*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011. p. 183–228. ISBN 978-90-481-9858-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-90-481-9858-0_8>. Citado 5 vezes nas páginas 44, 46, 47, 48 e 49.

MERRILL, K. D. *Generalized Multiresolution Analyses*. 1st ed. 2018. ed. Cham: Springer International Publishing : Imprint: Birkhäuser, 2018. (Lecture Notes in Applied and Numerical Harmonic Analysis). ISBN 978-3-319-99175-7. Citado na página 146.

MERRILL, R. T.; MCELHINNY, M. W. *The earth's magnetic field: its history, origin, and planetary perspective*. London ; New York: Academic Press, 1983. (International geophysics series, v. 32). ISBN 978-0-12-491240-3 978-0-12-491242-7. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 35.

MERRILL, R. T.; MCELHINNY, M. W.; MCFADDEN, P. L. *The magnetic field of the earth: paleomagnetism, the core, and the deep mantle*. San Diego, Calif: Academic Press, 1996. (International geophysics series, v. 63). ISBN 9780124912458. Citado 5 vezes nas páginas 1, 16, 17, 18 e 30.

- MEYER, Y. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs. *Séminaire Bourbaki*, v. 662, p. 1985–1986, 1985. Publisher: Societe Mathematique de France. Citado na página 144.
- MEYER, Y. Ondelettes et fonctions splines. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)*, p. 1–18, 1986. Citado na página 146.
- MEYER, Y. *Wavelets: Algorithms & Applications*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993. Google-Books-ID: 0vpQAAAAMAAJ. ISBN 978-0-89871-309-1. Citado na página 181.
- MINAMI, T. Motional Induction by Tsunamis and Ocean Tides: 10 Years of Progress. *Surveys in Geophysics*, v. 38, n. 5, p. 1097–1132, set. 2017. ISSN 0169-3298, 1573-0956. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10712-017-9417-3>>. Citado na página 5.
- MULLAN, D. J. *Physics of the sun: a first course*. [S.l.: s.n.], 2010. OCLC: 946846704. ISBN 9781420083088. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.
- NAPPO, C. J. *An introduction to atmospheric gravity waves*. 2nd ed. ed. Waltham, MA: Elsevier, 2013. ISBN 9780123852236. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 80.
- NASON, G. P. *Wavelet methods in statistics with R*. New York ; London: Springer, 2008. (Use R!). OCLC: ocn226974715. ISBN 978-0-387-75960-9. Citado na página 158.
- NICOLLS, M. J. et al. Imaging the structure of a large-scale tid using isr and tec data. *Geophysical Research Letters*, v. 31, n. 9, 2004. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2004GL019797>>. Citado na página 6.
- Chapter 7 - Ionosphere-thermosphere interaction. In: NISHIMURA, Y. et al. (Ed.). *Cross-Scale Coupling and Energy Transfer in the Magnetosphere-Ionosphere-Thermosphere System*. Elsevier, 2022. p. 441–546. ISBN 978-0-12-821366-7. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128213667000032>>. Citado na página 116.
- OBODOVSKIY, I. *Radiation: fundamentals, applications, risks, and safety*. Amsterdam: Elsevier, 2019. ISBN 978-0-444-63979-0. Citado na página 43.
- OTSUKA, Y. et al. Statistical study of medium-scale traveling ionospheric disturbances observed with a gps receiver network in japan. In: _____. *Aeronomy of the Earth's Atmosphere and Ionosphere*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011. p. 291–299. ISBN 978-94-007-0326-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-0326-1_21>. Citado na página 116.
- OTSUKA, Y. et al. Solar activity dependence of medium-scale traveling ionospheric disturbances using GPS receivers in Japan. *Earth, Planets and Space*, v. 73, n. 1, p. 22, dez. 2021. ISSN 1880-5981. Disponível em: <<https://earth-planets-space.springeropen.com/articles/10.1186/s40623-020-01353-5>>. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 116.
- OTSUKA, Y. et al. GPS observations of medium-scale traveling ionospheric disturbances over Europe. *Annales Geophysicae*, v. 31, n. 2, p. 163–172, fev. 2013. ISSN 1432-0576. Disponível em: <<https://angeo.copernicus.org/articles/31/163/2013/>>. Citado na página 115.

- OUAHABI, A. (Ed.). *Signal and image multiresolution analysis*. London : Hoboken, N.J: ISTE ; Wiley, 2012. (Digital signal and image processing series). OCLC: ocn818735189. ISBN 978-1-84821-257-2. Citado 2 vezes nas páginas 146 e 182.
- OWEIS, R. J.; ABDULHAY, E. W. Seizure classification in EEG signals utilizing Hilbert-Huang transform. *BioMedical Engineering OnLine*, v. 10, n. 1, p. 38, 2011. ISSN 1475-925X. Disponível em: <<http://biomedical-engineering-online.biomedcentral.com/articles/10.1186/1475-925X-10-38>>. Citado na página 187.
- OYAMA, S. et al. Generation of atmospheric gravity waves associated with auroral activity in the polar *F* region. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 106, n. A9, p. 18543–18554, set. 2001. ISSN 01480227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2001JA900032>>. Citado na página 81.
- OYEDOKUN, D. T.; CILLIERS, P. J. Geomagnetically Induced Currents: A Threat to Modern Power Systems. In: *Classical and Recent Aspects of Power System Optimization*. Elsevier, 2018. p. 421–462. ISBN 978-0-12-812441-3. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780128124413000161>>. Citado na página 2.
- PARKER, E. N. Dynamics of the Geomagnetic Storm. *Space Science Reviews*, v. 1, n. 1, p. 62–99, jun. 1962. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 51.
- PELTIER, W. R.; HINES, C. O. On the possible detection of tsunamis by a monitoring of the ionosphere. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, v. 81, n. 12, p. 1995–2000, 1976. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JC081i012p01995>>. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 82.
- PENG, Z.; TSE, P. W.; CHU, F. An improved Hilbert–Huang transform and its application in vibration signal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 286, n. 1-2, p. 187–205, ago. 2005. ISSN 0022460X. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X04007928>>. Citado na página 197.
- PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. *Wavelet methods for time series analysis*. 1. paperback ed., reprinted. ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. (Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics, 4). ISBN 978-0-521-68508-5 978-0-521-64068-8. Citado na página 119.
- PEREYRA, M. C.; WARD, L. A. *Harmonic analysis: from Fourier to wavelets*. Providence, R.I. : Princeton, N.J: American Mathematical Society ; Institute for Advanced Study, 2012. (Student mathematical library, 63. IAS/Park City mathematical subseries). ISBN 978-0-8218-7566-7. Citado 3 vezes nas páginas 156, 185 e 186.
- PERUZZO, J. *Teoria Da Relatividade Especial*. Clube de Autores, 2017. ISBN 978-85-913398-1-5. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=pBRKEAAAQBAJ>>. Citado na página 112.
- PETERS, T. M.; WILLIAMS, J. C.; BATES, J. H. T. (Ed.). *The Fourier transform in biomedical engineering*. Boston: Birkhäuser, 1998. (Applied and numerical harmonic analysis). ISBN 978-0-8176-3941-9. Citado na página 119.

PETROPOULOS, G. P.; SRIVASTAVA, P. K. *GPS and GNSS Technology in Geosciences*. [S.l.]: Elsevier, 2021. Google-Books-ID: hxIfEAAAQBAJ. ISBN 978-0-12-819693-9. Citado 4 vezes nas páginas 105, 107, 108 e 113.

PETROVSKI, I. G. *GPS, GLONASS, Galileo, and BeiDou for Mobile Devices: From Instant to Precise Positioning*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. Google-Books-ID: PqpkAAQBAJ. ISBN 978-1-107-03584-3. Citado na página 114.

PICCINELLI, R.; KRAUSMANN, E. Space weather and power grids - a vulnerability assessment. 12 2014. Citado na página 46.

PIKE, R. et al. Generalized information theory for inverse problems in signal processing. *Communications, Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F*, v. 131, p. 660 – 667, 11 1984. Citado na página 206.

PRESTES, A. et al. Statistical analysis of solar wind parameters and geomagnetic indices during HILDCAA/HILDCAA* occurrences between 1998 and 2007. *Advances in Space Research*, v. 60, n. 8, p. 1850–1865, out. 2017. ISSN 02731177. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0273117717304490>>. Citado na página 238.

PRONY, G. C. de. *Essai expérimental et analytique sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et la vapeur de l'alkool, à différentes températures*. [s.n.], 1795. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-7bFPgAACAAJ>>. Citado na página 206.

PUGH, D.; WOODWORTH, P. *Sea-level science: understanding tides, surges, tsunamis and mean sea-level changes*. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2014. ISBN 9781107028197. Citado na página 4.

QIU, T.; GUO, Y.; PRESS, T. *Signal Processing and Data Analysis*. De Gruyter, 2018. (De Gruyter Textbook). ISBN 9783110465082. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VSZqDwAAQBAJ>>. Citado na página 189.

RASSON, J. L. Observatories, Intermagnet. In: GUBBINS, D.; HERRERO-BERVERA, E. (Ed.). *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2007. p. 715–717. ISBN 9781402039928. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4020-4423-6_227>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 245.

RATCLIFFE, J. *Physics of the Upper Atmosphere*. Academic Press, 1960. ISBN 978-0-12-582050-9. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=LMIImAAAAMAAJ>>. Citado na página 67.

RICHARDS, J. A. *Radio wave propagation: an introduction for the non-specialist*. Berlin: Springer, 2008. OCLC: 244009937. ISBN 9783540771241 9783540771258. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 106.

RICHARDSON, I. G. Solar wind stream interaction regions throughout the heliosphere. *Living Reviews in Solar Physics*, v. 15, n. 1, p. 1, dez. 2018. ISSN 2367-3648, 1614-4961. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s41116-017-0011-z>>. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.

- RILLING, G.; FLANDRIN, P. One or two frequencies? the empirical mode decomposition answers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 56, n. 1, p. 85–95, 2008. Citado na página 194.
- RISHBETH, H. Ionospheric Science and Geomagnetism. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 32, p. 409, dez. 1991. ISSN 0035-8738. ADS Bibcode: 1991QJRAS..32..409R. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1991QJRAS..32..409R>>. Citado na página 85.
- RISHBETH, H.; GARRIOTT, O. K. *Introduction to ionospheric physics*. Amsterdam: Academic Press, 1969. OCLC: 428097375. ISBN 9780125889407. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/book/9780125889407>>. Citado 14 vezes nas páginas 30, 38, 66, 68, 70, 71, 72, 74, 84, 88, 91, 93, 94 e 115.
- ROBERTSON, A. W.; VITART, F. (Ed.). *Sub-seasonal to seasonal prediction: the gap between weather and climate forecasting*. Amsterdam, Netherlands ; Cambridge, MA, United States: Elsevier Inc, 2019. OCLC: on1065114475. ISBN 978-0-12-811714-9. Citado na página 68.
- ROCHE, J. J. (Ed.). *Physicists look back: studies in the history of physics*. Bristol ; New York: Adam Hilger, 1990. ISBN 978-0-85274-001-9. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.
- ROSSIGNOL, J.-C. Magnetic field anomalies associated with geodynamic phenomena. *Geophysical surveys*, v. 4, n. 4, p. 435–454, Feb 1982. ISSN 1573-0956. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01449110>>. Citado na página 4.
- ROSTOKER, G. et al. Magnetospheric substorms—definition and signatures. *Journal of Geophysical Research*, v. 85, n. A4, p. 1663, 1980. ISSN 0148-0227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/JA085iA04p01663>>. Citado na página 57.
- ROSTOKER, G.; FRIEDRICH, E.; DOBBS, M. Physics of magnetic storms. In: TSURUTANI, B. T. et al. (Ed.). *Geophysical Monograph Series*. Washington, D. C.: American Geophysical Union, 1997. v. 98, p. 149–160. ISBN 9780875900803. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/GM098p0149>>. Citado na página 50.
- Royal Society. *Title page of William Gilbert's 'De Magnete' posters & prints by Peter Rollos I*. 2021. Disponível em: <<https://prints.royalsociety.org/products/title-page-of-william-gilberts-de-magnete-rs-10433>>. Acesso em: 25 mai 2021. Citado na página 19.
- RUSSELL, A. The kennelly-heaviside layer. *Nature*, v. 116, n. 2921, p. 609–609, Oct 1925. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/116609c0>>. Citado na página 88.
- RUSSELL, C. The polar cusp. *Advances in Space Research*, v. 25, n. 7-8, p. 1413–1424, jan. 2000. ISSN 02731177. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0273117799006535>>. Citado na página 43.
- RUSSELL, C. T.; LUHMANN, J. G.; STRANGWAY, R. J. *Space physics*. New York, NY: Cambridge University Press, 2016. ISBN 978-1-107-09882-4. Citado na página 102.

RUSSELL, C. T.; MCPHERRON, R. L.; BURTON, R. K. On the cause of geomagnetic storms. *Journal of Geophysical Research*, v. 79, n. 7, p. 1105–1109, mar. 1974. ISSN 01480227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/JA079i007p01105>>. Citado na página 2.

SAHA, K. *The earth's atmosphere: its physics and dynamics*. Berlin: Springer, 2008. OCLC: ocn213114189. ISBN 9783540784265. Citado 3 vezes nas páginas 64, 66 e 69.

SALBY, M. L. *Physics of the atmosphere and climate*. 2nd ed. ed. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2012. OCLC: ocn738337796. ISBN 9780521767187. Citado na página 68.

SANDHOLT, P. E.; EGELAND, A.; LYBEKK, B. *The polar cusp: Particle-, optical- and geomagnetic manifestations of solar wind - magnetosphere interaction*. Norway, 1985. 65 p. OUP–85-16. Disponível em: <http://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:17006225>. Citado na página 43.

SANEI, S.; HASSANI, H. *Singular spectrum analysis of biomedical signals*. 2016. OCLC: 957673599. Citado 3 vezes nas páginas 206, 207 e 211.

SAVASTANO, G. et al. Real-Time Detection of Tsunami Ionospheric Disturbances with a Stand-Alone GNSS Receiver: A Preliminary Feasibility Demonstration. *Scientific Reports*, v. 7, n. 1, p. 46607, jun. 2017. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/srep46607>>. Citado na página 6.

SCHUNK, R. W.; NAGY, A. *Ionospheres: physics, plasma physics, and chemistry*. 2nd ed. ed. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2009. (Cambridge atmospheric and space science series). OCLC: ocn421784436. ISBN 9780521877060. Citado 3 vezes nas páginas 83, 90 e 108.

SCHUSTER, A. XV. The diurnal variation of terrestrial magnetism. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)*, v. 180, p. 467–518, dez. 1889. ISSN 0264-3820, 2053-9231. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1889.0015>>. Citado na página 85.

SCHUSTER, A. IV. The diurnal variation of terrestrial magnetism. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, v. 208, n. 427-440, p. 163–204, jan. 1908. ISSN 0264-3952, 2053-9258. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1908.0017>>. Citado na página 85.

SEEMALA, G. K.; VALLADARES, C. E. Statistics of total electron content depletions observed over the South American continent for the year 2008: STATISTICS OF TEC DEPLETIONS. *Radio Science*, v. 46, n. 5, p. n/a–n/a, out. 2011. ISSN 00486604. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2011RS004722>>. Citado na página 267.

SENGODAN, T.; MURUGAPPAN, M.; MISRA, S. *Advances in Electrical and Computer Technologies Select Proceedings of ICAECT 2019*. [S.l.: s.n.], 2020. OCLC: 1204052609. ISBN 9789811555589. Citado na página 268.

SHARPLEY, R.; VATCHEV, V. Analysis of the intrinsic mode functions. *Constructive Approximation*, v. 24, p. 17–47, 04 2006. Citado 2 vezes nas páginas 193 e 194.

- SHIMA, H. *Functional analysis for physics and engineering: an introduction*. Boca Raton London New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, CRC Press is an imprint of the Taylor & Francis Group, an informa business, 2016. ISBN 978-1-4822-2303-3 978-1-4822-2301-9. Citado na página 129.
- SHINAGAWA, H. et al. Global distribution of neutral wind shear associated with sporadic *E* layers derived from GAIA: Wind Shear Associated With Sporadic *E*. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 122, n. 4, p. 4450–4465, abr. 2017. ISSN 21699380. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/2016JA023778>>. Citado na página 107.
- SHRIVASTAVA, M. N. et al. Tsunami detection by GPS-derived ionospheric total electron content. *Scientific Reports*, v. 11, n. 1, p. 12978, dez. 2021. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/s41598-021-92479-3>>. Citado na página 6.
- SICKLE, J. V. *GPS for Land Surveyors*. [S.l.]: CRC Press, 2001. ISBN 978-1-4200-5574-0. Citado na página 114.
- SILBERSTEIN, R. The origin of the current nomenclature for the ionospheric layers. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 13, n. 3-4, p. 382, fev. 1959. ISSN 00219169. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021916959901308>>. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 103.
- SIVAKANDAN, M. et al. Comparison of seasonal and longitudinal variation of daytime MSTID activity using GPS observation and GAIA simulations. *Earth, Planets and Space*, v. 73, n. 1, p. 35, fev. 2021. ISSN 1880-5981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/s40623-021-01369-5>>. Citado na página 115.
- SKINNER, B. J.; MURCK, B. W. *The blue planet: an introduction to earth system science*. 3rd ed. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2011. OCLC: ocn144529744. ISBN 9780471236436. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 13.
- SMITH, M. William Gilbert (1544–1603): Physician and Founder of Electricity. *Journal of Medical Biography*, v. 5, n. 3, p. 137–145, ago. 1997. ISSN 0967-7720, 1758-1087. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/096777209700500303>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- SMULYAN, H. et al. Wireless: The Life and Death of Guglielmo Marconi. *The American Journal of the Medical Sciences*, v. 353, n. 6, p. 511–515, jun. 2017. ISSN 00029629. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0002962916307297>>. Citado na página 85.
- SOLOMON, S. C.; ROBLE, R. G. Thermosphere. In: NORTH, G. R.; PYLE, J.; ZHANG, F. (Ed.). *Encyclopedia of Atmospheric Sciences (Second Edition)*. Oxford: Academic Press, 2015. p. 402–408. ISBN 978-0-12-382225-3. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123822253004084>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.
- SOMAN, K. P.; RAMACHANDRAN, K. I.; RESMI, N. G. *Insight into wavelets: from theory to practice*. New Delhi [India: PHI Learning, 2010. OCLC: 646695422. ISBN 9788120326507. Citado na página 130.

SONG, J. guo et al. Decomposition of seismic signal based on hilbert-huang transform. In: *2011 International Conference on Business Management and Electronic Information*. [S.l.: s.n.], 2011. v. 1, p. 813–816. Citado na página 187.

SPEIGHT, J. G. *Environmental organic chemistry for engineers*. Amsterdam ; Boston: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2017. OCLC: ocn969778366. ISBN 978-0-12-804492-6. Citado na página 69.

SPEIGHT, J. G. *Natural water remediation: chemistry and technology*. Oxford, United Kingdom ; Cambridge, MA, United States: Butterworth-Heinemann, 2020. ISBN 978-0-12-803810-9. Citado na página 70.

ST-LOUIS, B. *INTERMAGNET Technical Reference Manual*. 2020. <https://intermagnet.github.io/docs/Technical-Manual/technical_manual.pdf>. (Acesso em 07/06/2021). Citado na página 248.

STRÖMBERG, J.-O. A modified Franklin system and higher-order spline systems on R_n as unconditional bases for Hardy spaces. In: *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund*. [S.l.]: Wadsworth Belmont, CA, 1982. v. 2, p. 475–494. Citado na página 144.

STUART, S. *Physics 1942 – 1962: Including Presentation Speeches and Laureates' Biographies*. Elsevier Science, 2013. ISBN 978-1-4832-2249-3. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=frE4BQAAQBAJ>>. Citado na página 90.

SUGIURA, M. Hourly values of equatorial dst for the igy. *Ann. Int. Geophys. Yr.*, v. 35, 1 1964. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/4554034>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

Chapter 5 - wavelet signal processing. In: SUTER, B. W. (Ed.). *Multirate and Wavelet Signal Processing*. Academic Press, 1998, (Wavelet Analysis and Its Applications, v. 8). p. 167–190. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1874608X98800502>>. Citado na página 120.

SUTHERLAND, B. R. *Internal Gravity Waves*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511780318. Disponível em: <<http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CBO9780511780318>>. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 77.

SØRAAS, F. et al. Evidence for particle injection as the cause of dst reduction during hildcaa events. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, v. 66, n. 2, p. 177–186, 2004. ISSN 1364-6826. Space Weather in the Declining Phase of the Solar Cycle. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364682603002086>>. Citado na página 60.

TAMAZIN, M.; KARAIM, M.; NOURELDIN, A. GNSSs, Signals, and Receivers. In: RUSTAMOV, R. B.; HASHIMOV, A. M. (Ed.). *Multifunctional Operation and Application of GPS*. InTech, 2018. ISBN 978-1-78923-214-1 978-1-78923-215-8. Disponível em: <<http://www.intechopen.com/books/multifunctional-operation-and-application-of-gps/gnss-signals-and-receivers>>. Citado na página 113.

TASCIONE, T. F. *Introduction to the space environment*. 2. ed. reprint with new material. ed. Malabar, Fla: Krieger Publishing, 2010. (Orbit). OCLC: 930774209. ISBN 9780894640711. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 107.

- TAYLOR, J. E. Characteristics of electric earth-current disturbances, and their origin. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 71, n. 467-476, p. 225–227, jun. 1903. ISSN 0370-1662, 2053-9126. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspl.1902.0088>>. Citado na página 88.
- TEOLIS, A. *Computational Signal Processing with Wavelets*. [s.n.], 1998. OCLC: 1165518937. ISBN 9781461241423 9781461286721. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4142-3>>. Citado 2 vezes nas páginas 181 e 182.
- TOH, H. et al. Tsunami signals from the 2006 and 2007 Kuril earthquakes detected at a seafloor geomagnetic observatory. *Journal of Geophysical Research*, v. 116, n. B2, p. B02104, fev. 2011. ISSN 0148-0227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2010JB007873>>. Citado na página 5.
- TOMITA, S. et al. Magnetic local time dependence of geomagnetic disturbances contributing to the au and al indices. *Annales Geophysicae*, v. 29, p. 673–678, 04 2011. Citado na página 47.
- TONG, H. *Non-linear time series: a dynamical system approach*. Reprinted. Oxford: Clarendon Press, 2003. (Oxford statistical science series, 6). ISBN 9780198523000. Citado na página 187.
- TRANSPORTATION, U. S. C. H. C. o.; GUARD, I. S. o. C.; TRANSPORTATION, M. *Coast Guard Budget Authorization for Fiscal Year 1996: Hearings Before the Subcommittee on Coast Guard and Maritime Transportation of the Committee on Transportation and Infrastructure, House of Representatives, One Hundred Fourth Congress, First Session, February 14 and 15, 1995*. U.S. Government Printing Office, 1995. ISBN 978-0-16-047289-3. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=B18SAAAAYAAJ>>. Citado na página 111.
- TSUGAWA, T. et al. Medium-scale traveling ionospheric disturbances detected with dense and wide TEC maps over North America. *Geophysical Research Letters*, v. 34, n. 22, p. L22101, nov. 2007. ISSN 0094-8276. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2007GL031663>>. Citado na página 116.
- TSUGAWA, T. et al. Ionospheric disturbances detected by GPS total electron content observation after the 2011 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake. *Earth, Planets and Space*, v. 63, n. 7, p. 875–879, jul. 2011. ISSN 1343-8832, 1880-5981. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.5047/eps.2011.06.035>>. Citado na página 4.
- TSURUTANI, B. et al. The interplanetary causes of magnetic storms, HILDCAAs and viscous interaction. *Physics and Chemistry of the Earth, Part C: Solar, Terrestrial & Planetary Science*, v. 24, n. 1-3, p. 93–99, jan. 1999. ISSN 14641917. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1464191798000142>>. Citado na página 52.
- TSURUTANI, B. T. The extreme magnetic storm of 1–2 September 1859. *Journal of Geophysical Research*, v. 108, n. A7, p. 1268, 2003. ISSN 0148-0227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2002JA009504>>. Citado na página 51.
- TSURUTANI, B. T.; GONZALEZ, W. D. The cause of high-intensity long-duration continuous AE activity (HILDCAAs): Interplanetary Alfvén wave trains. *Planetary*

and Space Science, v. 35, n. 4, p. 405–412, abr. 1987. ISSN 00320633. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0032063387900973>>. Citado 10 vezes nas páginas 19, 3, 6, 9, 60, 61, 227, 230, 231 e 275.

TSURUTANI, B. T.; GONZALEZ, W. D. The Interplanetary causes of magnetic storms: A review. In: TSURUTANI, B. T. et al. (Ed.). *Geophysical Monograph Series*. Washington, D. C.: American Geophysical Union, 1997. v. 98, p. 77–89. ISBN 9780875900803. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/GM098p0077>>. Citado na página 61.

TSURUTANI, B. T. et al. Interplanetary origin of geomagnetic activity in the declining phase of the solar cycle. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 100, n. A11, p. 21717–21733, nov. 1995. ISSN 01480227. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/95JA01476>>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 61.

TSURUTANI, B. T. et al. Are high-intensity long-duration continuous ae activity (hildcaa) events substorm expansion events? *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, v. 66, n. 2, p. 167–176, 2004. ISSN 1364-6826. Space Weather in the Declining Phase of the Solar Cycle. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364682603002128>>. Citado 3 vezes nas páginas 3, 60 e 61.

TSURUTANI, B. T. et al. Large amplitude IMF fluctuations in corotating interaction regions: Ulysses at midlatitudes. *Geophysical Research Letters*, v. 22, n. 23, p. 3397–3400, dez. 1995. ISSN 00948276. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/95GL03179>>. Citado na página 56.

TYLER, R.; OBERHUBER, J.; SANFORD, T. The potential for using ocean generated electromagnetic fields to remotely sense ocean variability. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, v. 24, n. 4, p. 429–432, jan. 1999. ISSN 14641895. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S146418959900054X>>. Citado na página 5.

TYLER, R. H. Satellite Observations of Magnetic Fields Due to Ocean Tidal Flow. *Science*, v. 299, n. 5604, p. 239–241, jan. 2003. ISSN 00368075, 10959203. Disponível em: <<https://www.sciencemag.org/lookup/doi/10.1126/science.1078074>>. Citado na página 5.

TYLER, R. H. A simple formula for estimating the magnetic fields generated by tsunami flow. *Geophysical Research Letters*, v. 32, n. 9, p. L09608, 2005. ISSN 0094-8276. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1029/2005GL022429>>. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.

VELTCHEVA, A.; SOARES, C. Identification of the components of wave spectra by the hilbert huang transform method. *Applied Ocean Research*, v. 26, n. 1, p. 1–12, 2004. ISSN 0141-1187. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141118704000410>>. Citado na página 194.

VIDAKOVIC, B. *Statistical modeling by wavelets*. New York: Wiley, 1999. (Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics section). ISBN 978-0-471-29365-1. Citado na página 172.

- VIDAKOVIC, B. *Statistical Modeling by Wavelets*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Google-Books-ID: nnYmYd4MKK8C. ISBN 9780470317860. Citado 2 vezes nas páginas 141 e 145.
- WALLACE, J. M.; HOBBS, P. V. *Atmospheric science: an introductory survey*. 2nd ed. ed. Amsterdam ; Boston: Elsevier Academic Press, 2006. (International geophysics series, v. 92). OCLC: ocm62421169. ISBN 9780127329512. Citado 3 vezes nas páginas 64, 68 e 79.
- WALNUT, D. F. *An Introduction to Wavelet Analysis*. [s.n.], 2004. OCLC: 1113459008. ISBN 9781461200017 9781461265672. Disponível em: <<https://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=6314685>>. Citado na página 173.
- WANG, G. et al. On intrinsic mode function. *Advances in Adaptive Data Analysis*, v. 2, p. 277–293, 07 2010. Citado na página 195.
- WANG, Y.; WANG, H.; ZHANG, Q. Nonlinear distortion identification based on intra-wave frequency modulation. *Applied Mathematics & Information Sciences*, v. 6, n. 3, p. 689–695, sep 2012. Disponível em: <<http://www.naturalspublishing.com/Article.asp?ArtcID=1035>>. Citado na página 188.
- WARDINSKI, I. Geomagnetic Secular Variation. In: GUBBINS, D.; HERRERO-BERVERA, E. (Ed.). *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2007. p. 346–350. ISBN 9781402039928. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4020-4423-6_125>. Citado na página 1.
- WAYNICK, A. Fifty years of the ionosphere. The early years—Experimental. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 36, n. 12, p. 2105–2111, dez. 1974. ISSN 00219169. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021916974901421>>. Citado na página 90.
- WICKERSHAM, A. F. Comparison of velocity distributions for acoustic-gravity waves and traveling ionospheric disturbances. *Journal of Geophysical Research*, v. 70, n. 19, p. 4875–4883, out. 1965. ISSN 01480227. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/JZ070i019p04875>>. Citado na página 115.
- WILLIAM Gilbert and Magnetism - IELTS reading practice test. 2021. Disponível em: <<https://mini-ielts.com/1027/reading/william-gilbert-and-magnetism>>. Acesso em: 25 mai 2021. Citado na página 19.
- WOJTASZCZYK, P. *A mathematical introduction to wavelets*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. Citado na página 145.
- WU, Z.; HUANG, N. E. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 460, n. 2046, p. 1597–1611, 2004. Citado na página 195.
- WU, Z.; HUANG, N. E. ON THE FILTERING PROPERTIES OF THE EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION. *Advances in Adaptive Data Analysis*, v. 02, n. 04, p. 397–414, out. 2010. ISSN 1793-5369, 1793-7175. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S1793536910000604>>. Citado na página 194.

- YADAVA, R. L. *Antenna and wave propagation*. New Delhi: PHI Learning Private Limited, 2011. OCLC: 759481571. ISBN 978-81-203-4291-0. Citado na página 105.
- YAMAZAKI, Y. et al. Quasi-biennial oscillation of the ionospheric wind dynamo. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 122, n. 3, p. 3553–3569, mar. 2017. ISSN 2169-9380, 2169-9402. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2016JA023684>>. Citado na página 2.
- YAMAZAKI, Y.; MAUTE, A. Sq and EEJ—A Review on the Daily Variation of the Geomagnetic Field Caused by Ionospheric Dynamo Currents. *Space Science Reviews*, v. 206, n. 1-4, p. 299–405, mar. 2017. ISSN 0038-6308, 1572-9672. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11214-016-0282-z>>. Citado 5 vezes nas páginas 2, 14, 84, 85 e 107.
- YIGIT, E.; MEDVEDEV, A. S. Internal wave coupling processes in earth's atmosphere. *Advances in Space Research*, v. 55, n. 4, p. 983–1003, 2015. ISSN 0273-1177. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117714007236>>. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 81.
- YOUNG, H. D. et al. *Sears and Zemansky's university physics: with modern physics*. 14th edition. ed. Boston: Pearson, 2016. ISBN 9780321973610 9780133977981. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 43.
- YOUNG, R. K. *Wavelet Theory and Its Applications*. 1993. OCLC: 1159705245. Citado na página 137.
- ZAIN, A. et al. Existence of an additional layer in equatorial ionosphere: other observations. In: *10th IET International Conference on Ionospheric Radio Systems and Techniques (IRST 2006)*. London, UK: IEE, 2006. v. 2006, p. 258–262. ISBN 978-0-86341-659-0. Disponível em: <https://digital-library.theiet.org/content/conferences/10.1049/cp_20060280>. Citado na página 108.
- ZEILER, A. et al. Empirical mode decomposition - an introduction. In: *The 2010 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1–8. Citado na página 197.
- ZENG, K.; HE, M.-X. A simple boundary process technique for empirical mode decomposition. In: *IGARSS 2004. 2004 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 6, p. 4258–4261 vol.6. Citado na página 199.
- ZHAO, J.-p. MIRROR EXTENDING AND CIRCULAR SPLINE FUNCTION FOR EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION METHOD. *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, v. 2, n. 3, p. 247, 2001. ISSN 1009-3095. Disponível em: <<http://www.zju.edu.cn/jzus/article.php?doi=10.1631/jzus.2001.0247>>. Citado na página 199.
- ZOLESI, B.; CANDLER, L. R. *Ionospheric Prediction and Forecasting*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014. ISBN 978-3-642-38429-5 978-3-642-38430-1. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-38430-1>>. Citado 4 vezes nas páginas 12, 38, 44 e 83.


ŠAULI, P. et al. Detection of the wave-like structures in the F-region electron density: Two station measurements. *Studia Geophysica et Geodaetica*, v. 50, n. 1, p. 131–146, jan. 2006. ISSN 0039-3169, 1573-1626. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11200-006-0007-y>>. Citado na página 81.

Apêndices

APÊNDICE A – PRODUÇÕES ACADÊMICAS



Ahead-of-Tsunami Magnetic Disturbance Detection Using Intrinsic Mode Functions: Tohoku-Oki Earthquake Case Study

V. KLAUSNER,¹  H. G. MACEDO,¹ and A. PRESTES¹

Abstract—We document magnetic disturbances that occurred during the Tohoku-Oki tsunami of 11 March 2011 using empirical mode decomposition (EMD) in a dataset derived from a network of ground-based magnetometers (INTERMAGNET and GIS). The disturbances, obtained by filtering the magnetic field data using the first intrinsic mode function (IMF1) of EMD, propagate ahead of the tsunami at a speed in the range of 600–1.6 km/s. They also appear 3 min (near-field) to 2 h (far-field) earlier than the tsunami arrival at the magnetic observatories. We refer to these disturbances as ahead-of-tsunami magnetic disturbances (ATMDs). A comparison with seismometer data shows them arriving ~ 10 min after the arrival of Rayleigh waves. Their association with both seismogenic and tsunamigenic processes is discussed, and it is argued that the tsunamigenic process can well explain the magnetic disturbance propagation characteristics at the far-field. At near-field, the ATMDs are the coseismic magnetic signatures mainly driven by surface Rayleigh waves. Monitoring these ATMDs can be extremely useful for the early warning of the tsunami.

Keywords: Tsunami, geomagnetism, AGWs, intrinsic mode function, Hilbert-Huang transform, signal processing.

1. Introduction

Several authors have shown the presence of ionospheric disturbances during earthquakes and/or tsunamis following an earthquake or landslide (Artru et al. 2005; Occhipinti et al. 2008; Astafyeva et al. 2009; Rolland et al. 2010, 2011; Savastano et al. 2017; Rakoto et al. 2018; Liu et al. 2020; Manta et al. 2020; Zhang et al. 2021). These disturbances are observed in the total electron content (TEC), measured from the Global Navigation Satellite System

(GNSS), and in the geomagnetic field measured from ground-based magnetometer networks (Balasis and Manda 2007; Manoj et al. 2011; Utada et al. 2011; Hao et al. 2013; Klausner et al. 2014, 2016a, b; Tatehata et al. 2015). All these research studies observed an N-shaped response of the ionosphere and the geomagnetic field upon the shock-like atmospheric waves excited by coseismic vertical movements of the ground or the sea surface. These disturbances are referred to as co-tsunami ionospheric disturbances (CTIDs). For example, in a tsunami with a 20-min period propagating at ~ 200 m/s, the group velocity of a gravity wave in the thermosphere is ~ 200 m/s (horizontal) and ~ 40 m/s (vertical) (Artru et al. 2005). This means that the ionospheric disturbances have the same horizontal velocity as the tsunami. This horizontal velocity of tsunamigenic gravity waves is significantly lower than the acoustic gravity waves induced by an earthquake (horizontal velocities of ~ 1000 m/s at the thermosphere) (Galvan et al. 2012). On the other hand, the gravity waves take over 1 h to reach the ionosphere (versus ~ 10 min for shock-acoustic waves) (Astafyeva et al. 2009, 2011). After this delay, the ionospheric disturbances follow the tsunami front wave (Artru et al. 2005). There are a variety of wavefronts associated with the tsunami that were observed in the form of CTIDs (Kherani et al. 2016), which propagate horizontally in the thermosphere with acoustic wave speed of ~ 600 – 1000 m/s, gravity wave speed of ~ 250 m/s, and slower speed ~ 200 m/s than the tsunami.


After an earthquake onset, seismic waves generate vertical and horizontal motion of the ground surface. Both acoustic and gravity waves can be launched by a seismic event. In addition, surface vertical

Supplementary Information The online version contains supplementary material available at <https://doi.org/10.1007/s00024-021-02919-4>.

¹ Physics and Astronomy, Vale do Paraiba University, Av. Shishima Hifumi, 2911, IP&D, 12244-000 São José dos Campos, SP, Brazil. E-mail: virginia@univap.br



Geomagnetic Disturbances During the Maule (2010) Tsunami Detected by Four Spatiotemporal Methods

V. KLAUSNER,¹  H. M. GIMENES,¹ M. V. CEZARINI,¹ A. OJEDA-GONZÁLEZ,¹ A. PRESTES,¹ C. M. N. CÂNDIDO,¹
E. A. KHERANI,¹ and T. ALMEIDA¹

Abstract—Separating tsunamigenic variations in geomagnetic field measurements in the presence of more dominant magnetic variations by magnetospheric and ionospheric currents is a challenging task. The purpose of this article is to survey the tsunamigenic variations in the vertical component (Z) and the horizontal component (H) of the geomagnetic field using four spatiotemporal methods. Spatiotemporal analysis has shown enormous potential and efficiency in retrieving tsunamigenic contributions from geomagnetic field measurements. We select the Maule (2010) tsunami event on the west coast of Chile and examine the geomagnetic measurements from 13 ground magnetometers scattered in the Pacific Ocean covering a wide area from Chile, crossing the Pacific Ocean to Japan. The tsunamigenic magnetic disturbances are possibly due to two types of contributions, one arising from direct ocean motion and the other from atmospheric motion, both associated with tsunami forcing. Moreover, even though the tsunami waves decrease considerably with increasing epicentral distance, the tsunamigenic contributions are retrieved from a magnetic observatory in Australia ($\sim 13,000$ km radial distance from the epicenter). These results suggest that various types of tsunamigenic disturbances can be identified well from the integrated analysis framework presented in this work.

Keywords: Tsunami, geomagnetism, AGWs, wavelet transform, Hilbert–Huang transform, signal processing.

1. Introduction

Over the past 20 years, several studies have observed seismogenic and tsunamigenic magnetic disturbances generated by lithosphere–atmosphere–ionosphere (LAI) or tsunami–atmosphere–ionosphere (TAI) coupling, respectively. These studies have made an effort to cover all possible sources from

oceanic to atmospheric forcing including Rayleigh waves, acoustic gravity waves, and gravity waves (Balasis and Manda 2007; Manoj et al. 2011; Toh et al. 2011; Utada et al. 2011; Klausner et al. 2014a, 2016a, c, 2017).


On 27 February 2010, the Maule earthquake of moment magnitude M_w 8.8 generated a tsunami in the Pacific Ocean. The Maule tsunami was due to one of the largest earthquakes since the beginning of the century. A Pacific-wide tsunami warning was issued for numerous countries, and the local effects on the Chilean coast were particularly severe. As discussed by Zubizarreta et al. (2013), the Maule tsunami caused more than \$30 billion in damage, damaging or destroying 370,000 houses, 4013 schools, and 79 hospitals. More than 500 people were crushed, drowned, or burned to death by fires. Offshore data on the few DART buoys in service were also impressive. The Maule tsunami is among the largest known tsunamis prior to the Tohoku-Oki (2011) tsunami.

A geomagnetic disturbance of ~ 1 nT in its vertical component was observed by Manoj et al. (2011) using data from the Easter Island magnetic observatory (IPM). Klausner et al. (2014a) examined geomagnetic disturbances associated with the Maule tsunami, employing an improved methodology based on continuous/discrete wavelet techniques using the Morlet/Daubechies function of order 2 as the wavelet for analysis. They found the wavelet techniques to be useful tools for characterizing the tsunamigenic contributions in the geomagnetic field. Schnepf et al. (2016) also reported that the wavelet techniques were effective for tsunami detection/identification.

¹ Physics and Astronomy, Vale do Paraiba University, Av. Shishima Hifumi, 2911, IP&D, São José dos Campos, SP CEP 12244-000, Brazil. E-mail: virginia@univap.br



Principal Components Analysis: An Alternative Way for Removing Natural Growth Trends

DANIELA OLIVEIRA DA SILVA,¹  VIRGINIA KLAUSNER,¹ ALAN PRESTES,¹ HUMBERTO GIMENES MACEDO,¹
TUOMAS AAKALA,² and IURI ROJAHN DA SILVA¹

Abstract—In this article, we establish a new approach for removing natural growth trends from tree-ring samples, also called detrending. We demonstrate this approach using *Ocotea porosa* (Nees & Mart) Barroso trees. Nondestructive samples were collected in General Carneiro city, located in the Brazilian southern region (Paraná state). To remove natural tree growth trends, principal components analysis (PCA) was applied on the tree-ring series as a new detrending method. From this, we obtained the tree-ring indices by reconstructing the tree-ring series without the first principal component (PC), which we expect to represent the natural growth trend. The performance of this PCA method was then compared to other detrending methods commonly used in dendrochronology, such as the cubic spline method, negative exponential or linear regression curve, and the regional curve standardization method. A comparison of these methods showed that the PCA detrending method can be used as an alternative to traditional methods since (1) it preserves the low-frequency variance in the 566-year chronology and (2) represents an automatic way to remove the natural growth trends of all individual measurement series at the same time. Moreover, when implemented using the alternating least squares (ALS) method, the PCA can deal with tree-ring series of different lengths.

Keywords: Dendrochronology, tree ring, time series, natural records, principal components analysis.

1. Introduction

Studying tree rings allows us to infer environmental conditions and geophysical phenomena from recent years to millennia in the past (Fritts, 1976). In seasonal climates, tree rings can be dated at an annual resolution, and thus, the information extracted from tree rings has a high temporal resolution relative to

many other such biological archives. One important and common aim in tree-ring research is the reconstruction of climate variability at annual-to-decadal and longer time scales (Briffa et al., 1996), which provides us with a longer-term context of the modern climatic variability and changes. However, information stored in tree rings has been used for a number of different purposes, such as reconstructions of sunspot activity (Stuiver & Quay, 1980), cyclones (Miller et al., 2006), or volcanic eruptions (Piermattei et al., 2014).

A pertinent issue in research based on tree-ring widths is the extraction of the desired signal from the noisy ring-width data. Tree growth and the width of the tree rings are influenced by several physiological and biochemical factors that need to be taken into account when interpreting data from tree rings (Speer, 1971). Depending on the study objectives, the desired signal can consist, for instance, of year-to-year variability in the tree-ring widths and wood anatomy (Piermattei et al., 2014), sudden and sustained longer-term changes in the tree-ring widths (Maes et al., 2017), or longer-term, trend-like declines (Amoroso et al., 2012). In the context of climate reconstructions with a focus on annual-to-decadal and longer time scales, typically an important first step in the analysis is the removal of the natural growth trend and other non-climatic variability to maximize the climate signal (Briffa et al., 1996). A particular problem here is how to preserve the low-frequency signal (climate signal) when removing the natural tree growth trend (Helama et al., 2017).

Statistical methods can be applied on a tree-ring time series to remove the biological growth trend. This application is commonly referred to as detrending or standardization (Fritts, 1976). The choice of the detrending method depends on the

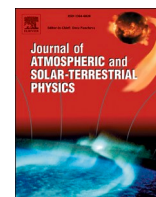
¹ Research and Development Institute-IP&D, Vale do Paraíba University-UNIVAP, São José dos Campos, SP, Brazil. E-mail: fys.dani@gmail.com

² School of Forest Sciences, University of Eastern Finland-UEF, Joensuu, Finland.



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Atmospheric and Solar–Terrestrial Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jastp

Research Paper

Principal component analysis in the modeling of HILDCAAs during the Solar Minimum of Cycle 23/24



Virginia Klausner^{a,*}, Isabelle Cristine Pellegrini Lamin^a, Arian Ojeda-González^a,
Humberto Gimenes Macedo^a, Claudia Maria Nicoli Cândido^b, Alan Prestes^a,
Marina Vedelago Cezarini^a

^a Vale do Paraíba University, UNIVAP, 12244-000, São José dos Campos, SP, Brazil

^b National Institute for Space Research, INPE, 12227-010, São José dos Campos, SP, Brazil

ARTICLE INFO

Keywords:

HILDCAA

Principal component analysis (PCA)

Alfvénicity

Solar minimum of cycle 23/24

CIRS

ABSTRACT

In this article, we propose a new approach to model the high-intensity, long-duration, continuous AE (Auroral Electrojet) activity (HILDCAA) by relaxing one of the criteria originally designed, based on the interplanetary features during the unusual Solar Minimum of Cycle 23/24 (SMC23/24). This relaxation does not intend to suppress or modify the original HILDCAAs' conception, but propose a new view of the same phenomena by enlarging the sample of events, which in turn may improve space weather monitoring and prediction programs. To assess and classify the Alfvénicity associated with HILDCAAs, the values of 4h-Windowed Pearson Cross-Correlation (4WPCC) between the IMF components and the solar wind speed components observed *in situ* at the Lagrangian point L1 (1 AU) were evaluated. The principal component analysis (PCA) was performed on the dataset and, from the first three principal components, which represent ~65% of the accumulative percent variance, we applied principal component regression (PCR) in each of the following parameters: the AE index, the Interplanetary Magnetic Field (IMF) components, the plasma density, the solar wind speed, the temperature, the IMF magnitude, and the SYM-H geomagnetic index. Furthermore, we applied Multiple Linear Regression (MLR) to establish a linear model to express the AE index in terms of the PCR-based model parameters. The AE MLR-based model demonstrated to hold a prognosis potential for HILDCAAs. Despite that, this model is only suitable for the SMC23/24. In this sense, this model might be implemented a real-time analysis for short-term HILDCAA prognosis in the near future.

1. Introduction

The magnetosphere is formed by the equilibrium between the solar wind dynamic pressure (kinetic and magnetic pressure) and the geomagnetic field. The energy input into the magnetosphere is due to the magnetic reconnection (Dungey, 1961) and viscous processes (Axford and Hines, 1961). The steady solar wind constantly sends plasma and particles to Earth, giving rise to the magnetospheric current system configurations (Russell, 1972). The magnetosphere acts as a shield deflecting most of the solar wind, causing supersonic particles to flow around (Parker, 1958), and, consequently, inhibits its energy input into the inner layers of the ionosphere. The variation of the solar wind dynamic pressure causes variation in the geomagnetic field, and magnetometers on the Earth's surface can measure it (Yamauchi and Araki,

1989).

The behavior of several geomagnetic indices gives the classification of how the Earth's magnetic field responds to fluctuations in the interplanetary medium (Saito, 1969). This article uses the Auroral Electrojet (AE) and the symmetric disturbance (SYM-H) indices to analyze the geomagnetic activity level. The 1-min SYM-H index is essentially the same as the 1-h Dst index (Iyemori et al., 1992; Wanliss and Showalter, 2006). The AE index is related to the intensification of the auroral oval current (Davis and Sugiura, 1966), and the SYM-H index surveys the level of geomagnetic activity related to the ring current variations according to the H-component measurements of the geomagnetic field in low and middle latitudes (Gonzalez et al., 1989; Tsurutani et al., 1995; Klausner et al., 2014; Souza et al., 2016). According to the Earth's latitudes, these two indices also monitor the intensity of the relationship

* Corresponding author.

E-mail address: viklausner@gmail.com (V. Klausner).

<https://doi.org/10.1016/j.jastp.2020.105516>

Received 13 August 2020; Received in revised form 12 November 2020; Accepted 20 November 2020

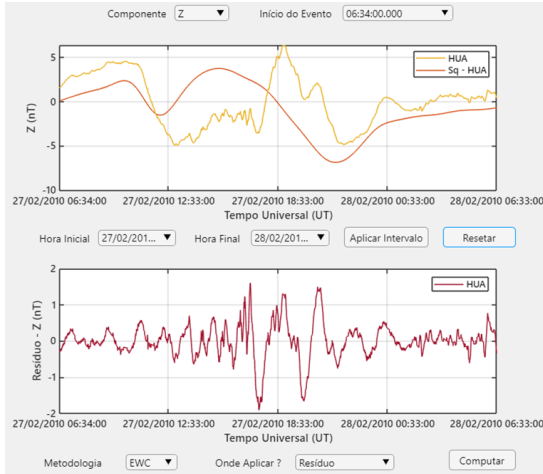
Available online 14 December 2020

1364-6826/© 2020 Elsevier Ltd. All rights reserved.

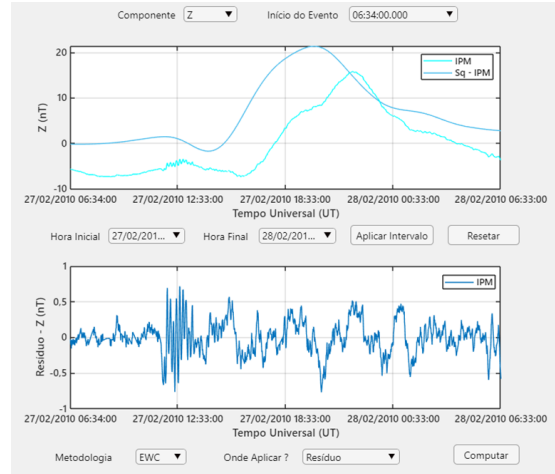
APÊNDICE B – SAÍDAS DO MAGNAMI: SISMO DO CHILE DE 2010

Figura 133 – Gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT).

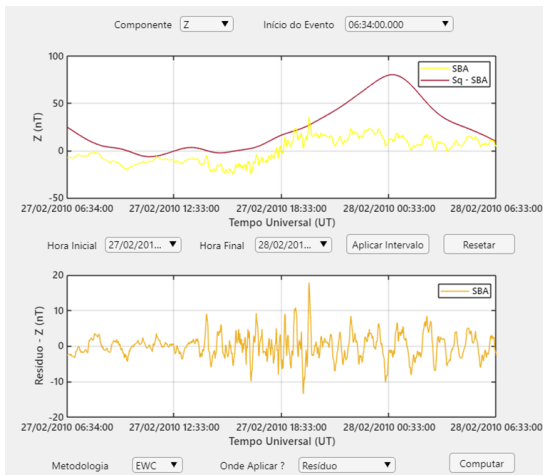
(a) HUA



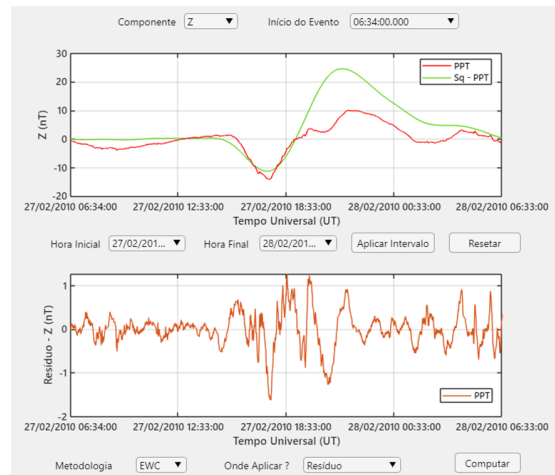
(b) IPM



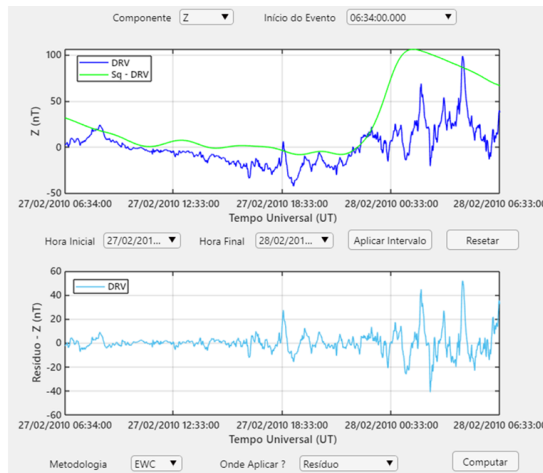
(c) SBA



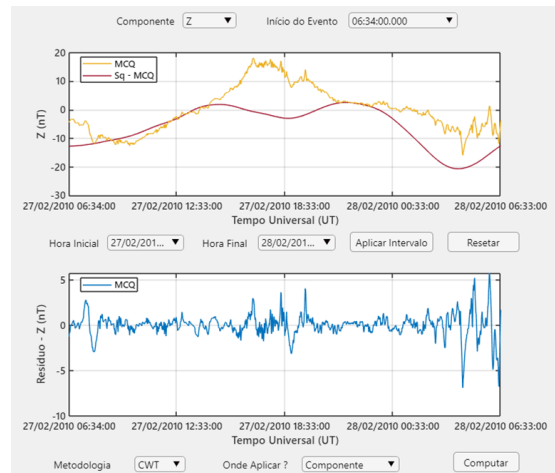
(d) PPT



(e) DRV



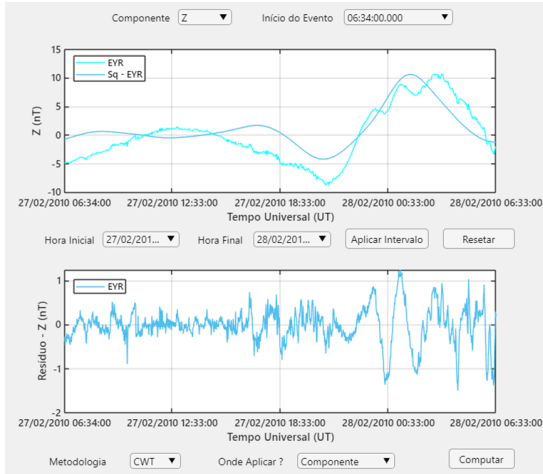
(f) MCQ



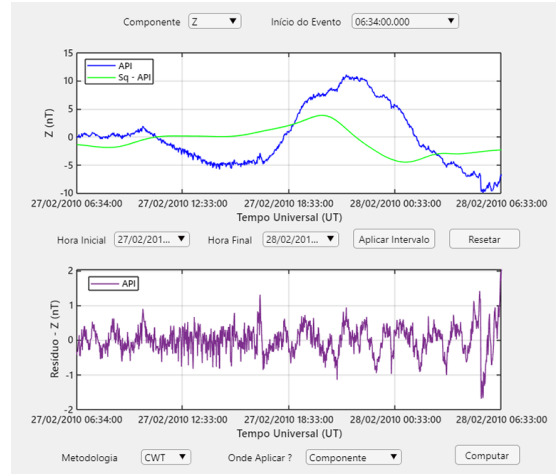
Fonte: O autor.

Figura 133 – Gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.).

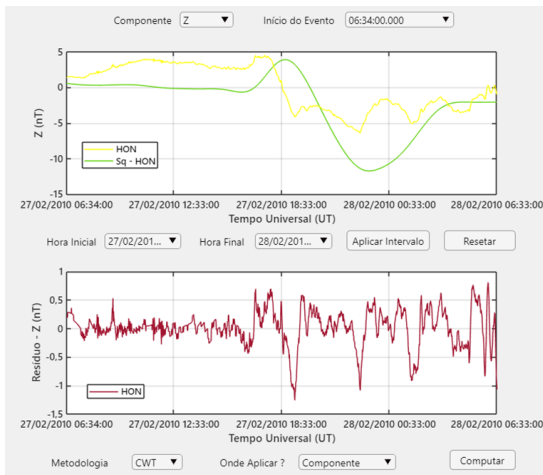
(g) EYR



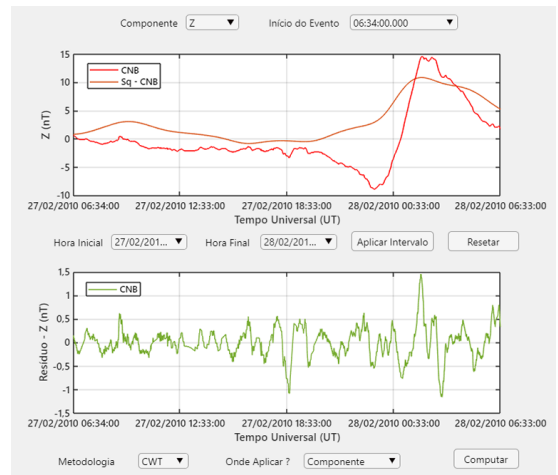
(h) API



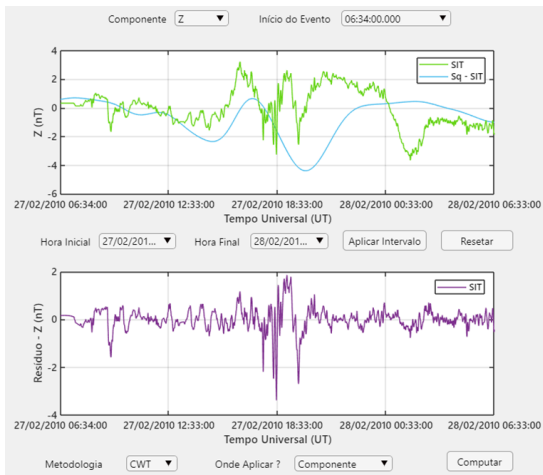
(i) HON



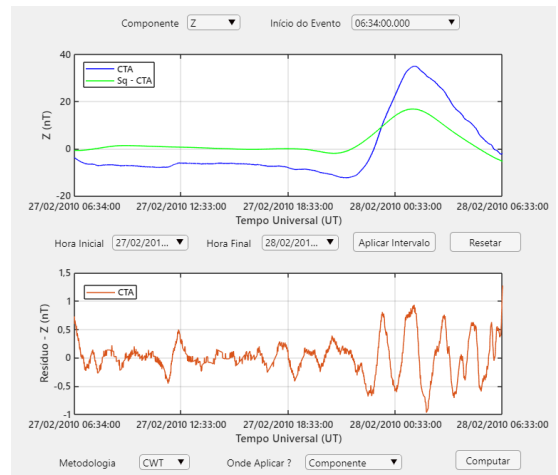
(j) CNB



(k) SIT



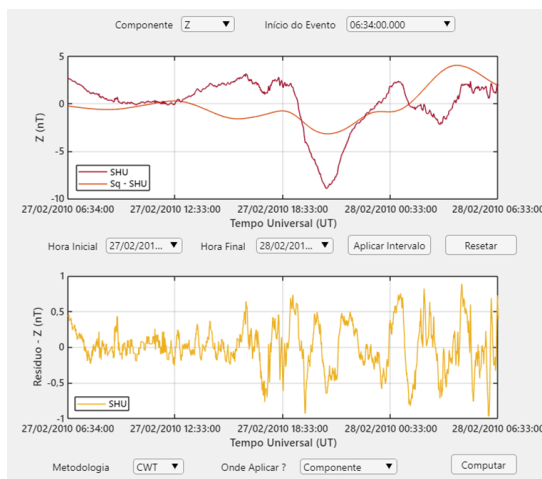
(l) CTA



Fonte: O autor.

Figura 133 – Gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.).

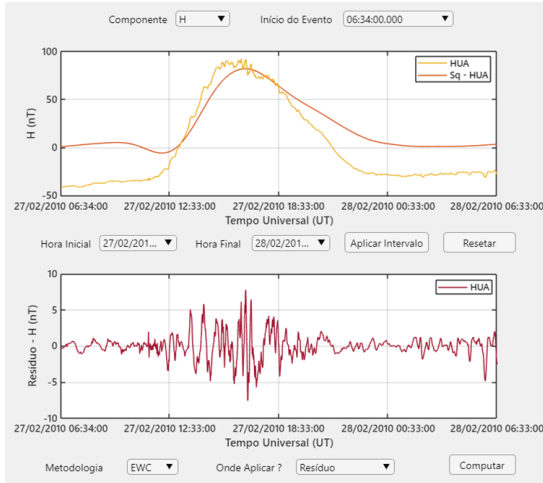
(m) SHU



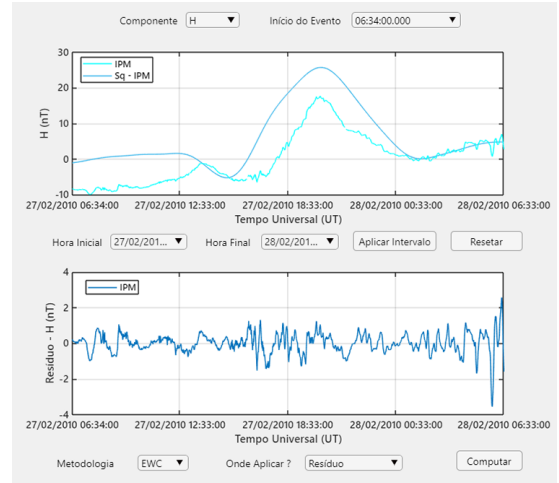
Fonte: O autor.

Figura 134 – Gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT).

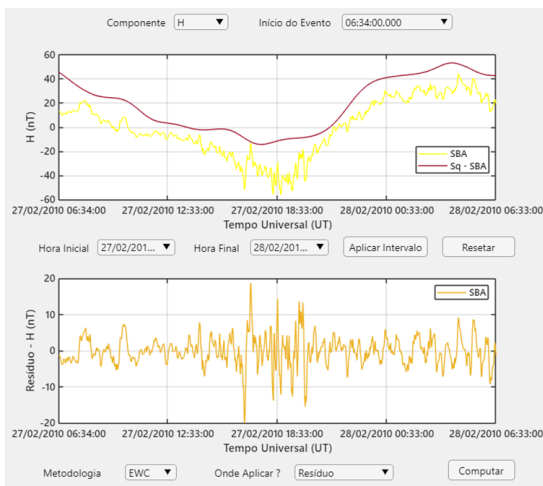
(a) HUA



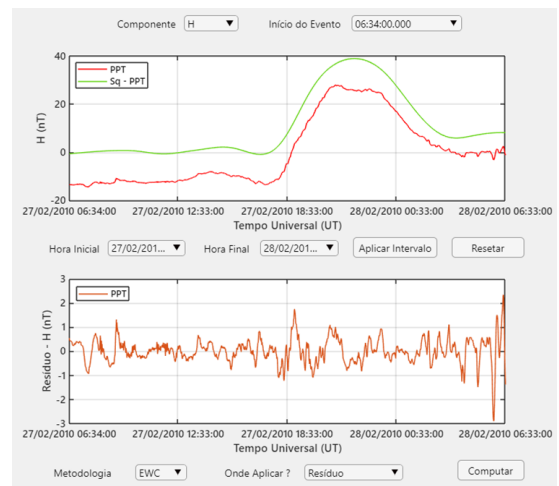
(b) IPM



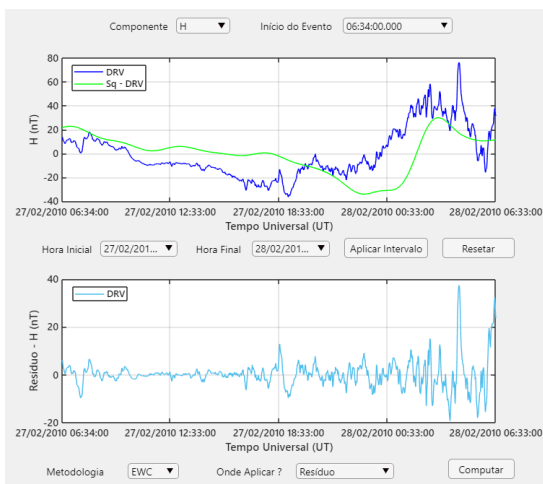
(c) SBA



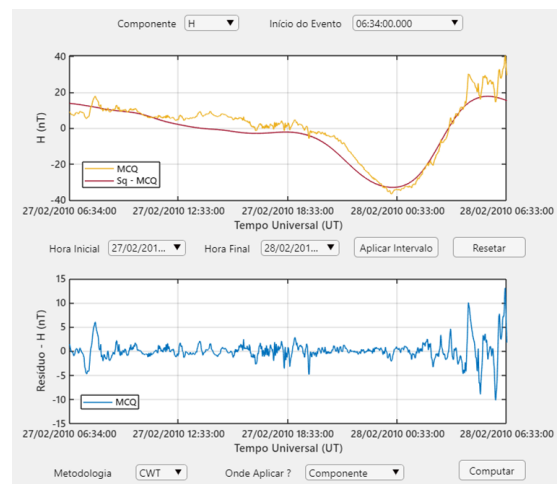
(d) PPT



(e) DRV



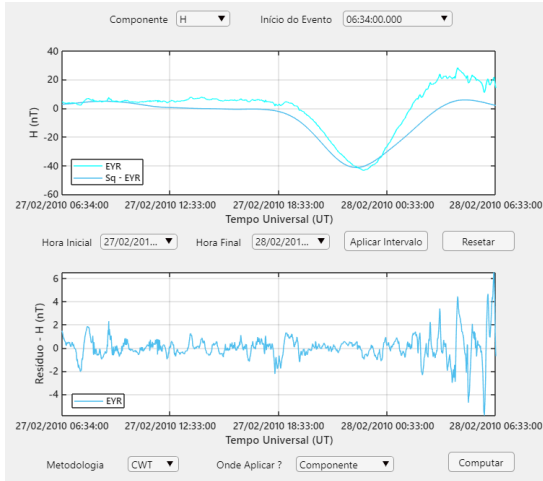
(f) MCQ



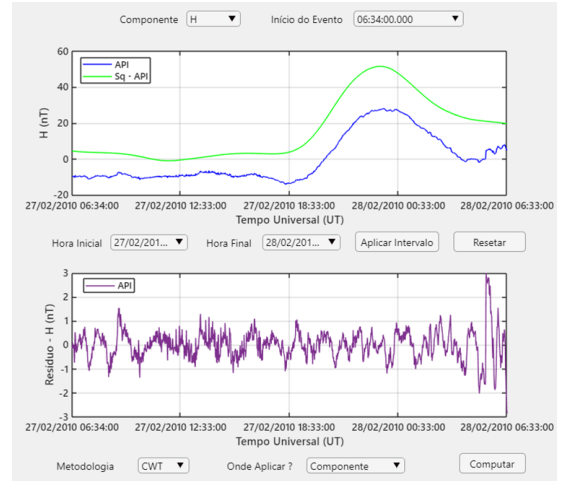
Fonte: O autor.

Figura 134 – Gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.).

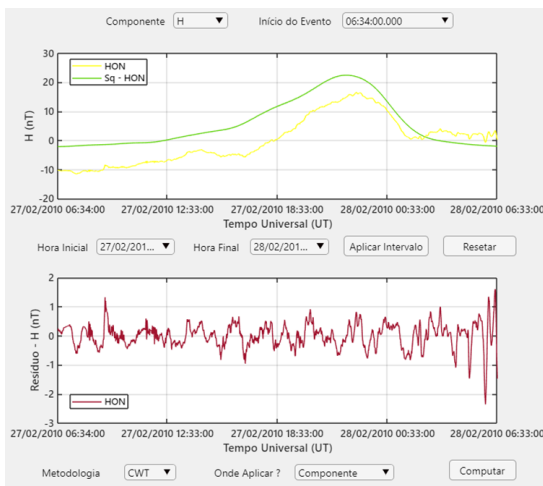
(g) EYR



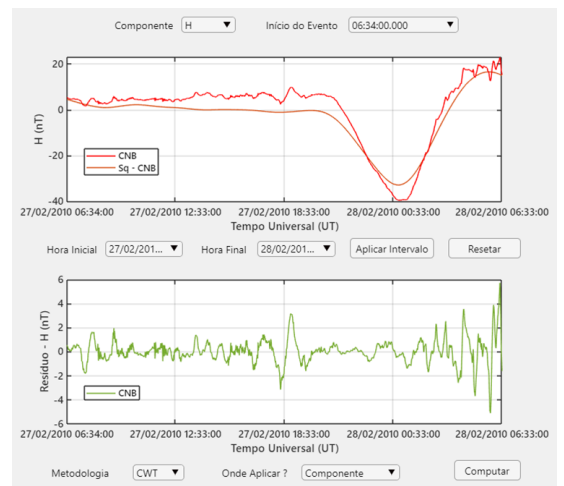
(h) API



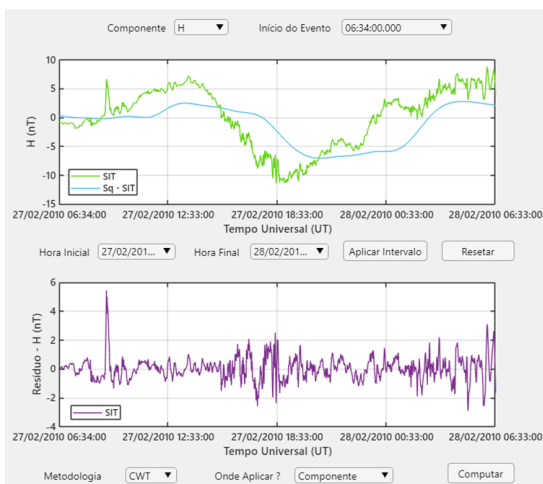
(i) HON



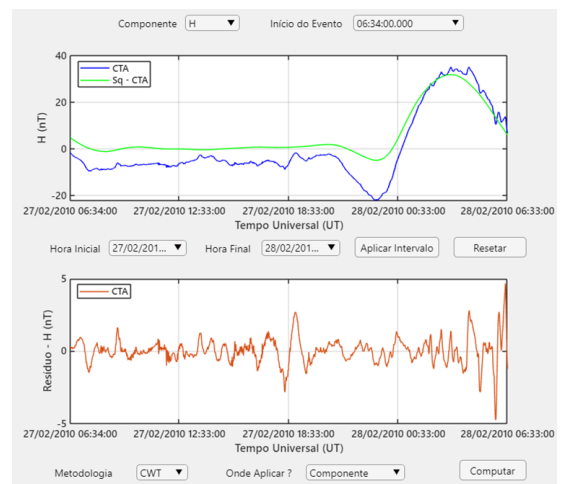
(j) CNB



(k) SIT



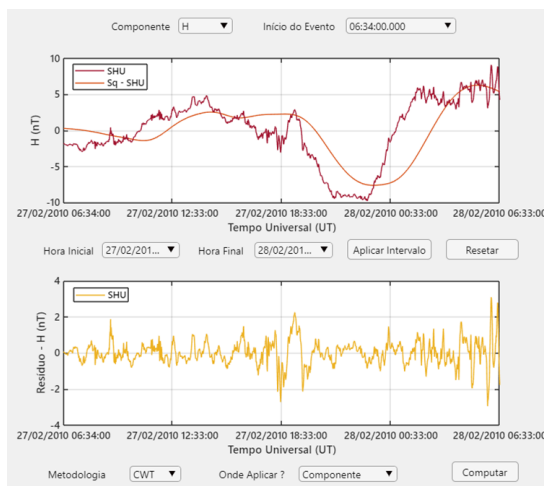
(l) CTA



Fonte: O autor.

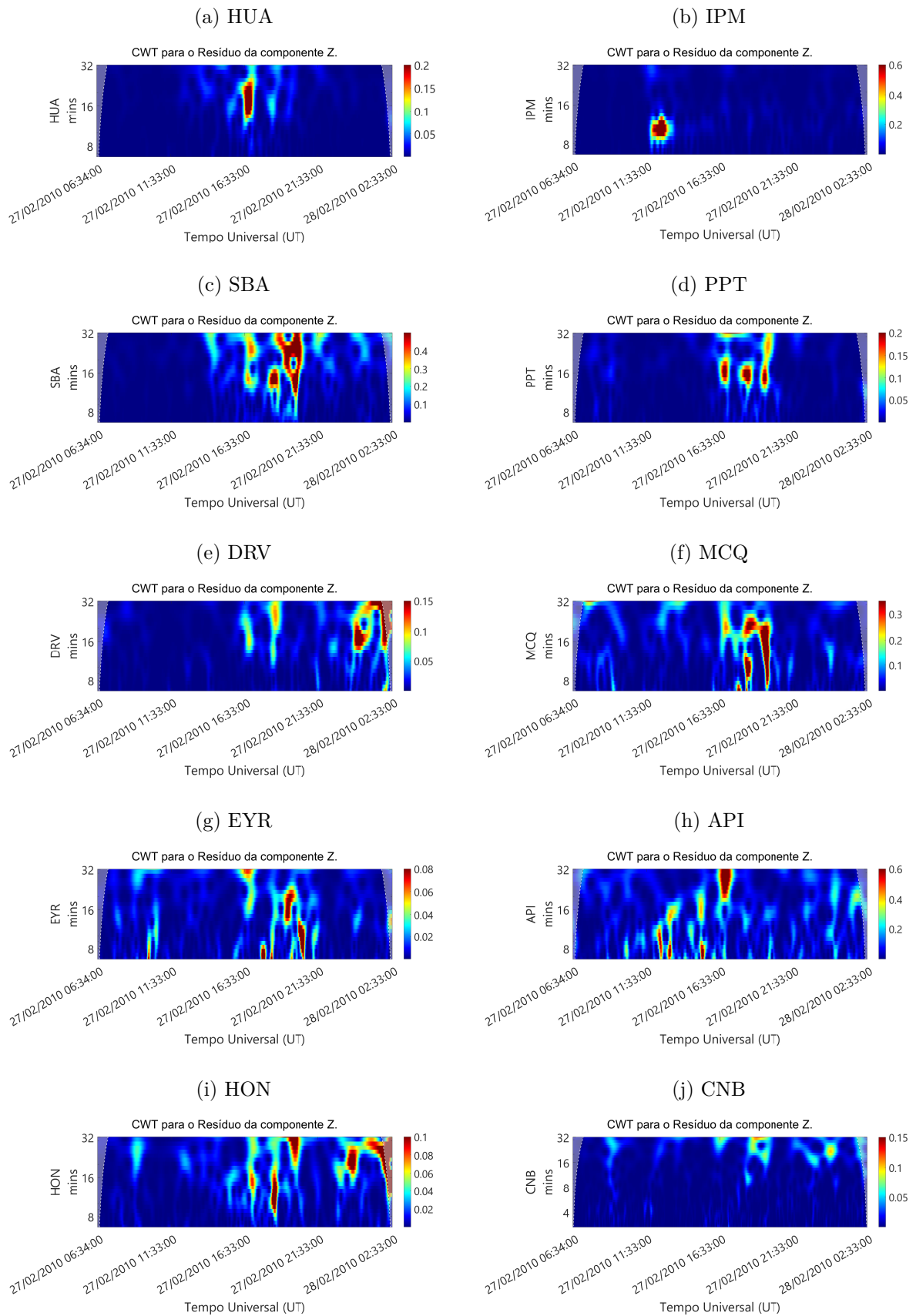
Figura 134 – Gráficos das linhas de base Sq (gráfico superior) e dos respectivos resíduos (gráfico inferior) para a componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 24 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.).

(m) SHU



Fonte: O autor.

Figura 135 – Períodogramas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT).



Fonte: O autor.

Figura 135 – Períodogramas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.).

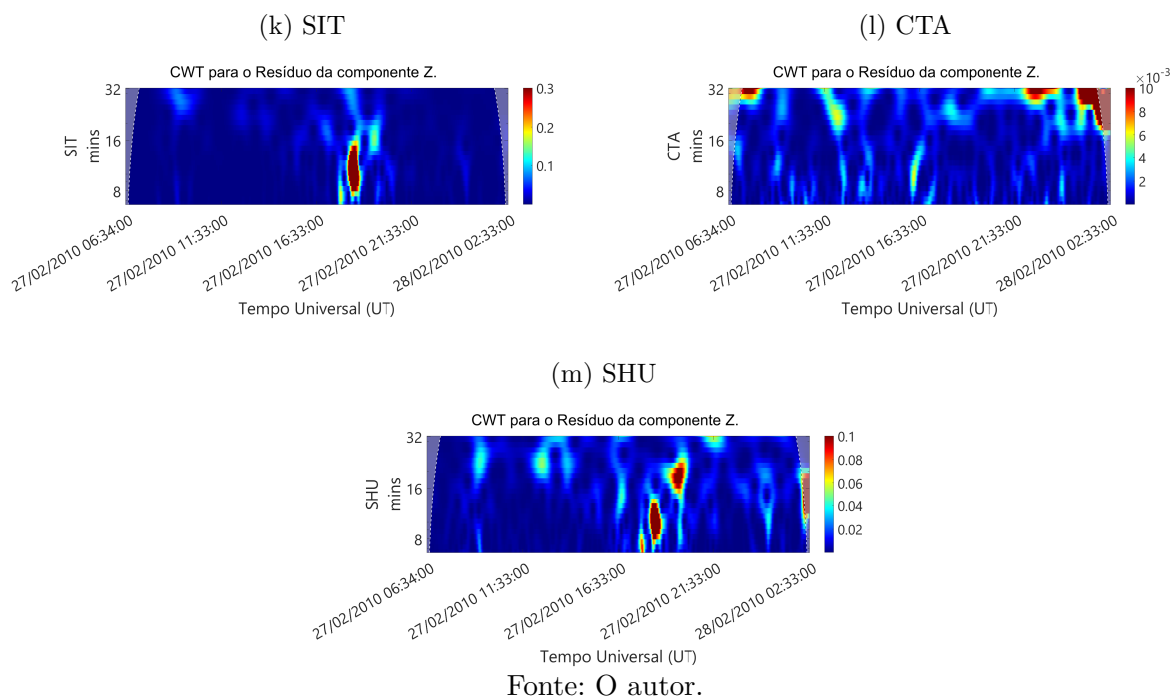
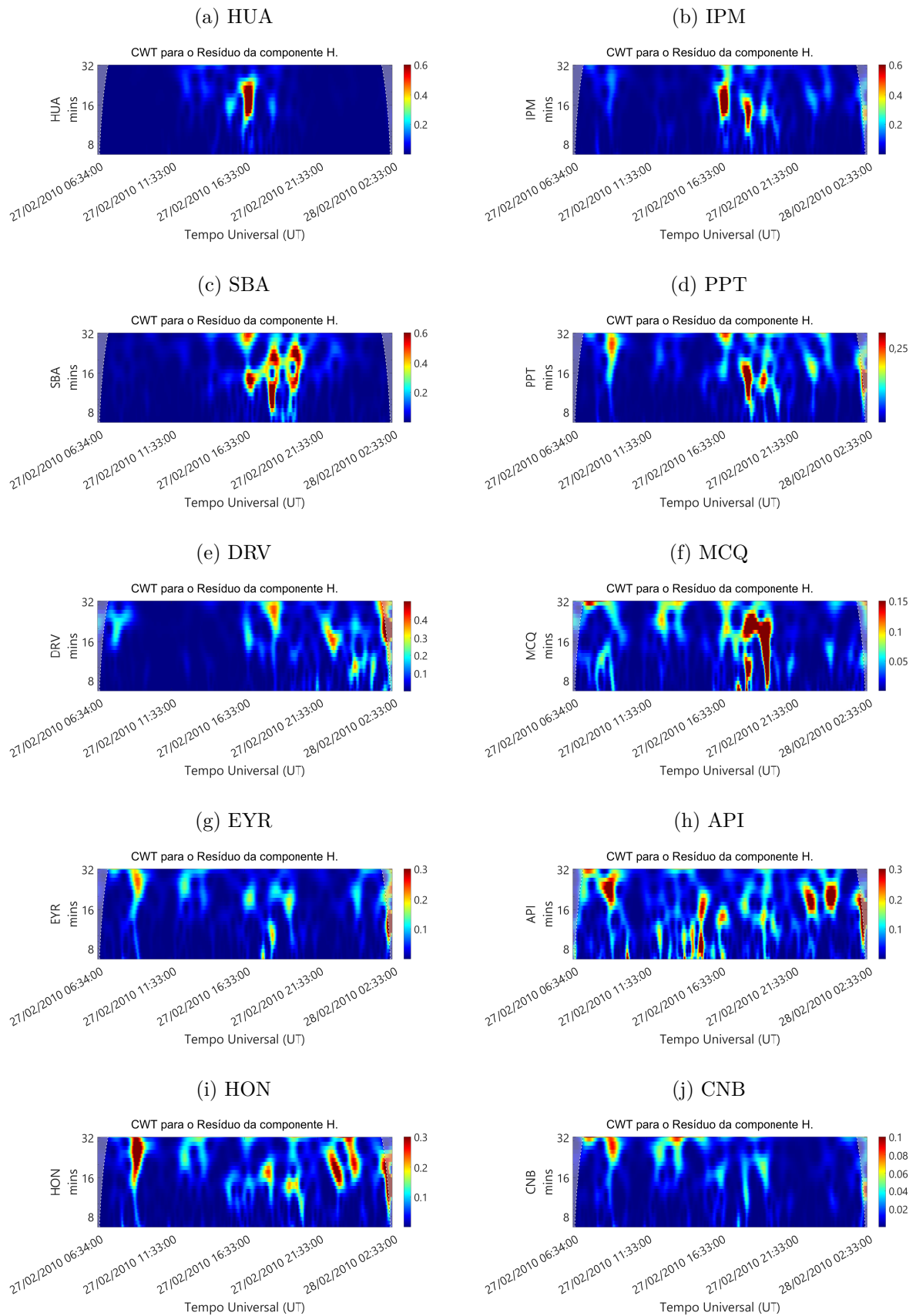


Figura 136 – Períodogramas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT).



Fonte: O autor.

Figura 136 – Períodogramas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT) (cont.).

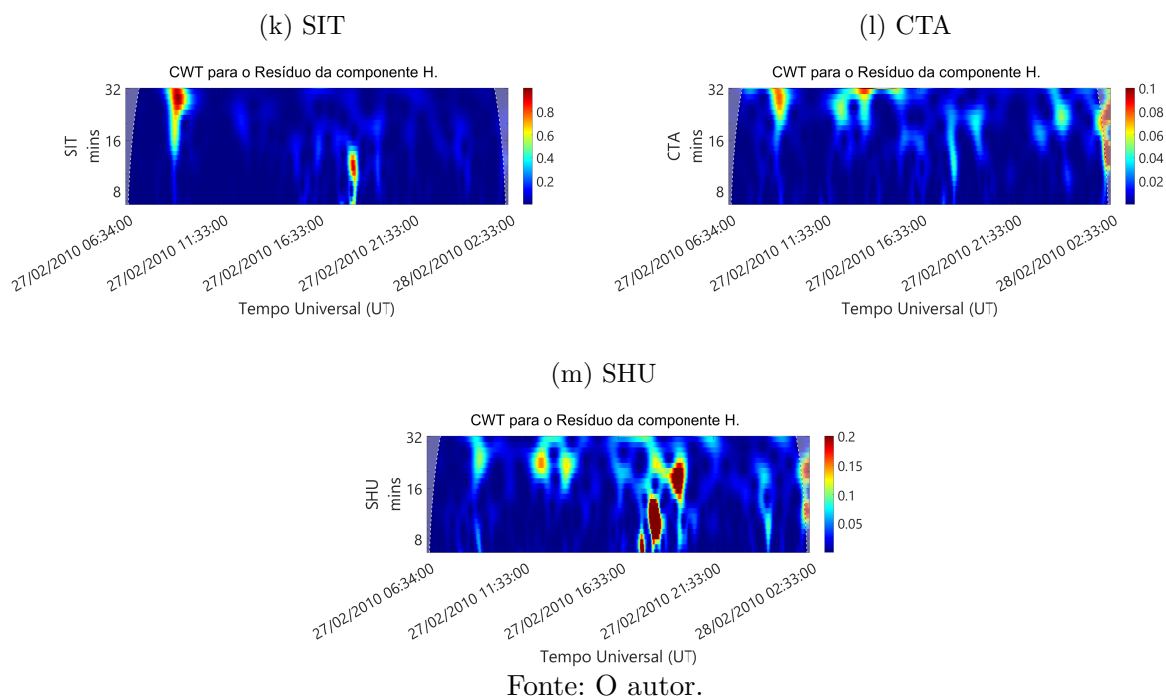
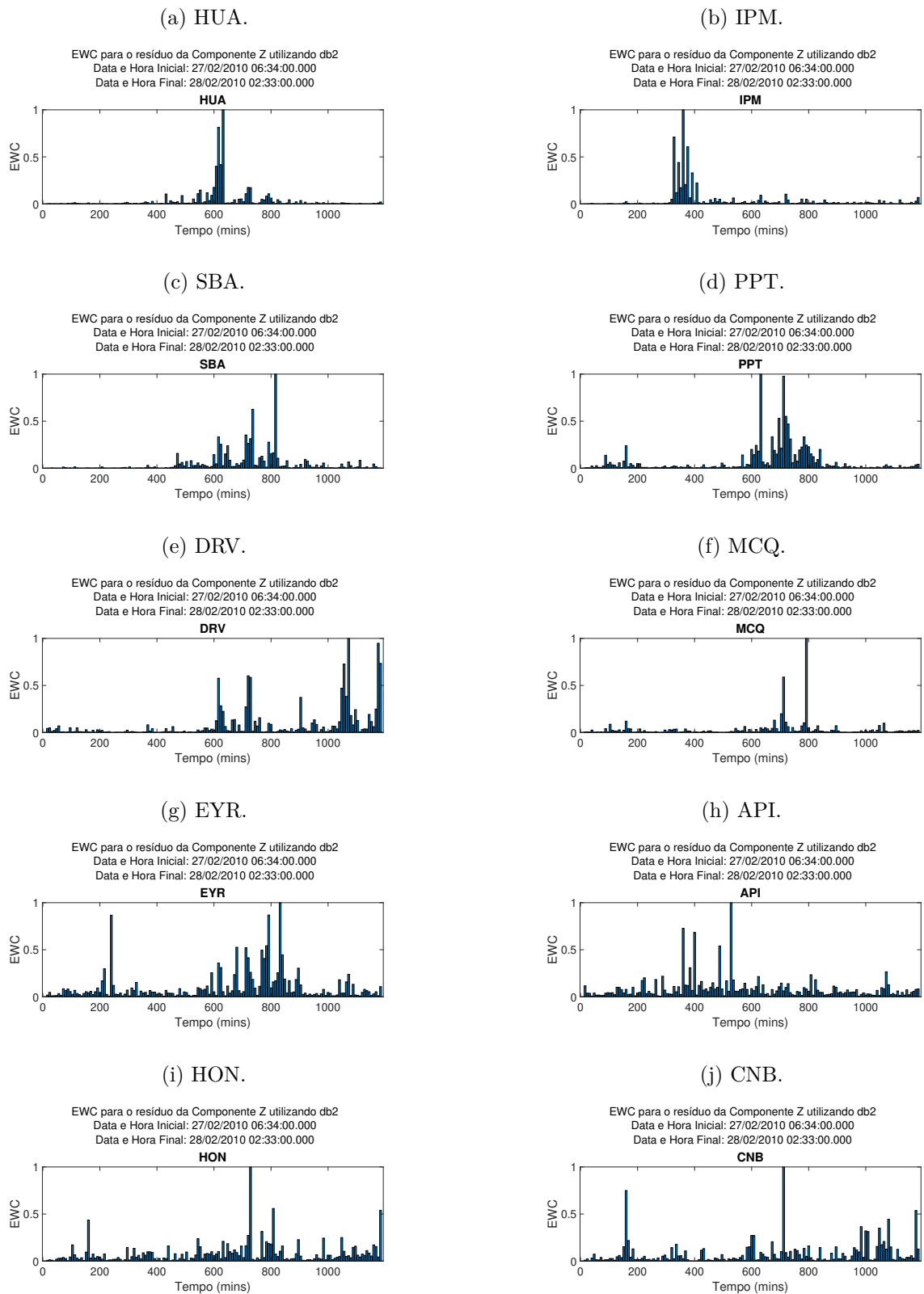


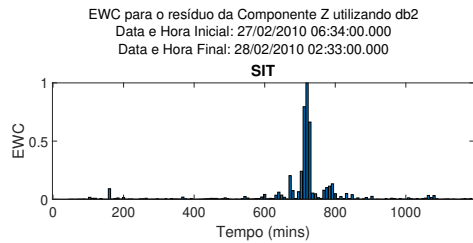
Figura 137 – Índices EWC de alta resolução para os resíduos da componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 20h após o início do evento (06:34 UT) e foram computados utilizando a *wavelet* db2.



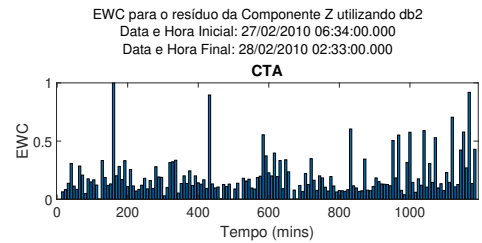
Fonte: O autor.

Figura 137 – Índices EWC de alta resolução para os resíduos da componente Z (todos os observatórios). Eles compreendem as 20h após o início do evento (06:34 UT) e foram computados utilizando a *wavelet db2* (cont.).

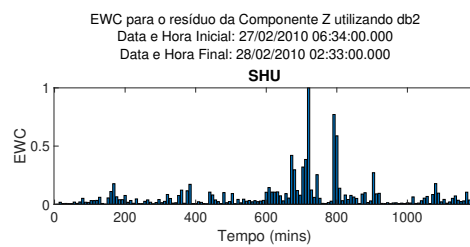
(k) SIT.



(l) CTA.

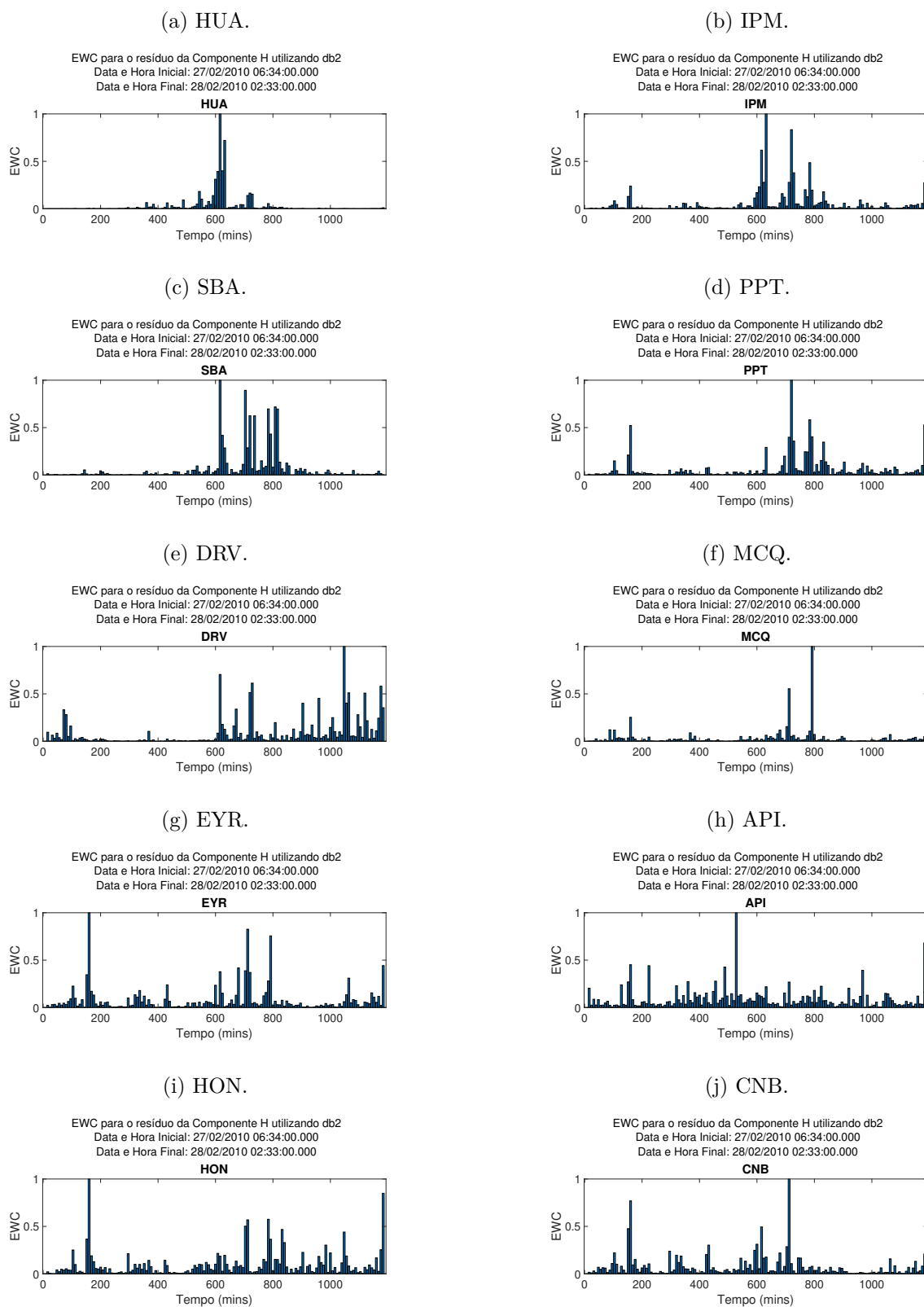


(m) SHU.



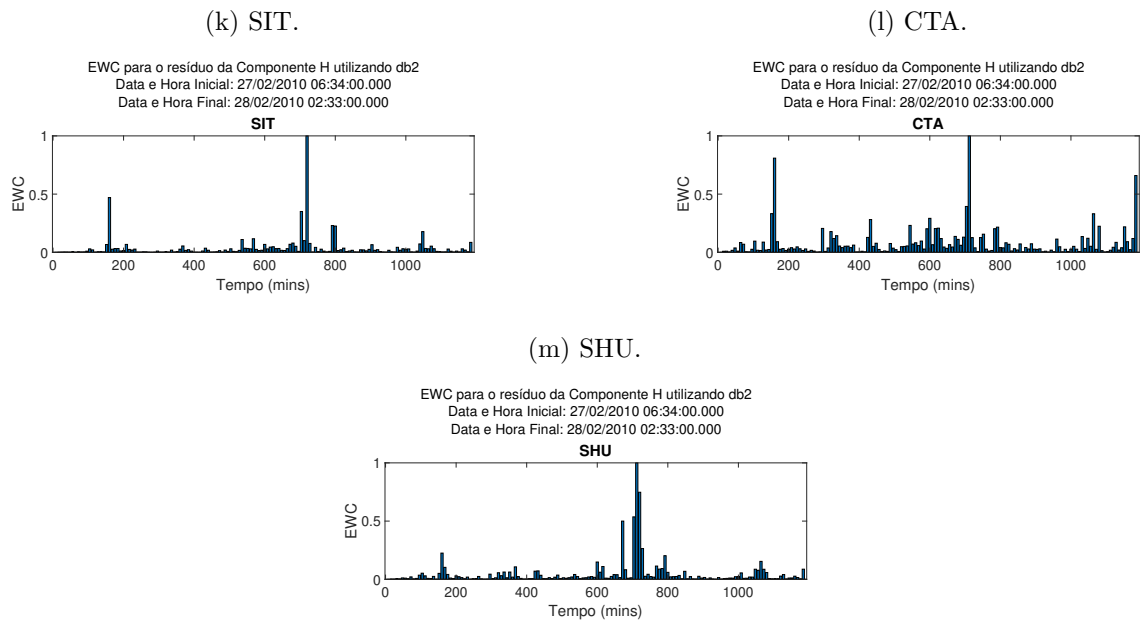
Fonte: O autor.

Figura 138 – Índices EWC de alta resolução para os resíduos da componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 20h após o início do evento (06:34 UT) e foram computados utilizando a *wavelet* db2.



Fonte: O autor.

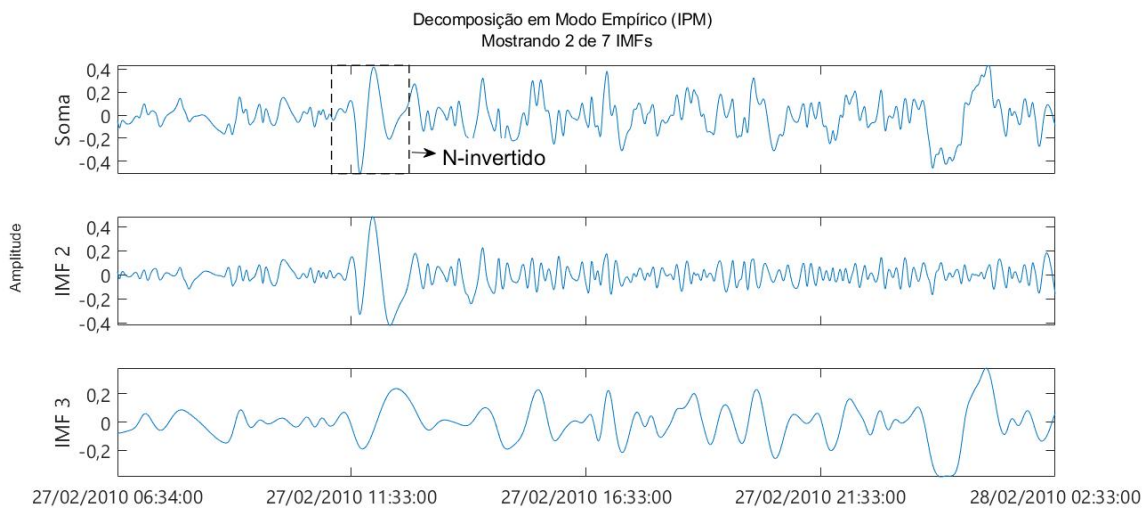
Figura 138 – Índices EWC de alta resolução para os resíduos da componente H (todos os observatórios). Eles compreendem as 20h após o início do evento (06:34 UT) e foram computados utilizando a *wavelet db2* (cont.).



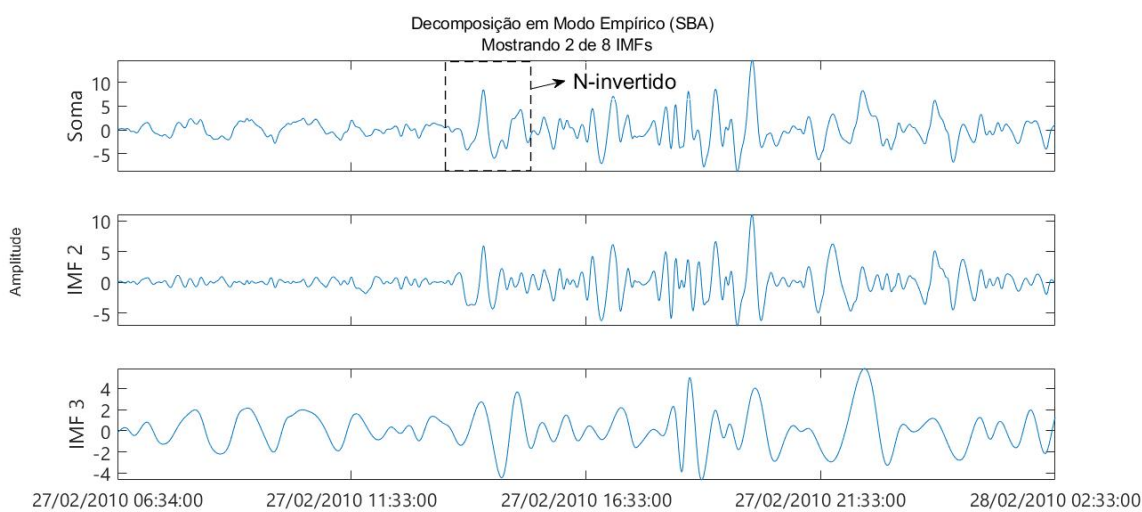
Fonte: O autor.

Figura 139 – Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido.

(a) IPM.



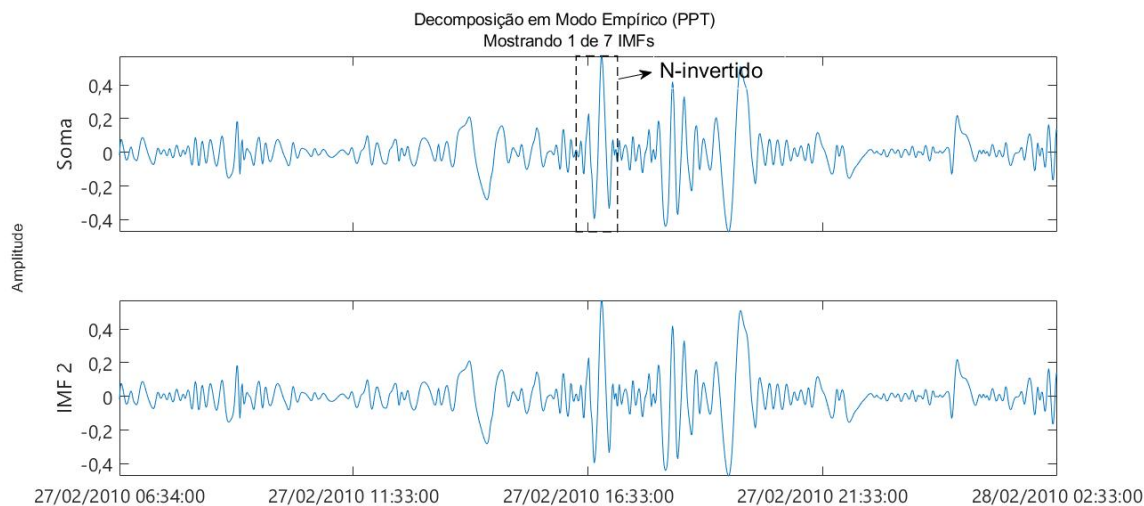
(b) SBA.



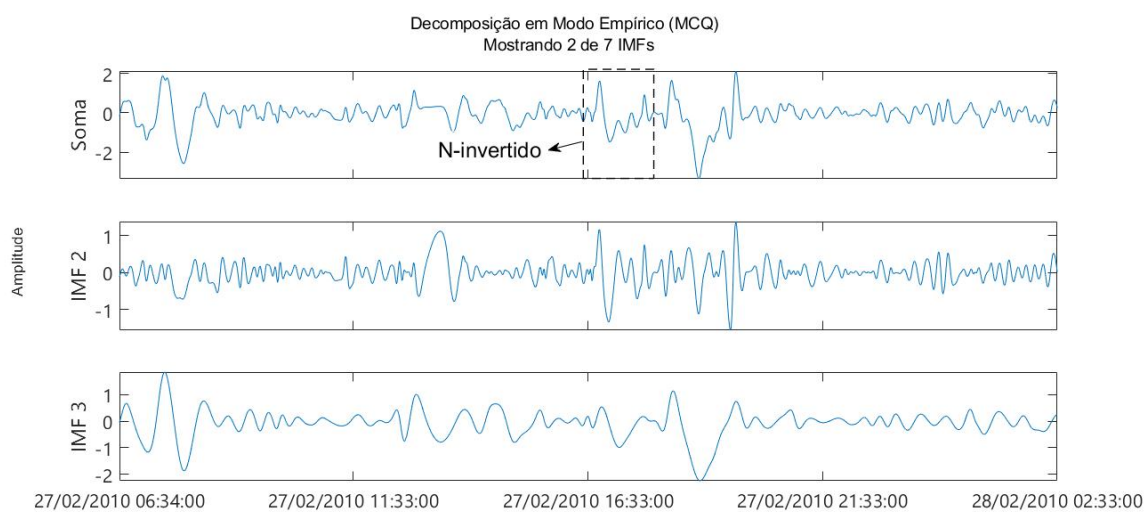
Fonte: O autor.

Figura 139 – Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido (cont.).

(c) PPT



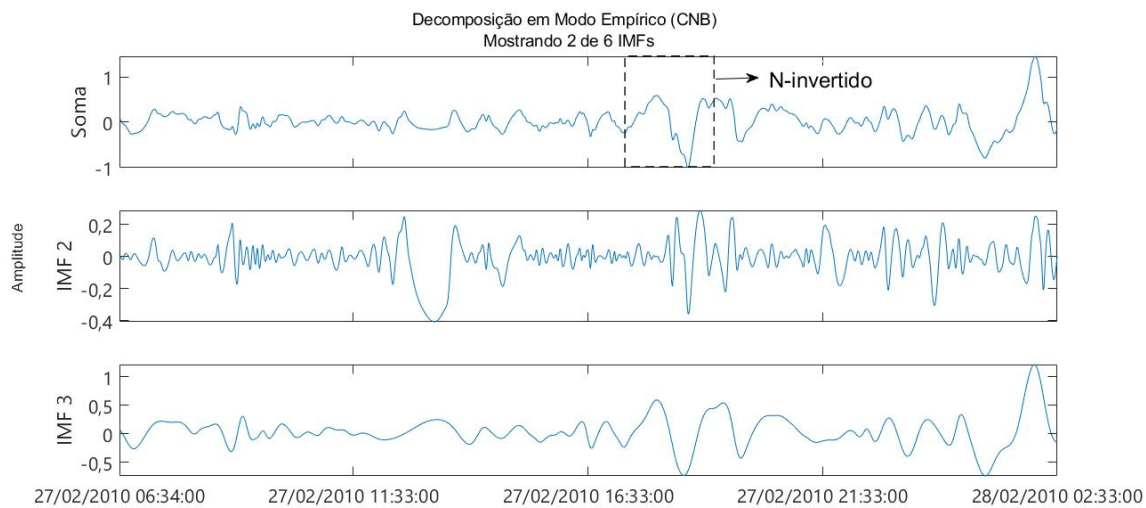
(d) MCQ



Fonte: O autor.

Figura 139 – Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente Z (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido (cont.).

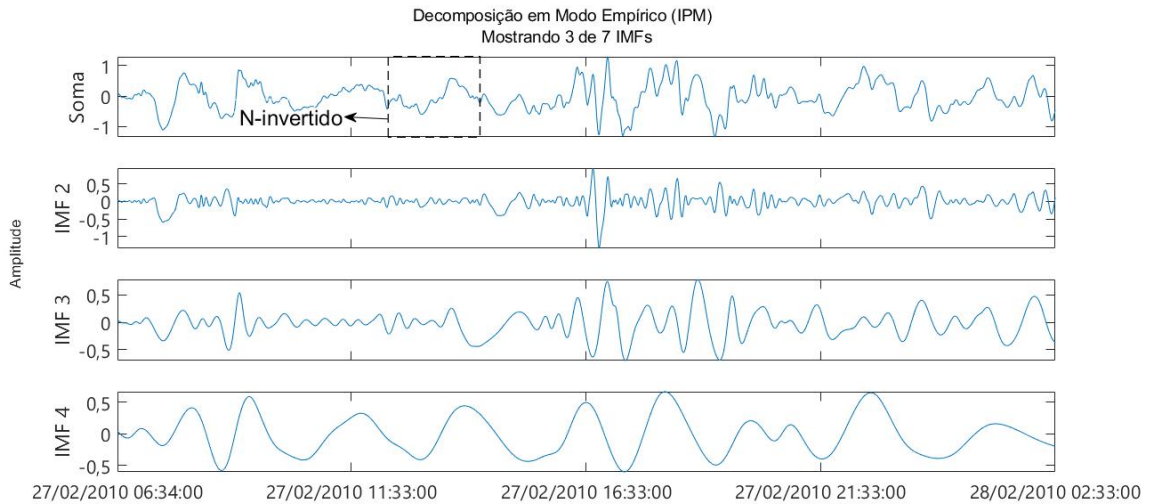
(e) CNB.



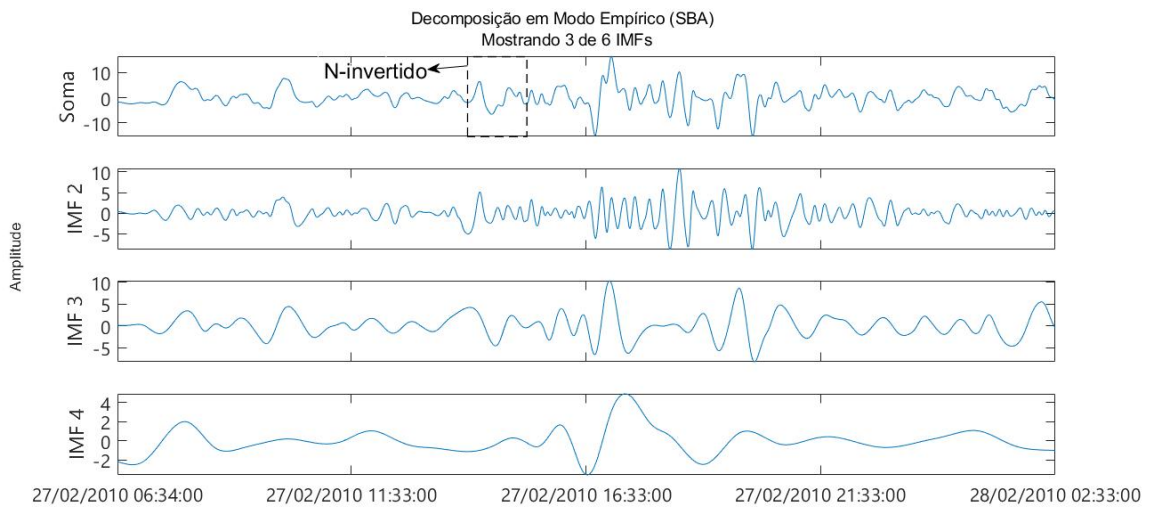
Fonte: O autor.

Figura 140 – Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido.

(a) IPM.



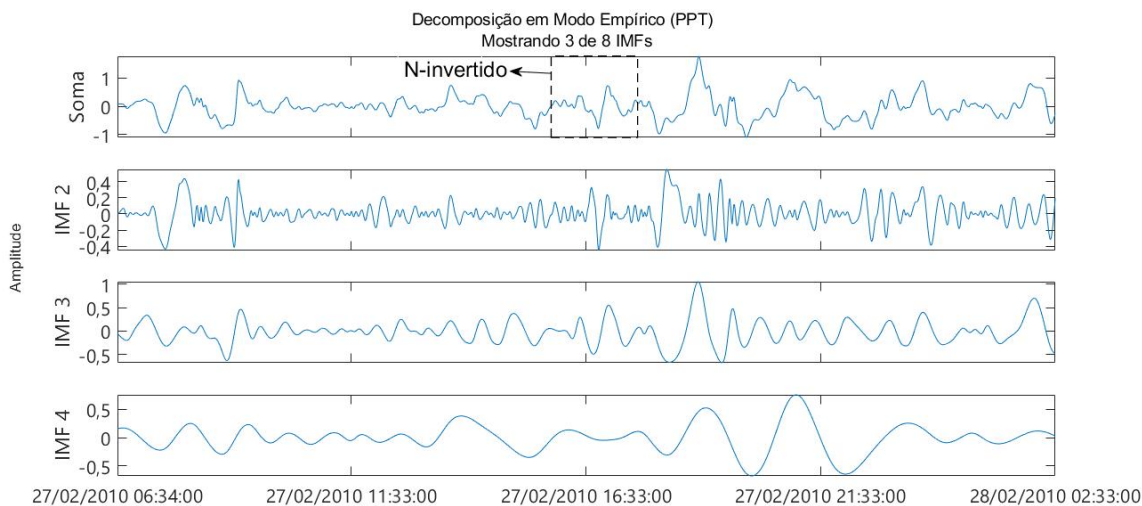
(b) SBA.



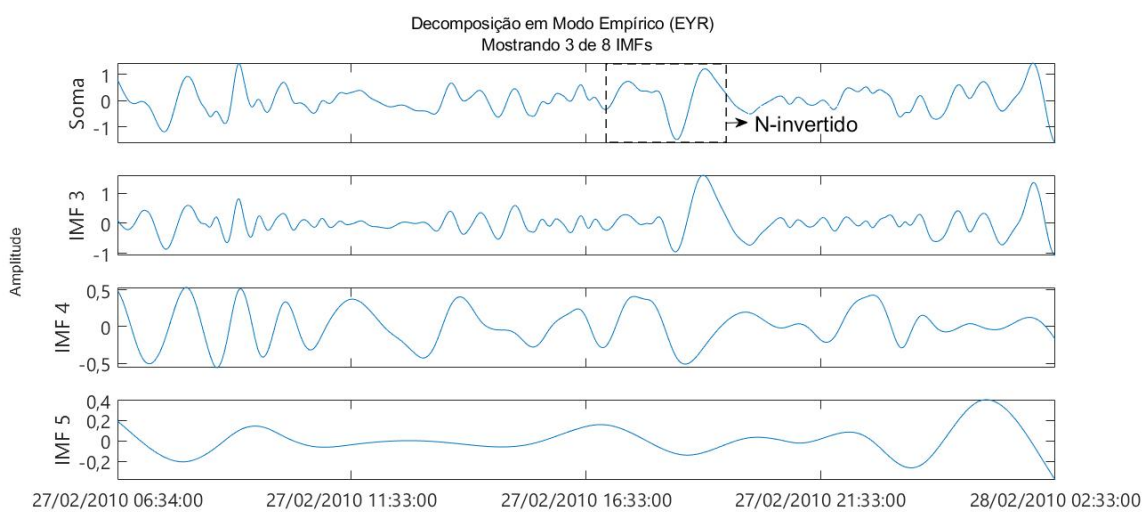
Fonte: O autor.

Figura 140 – Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido (cont.).

(c) PPT.



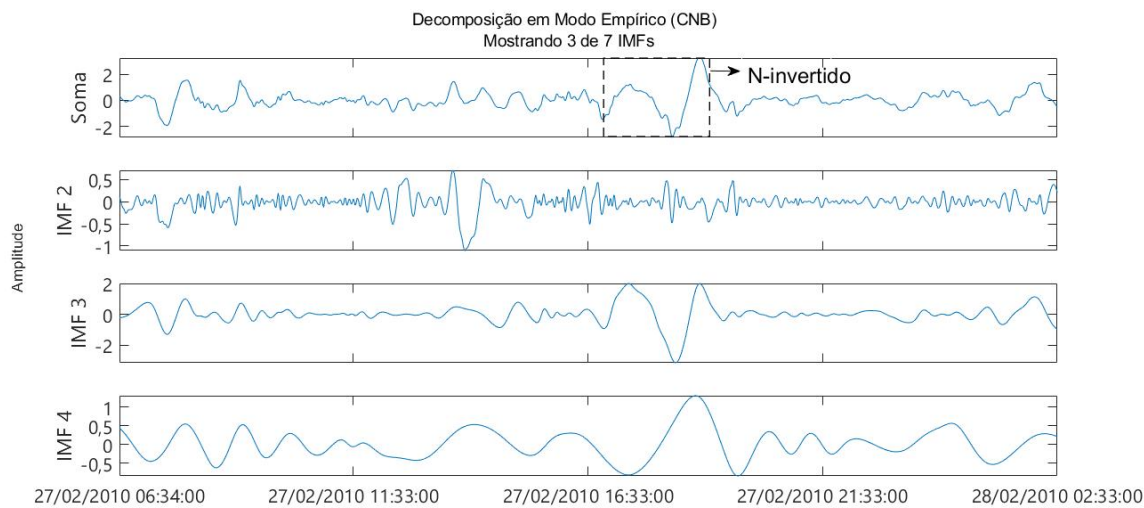
(d) EYR.



Fonte: O autor.

Figura 140 – Ilustração dos gráficos das IMFs obtidas dos resíduos da componente H (todos os observatórios). Os gráficos compreendem as 20 h após o início do evento (06:34 UT). As caixas tracejadas em preto enfatizam a variação em N-invertido (cont.).

(e) CNB.



Fonte: O autor.